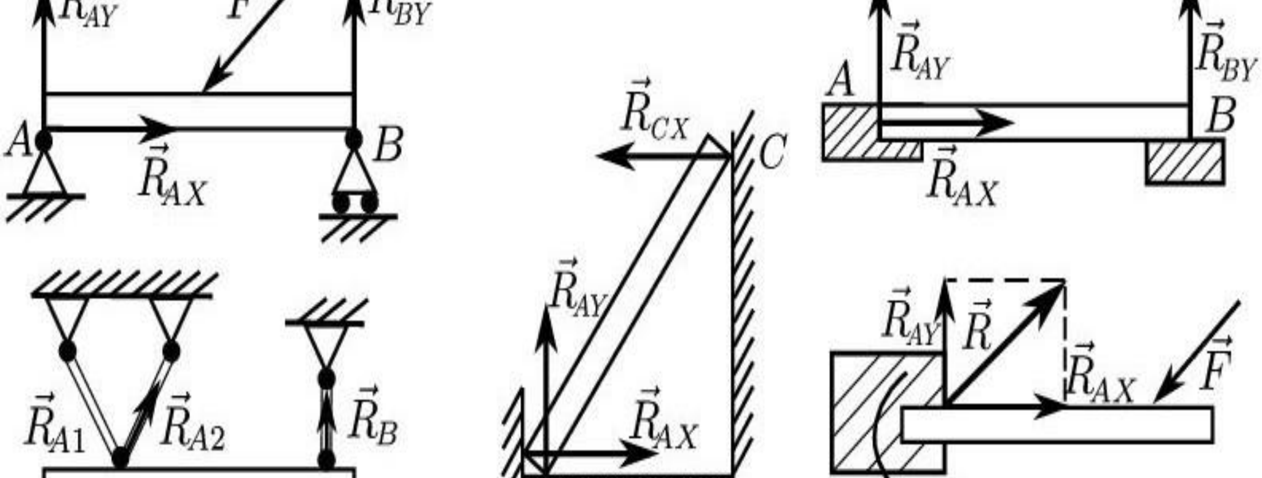
С.С. Авотін, М.Я. Рохманов

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА



Харків – 2020

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний аграрний університет ім. В.В. Докучаєва

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

За ред. канд. фіз.-мат. наук С.С. Авотіна

Харків – 2020

УДК 531/534 (075.8)
А 18

Рекомендовано до видання вченою радою
ХНАУ ім. В.В. Докучаєва
(протокол № 4 від 26 червня 2020 р.)

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, професор ***А.І. Козарь*** (ХНУРЕ);

канд. фіз.-мат. наук, доцент ***Д.І. Масленніков*** (ХНАУ ім. В.В. Докучаєва)

Авотін С.С.

А18 Теоретична механіка: навч. посіб. / С.С. Авотін, М.Я. Рохманов; за ред. канд. фіз.-мат. наук С.С. Авотіна, Харків. нац. аграр. ун-т. – Харків, 2020. – 77 с.

Посібник містить навчальний матеріал за розділами: основні поняття й аксіоми статики, в'язі та їх реакції, системи й моменти сил, центр тяжіння, кінематика матеріальної точки, поняття й аксіоми динаміки. Складено згідно з навчальною програмою.

Призначено для здобувачів інженерних спеціальностей вищих аграрних навчальних закладів III і IV рівнів акредитації.

УДК 531/534(075.8)

Навчальне видання

Авотін Станіслав Сергійович

Рохманов Микола Якович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

За редакцією канд. фіз.-мат. наук С.С. Авотіна

Редактор Н.Г. Войчук
Коректор І.О. Бутильська
Комп'ютерний набір і верстка – С.С. Авотін

Підпис. до друку 21.12.2020. Формат 60х84/16. Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Обсяг: 4,2 ум. друк. арк.; 4,5 обл.- вид. арк. Тираж 300. Замовлення №

Виробник – редакційно-видавничий відділ Харківського національного аграрного університету ім. В.В. Докучаєва. 62483, Харківська обл., Харківський р-н, п/в «Докучаєвське – 2», навчальне містечко, тел. 99-72-70. E-mail: office@knau.kharkov.ua

Виготовлювач – дільниця оперативного друку ХНАУ

З м і с т

Вступ 5

1. ***Основні поняття й аксіоми статики*** 6

   1.1. Сила, система сил 6

   1.2. Рівновага абсолютно твердого тіла 7

   1.3. Аксіоми статики та їх наслідки 7

   1.4. Теорема про три непаралельні сили 10

2. ***В'язі та їх реакції*** 12

   2.1. Невільне тверде тіло 12

   2.2. Види в'язей і напрям їх реакцій 13

3. ***Система збіжних сил*** 16

   3.1. Проекція сили на вісь і площину 16

   3.2. Аналітичний спосіб задавання сили 17

   3.3. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної 17

   3.4. Умови рівноваги системи збіжних сил 18

   3.5. Загальні умови розв'язання задач статики 19

4. ***Момент сили відносно точки й осі*** 20

   4.1. Момент сили відносно точки 20

   4.2. Момент сили відносно осі 23

   4.3. Залежність між моментами відносно точки та відносно осі, яка проходить через цю точку 24

5. ***Пара сил*** 27

   5.1. Пара сил. Момент пари сил 27

   5.2. Властивості пар сил 28

6. ***Просторова система сил*** 29

   6.1. Паралельне перенесення сил 29

   6.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил 30

   6.3. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил 31

   6.4. Умови рівноваги довільної системи сил на площині 31

   6.5. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил 32

7. ***Балкові системи*** 33

   7.1. Балкові системи та їх види 33

   7.2. Види навантажень балкових систем 34

   7.3. Приклади розв'язання задач 39

8. ***Центр тяжіння*** 42

   8.1. Центр тяжіння абсолютно твердого тіла 42

   8.2. Центр тяжіння однорідних плоских тіл (фігур) 44

   8.3. Приклад розв'язання задачі 45

9. ***Кінематика матеріальної точки*** 47
9.1. Кінематика поступального руху 47
9.2. Основні характеристики механічного руху 48
9.3. Повне прискорення під час криволінійного руху 50
9.4. Кінематика обертального руху 51
9.5. Складний рух точки і тіла 54
9.6. Приклади розв'язання задач 55
10. ***Поняття й аксіоми динаміки*** 58
10.1. Аксіоми динаміки 58
10.2. Поняття про тертя 59
10.3. Сили інерції 60
10.4. Принцип кінетостатики (Даламбера) 60
10.5. Робота і потужність. Коефіцієнт корисної дії (*ККД*) 61
10.6. Енергія. Зв'язок між силою і потенціальною енергією 62
10.7 Графічне зображення енергії 63
10.8. Приклади розв'язання задач 64
Розрахунково-графічні роботи 71
Рекомендована література 78

Вступ

Курс «Теоретична механіка» в системі фахової підготовки здобувачів напряму208 «Агроінженерія» має важливе значення під час вивчення циклу професійно спрямованих дисциплін. Курс, на засвоєння якого відведено120 год, складається з розділів: основні поняття й аксіоми статики, в'язі та їх реакції, система збіжних сил, момент сили відносно точки й осі, пара сил, просторова система сил, балкові системи, центр тяжіння, кінематика та динаміка матеріальної точки і тіла.

Курс «Теоретичної механіки» ознайомлює майбутніх фахівців з методами перетворення одних систем сил і пар сил в еквівалентні їм, умовами і положеннями рівноваги довільних просторових (плоских) систем сил і пар сил; методами розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість. Вивчення теоретичної механіки базується на знаннях, отриманих здобувачами під час вивчення курсу «Фізика з основами агрофізики».

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач ***повинен знати***: основні гіпотези та припущення; види в'язей, що діють на невільне тверде тіло, і напрям їх реакцій; властивості пар сил та правила дій над ними; ***уміти***: визначати моменти сил, що діють на невільне тверде тіло, відносно точок і осей; аналізувати умови рівноваги довільної системи сил; деформації, які розглядають у курсі (розтягання, стискання, зсув, згинання, поперечне й поздовжнє кручення).

В основі теоретичної механіки лежить класична механіка. Теоретична механіка досліджує найбільш загальні закони руху, спокою та взаємодії тіл. Статика – розділ теоретичної механіки, у якому вивчають методи перетворення одних систем сил в еквівалентні їм, а також умови рівноваги різних систем сил, які діють на абсолютно тверде тіло.

До основних понять теоретичної механіки належать:

1) матеріальна точка – геометрична точка, яка має певну масу;

2) система матеріальних точок – сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємопов’язані між собою;

3) абсолютно тверде тіло – тіло, що складається з системи матеріальних точок, які неперервно заповнюють певну частину простору так, що відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною;

4) суцільне середовище – система матеріальних точок, що неперервно заповнюють частину простору, під час руху яких відстані між ними змінюються.

Ці поняття є ідеальними моделями матеріальних тіл з різним ступенем абстракції реальних фізичних властивостей.

1. *ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ Й АКСІОМИ СТАТИКИ*

1.1. Сила, система сил

Сила – міра взаємодії матеріальних тіл, у результаті якої тіла, що взаємодіють, надають одне одному прискорення або деформуються. Сила характеризується: **1)*напрямом***; **2)*числовим значенням*** (модулем); **3)*точкою прикладання*** – матеріальною частиною тіла, на яку діє сила.

Лінія дії сили – пряма, уздовж якої направлена сила. Силу можна задати через її проекції на осі прямокутної системи координат. Пряма, за якою направлений вектор сили, називається лінією однієї сили.

Сили поділяють на ***зовнішні та внутрішні.*** Зовнішні сили – на ***активні***, які викликають переміщення тіла, і***реак-тивні (реакції в’язей).***

За характером дії на тіло зовнішні сили поділяють на ***статичні та динамічні***. ***Статичними*** називають сили, при яких прискореннями тіла чи його частин можна знехтувати. ***Динамічними*** називають сили, при яких виникають значні прискорення тіла чи його частин і пов’язані з ними сили інерції.

За способом прикладання зовнішні сили поділяють на поверхневі й об’ємні. Усі навантаження, що існують в природі, розподілені за об’ємом чи за площею.

Система сил $(\vec{F}_{1,}\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$ – сукупність сил, прикладених до тіла.

Система сил, лінії дії яких лежать в одній площині, називається ***плоскою***.

Система сил, лінії дії яких лежать у різних площинах, називається ***довільно розміщеною,*** або ***просторовою.***

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається ***збіжною***.

Еквівалентними називають такі дві системи сил, які, діючи окремо на вільне тверде тіло, однаково змінюють його кінематичні характеристики (швидкість, напрям руху і т. ін.). $(\vec{F}_{1,}\vec{F}_2,...,\vec{F}_n) \sim$ $(\vec{P}_{1,}\vec{P}_2,...,\vec{P}_m)$. Якщо система сил еквівалентна одній силі $\vec{R}$, тобто $(\vec{F}_{1,}\vec{F}_2,...,\vec{F}_n) \sim \vec{R},$ останню називають ***рівнодійною цієї системи сил***. Не всяка система сил має рівнодійну.

1.2. Рівновага абсолютно твердого тіла

Абсолютно твердим тілом називають тіло, у якому відстань між двома будь-якими його точками зберігається постійною в процесі руху, тобто зберігає свою геометричну форму незмінною.

Зрівноважена система сил – система сил, яка прикладається до тіла, але не змінює його стану $(\vec{F}_{1,}\vec{F}_2,...,\vec{F}_n) \sim 0$.

1.3.Аксіоми статики та їх наслідки

Аксіоми статики – ***загальні закони***, яким підлягають сили, що діють на одне тіло або на взаємодіючі тіла.

Аксіома I: *дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно врівноважуються тоді і лише тоді, коли вони рівні за величиною і діють уздовж однієї прямої в протилежних напрямах.*

Аксіома II: *прикладання і відкидання взаємно зрівноважених сил не порушує стану рівноваги.* Наслідок – *точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії її дії в яку завгодно точку тіла без порушення його рівноваги.*

Аксіома ІІІ (про паралелограм сил): *рівнодійна двох сил, прикладених під деяким кутом, визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які зображують ці сили* (рис. 1.1).

Модуль рівнодійної визначають за теоремою косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha},$$

оскільки $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ (рис. 1.2).

Синуси кутів між рівнодіючою і складовими силами можна знайти за теоремою синусів:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)}; \quad \frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

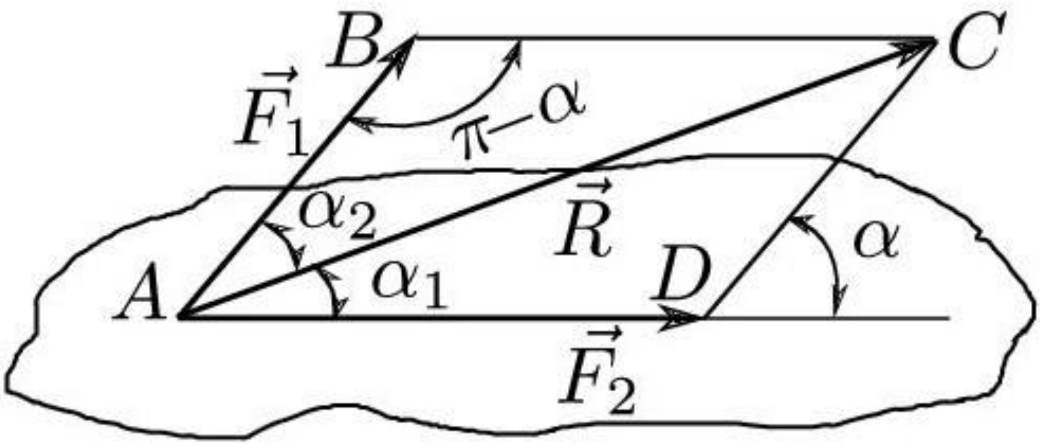


Рис. 1.1

З ***аксіоми паралелограма сил*** випливає правило ***векторного додавання сил***, прикладених в одній точці твердого тіла (рис. 1.2). Для цього достатньо побудувати ***силовий багатокутник***, приєднуючи послідовно до першої сили $\vec{F}_1$ вектор, геометрично рівний вектору другої сили $\vec{F}_2$ і т. ін. (рис. 1.3). Вектор, проведений з точки прикладання першої сили в останню вершину побудованого багатокутника, є рівнодійною *R*, яка дорівнює $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Якщо остання вершина багатокутника сил збігається з першою, то багатокутник називають замкнутим. У такому разі рівнодійна дорівнює нулю: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0$, а система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ є ***зрівноваженою***.

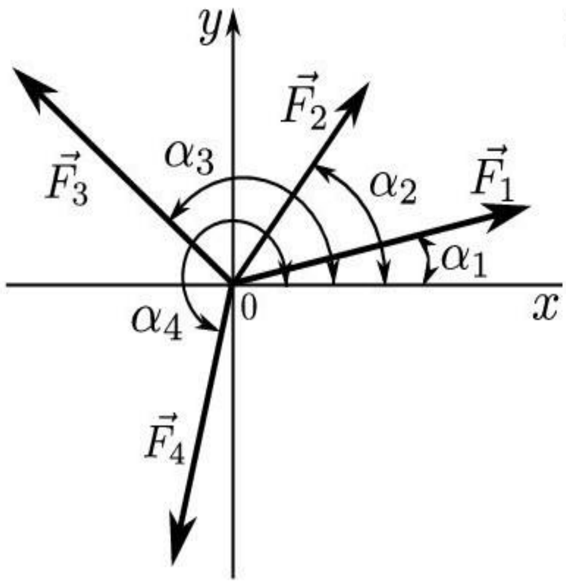


Рис.1.2

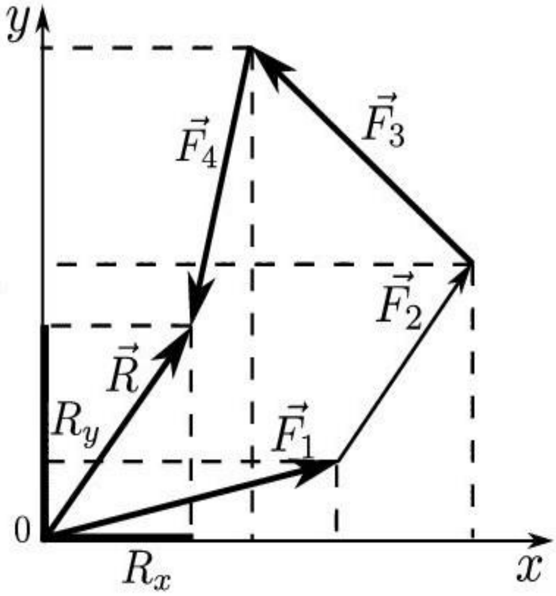


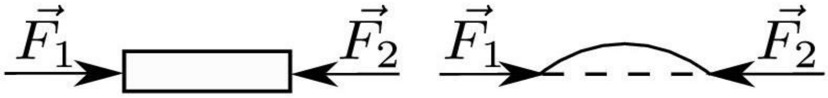
Рис. 1.3

Замкнутість силового багатокутника виражає умову рівноваги сил, прикладених в одній точці твердого тіла, у графічній формі.

Правило паралелепіпеда сил: *рівнодійна просторової системи трьох сил, які збігаються в одній точці, прикладена в тій самій точці за модулем та напрямом, дорівнює діагоналі паралелепіпеда, ребра якого відповідно паралельні заданим силам та рівні їм*: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

Аксіома IV(про дію і протидію):*сили, з якими два тіла взаємодіють між собою, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямом* $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Дія і протидія прикладені до різних тіл, тому ці сили не утворюють систему взаємно зрівноважених сил.

Аксіома V(принцип отвердіння):*Рівновага тіла, яке перебуває в рівновазі, не порушиться, коли, не змінюючи форми, розмірів, положення в просторі, воно перетвориться в абсолютно тверде тіло*. З принципу отвердіння випливає, що умови рівноваги, які є необхідними і достатніми для абсолютно твердого тіла, необхідні, але недостатні для відповідного тіла, яке деформується. Наприклад, твердий брусок перебуває в рівновазі під дією двох сил, рівних за модулем і направлених уздовж осі бруска одна до одної або одна від одної у той час, як нитка, що відповідає цьому бруску, перебуває в рівновазі тільки під дією двох сил, рівних за модулем і направлених уздовж нитки одна від одної. Зрозуміло, що під дією сил, направлених одна до одної, нитка зімнеться.



Принцип отвердіння дозволяє перенести результати, викладені в статиці абсолютно твердого тіла, не тільки на дослідження рівноваги тіл, що деформуються (опір матеріалів), та цілих інженерних споруд (механіка будівництва), а й на рівновагу рідини (гідростатика).

1.4. Теорема про три непаралельні сили

Якщо під дією трьох сил тіло перебуває в рівновазі і лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній площині і їх лінії дії перетинаються в одній точці.

Нехай задане тіло перебуває в рівновазі під дією трьох сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, прикладених у точках *A, B, C* (рис. 1.4), причому лінії дії сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ перетинаються в точці *O*. Згідно з наслідком *аксіоми II* сили $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ можна перенести в точку *O* (рис. 1.5), а за *аксіомою III* їх можна замінити однією рівнодійною силою $\vec{R}$ (рис. 1.6).

Таким чином, ця система сил приведена до двох сил $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$.
За умовами теореми тіло перебуває в рівновазі. Отже, відповідно до *аксіоми I*, сили $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$ мають бути рівними за модулем, протилежно направленими і діяти вздовж однієї прямої.

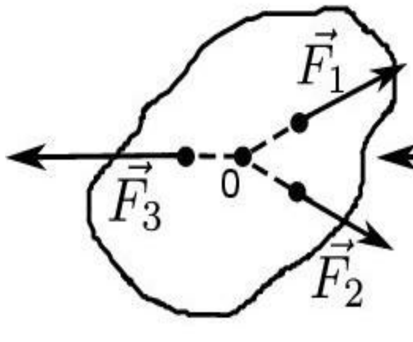


Рис. 1.4

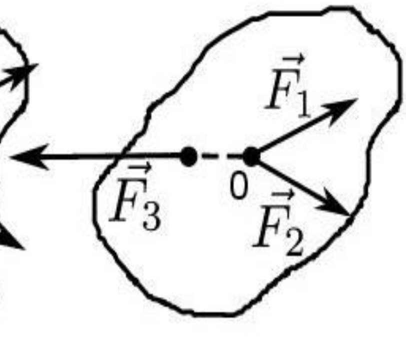


Рис. 1.5

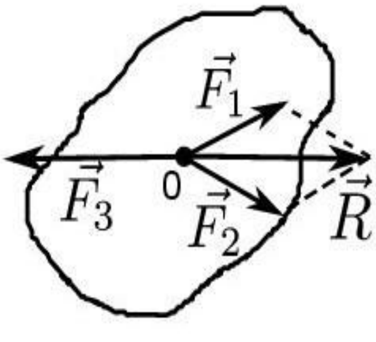


Рис. 1.6

Це означає, що лінія дії сили $\vec{F}_3$ повинна проходити через точку *O*.

Ця теорема дозволяє знаходити напрям невідомої сили, якщо відомі напрями двох інших сил, під дією яких тіло перебуває в рівновазі. Наприклад, нехай балка вагою $\vec{P}$ (рис. 1.7) закріплена на нерухомому циліндричному шарнірі *A* та спирається в точці *B* на нерухому опору. Реакція $\vec{N}$ нерухомої опори направлена перпендикулярно до балки *AD*.

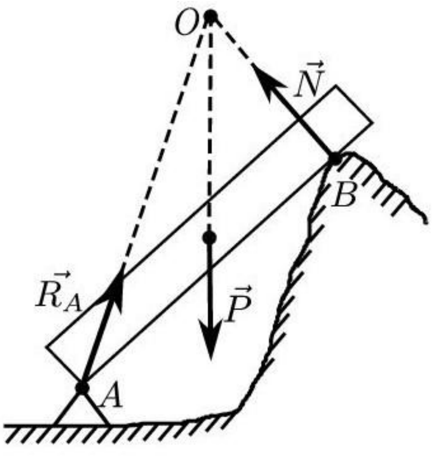


Рис. 1.7

Оскільки три сили $\vec{P}$, $\vec{N}$ і реакція шарніра $\vec{R}_A$ взаємно врівноважуються, то лінії дії цих сил повинні перетинатись в одній точці, тому лінія дії реакції $\vec{R}_A$ шарніра *A* проходить через точку перетину *O* ліній дії сил $\vec{P}$ і $\vec{N}$. Це означає, що реакція $\vec{R}_A$ направлена по прямій *OA*, яка з'єднує точку *O* з нерухомою точкою *A* (з нерухомим шарніром, що розглядають як точку).

Заміну однієї сили системою сил, яка створює на тіло ту саму дію, називають розкладанням сил. У разі розкладання цієї сили на дві збіжні складові сили, прикладені в тій самій точці, необхідно знайти таку систему двох збіжних сил, для якої ця сила є рівнодійною.

Контрольні запитання

1. Що являє собою сила? Чим характеризується сила?
2. Що називають системою сил?
3. Чим відрізняється плоска система сил від просторової?
4. Яку систему сил називають збіжною?
5. Які системи сил називають еквівалентними?
6. Яку силу називають рівнодійною цієї системи сил?
7. Що являє собою абсолютно тверде тіло?
8. Яку систему сил називають зрівноваженою?
9. Сформулюйте принцип прикладання і відкидання взаємно зрівноважених сил.

10. За якою формулою визначають модуль рівнодійної?
11. Як визначають рівнодійну двох сил, направлених уздовж однієї прямої але в протилежні боки?
12. Як визначають геометричну різницю двох векторів?
13. Що являє собою силовий багатокутник?
14. Що виражає замкнутість силового багатокутника?
15. У чому полягає правило паралелепіпеда сил?
16. Сформулюйте закон рівності дії та протидії.
17. Сформулюйте теорему про три непаралельні сили.

2. *В'ЯЗІ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ*

2.1. Невільне тверде тіло

Вільним називають тіло, переміщення якого в просторі нічим не обмежено. Вільне тіло в просторі може здійснювати ***три лінійних і три кутових переміщення*** (повороти відносно осей системи координат).

Вільне тіло перебуває в стані спокою тоді, коли шість можливих переміщень дорівнюють нулю.

Невільним називають тіло, переміщення якого в просторі в будь-якому напрямі обмежено іншими тілами.

В'яззю (зв'язком)*називають тіло, яке, торкаючися до іншого тіла, обмежує його рух у будь-якому з напрямів.* Невільне тіло в просторі буде мати змогу здійснювати стільки переміщень, скільки дозволено в'язями, тобто ***шість мінус кількість переміщень обмежених в'язями.***

Реакцією в'язі називають силу або систему сил, яка виражає механічну дію в'язі на тіло. Реакції в'язей за своєю суттю пасивні, оскільки виникають лише під дією активних сил і є силами зовнішніми. Числове значення пасивних сил залежить від прикладених активних сил.

Усі сили, що діють на ***невільне тверде тіло***, крім розподілу на зовнішні та внутрішні, можна також поділити на ***задані або активні сили і реакції в'язей***.

Аксіома VI (принцип звільнення твердих тіл від в’язей): *невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, на яке, крім заданих сил, діють реакції в’язей, а не самі в’язі.*

Аксіома VII (принцип накладання нових в’язей): *рівновага абсолютно твердого тіла не порушиться при накладанні на нього нових в’язей.* Наприклад, якщо стіл, який стоїть на підлозі, перебуває в рівновазі, то ця рівновага не порушиться, якщо ніжки стола прикріпити до підлоги болтами.

2.2. Види в’язей і напрям їх реакцій

Статика розглядає переважно невільні тіла, тобто тіла, які певним чином закріплені. Будь-яка в’язь обмежує одне чи декілька переміщень однієї точки або групи точок тіла, які розглядають.

Реакція в’язі завжди направлена в сторону, протилежну неможливому руху. Таким чином, якщо відомо, переміщення яких точок тіла обмежені та в якому напрямі, то відомі і точки прикладання та напрями реактивних сил. Розглянемо, як направлені реакції деяких основних видів в’язей.

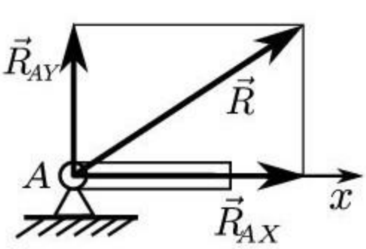
1. Вільне спирання тіла на гладку опорну поверхню. Реакція $\vec{R}$ або $\vec{N}$ такої в’язі направлена вздовж нормалі до опорної поверхні в цій точці.

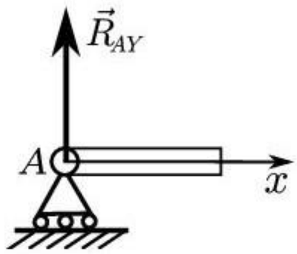
2. Спирання на гладке ребро тіла або тіло. Тіло спирається на гладку поверхню, коли одна з поверхонь, що стикаються, є точкою. Реакція в’язі завжди направлена по нормалі до дотичної опорної поверхні в точці стикання з певним тілом.

3. Нерухомий плоский циліндричний шарнір (шарнірно-нерухома опора) дозволяє поворот навколо осі шарніра, але не здійснює лінійні переміщення. Реакцію в’язі $\vec{R}_A$ замінюють двома невідомими взаємно перпендикулярними складовими реакцій $\vec{R}_{Ax}$ і $\vec{R}_{Ay}$ (рис. 2.8).

4. Рухомий плоский циліндричний шарнір (каткова опора) дозволяє поворот навколо осі шарніра та лінійне переміщення на незначну відстань уздовж опорної поверхні. Реакція в’язі $\vec{R}_A$

проходить через центр шарніра перпендикулярно до опорної поверхні(рис. 2.9).





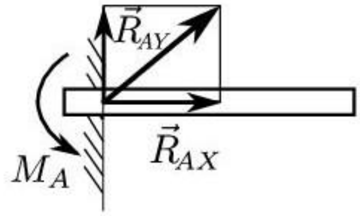
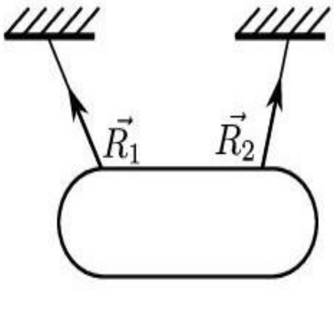


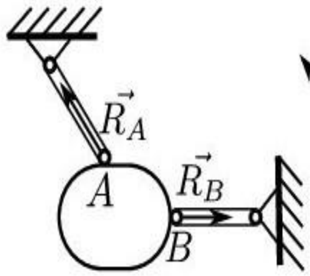
Рис. 2.8 Рис. 2.9 Рис.2.10

5. ***Защемлення (жорстке закладання)*** – це спосіб закріплення балок у стінах будинків (рис. 2.10). Під час розв’язання задач таку в’язь замінюють двома невідомими складовими реакції $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ та реактивною парою сил з моментом $\vec{M}_A$.

6. Гнучка в’язь (нитка, мотузка, дріт, шнур, трос, ланцюг, канат). Реакція цієї в’язі прикладена в точці кріплення і направлена вздовж в’язі до точки підвішування (рис. 2.11).

7. Жорсткий стрижень (стрижнева опора), вагою якого нехтують, а кінці кріпляться з обох боків шарнірно (ідеальний стрижень). Якщо на стрижень не діє ніяка сила, крім в’язей у шарнірах, то реакція в’язі направлена вздовж прямої, яка проходить через центри шарнірів (рис. 2.12).





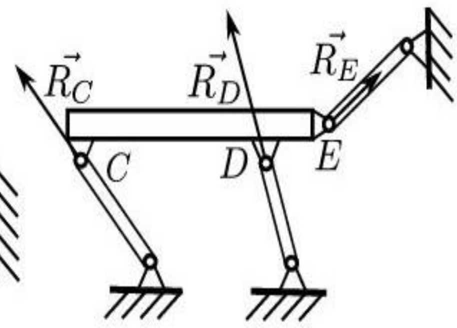


Рис. 2.11 Рис. 2.12 Рис. 2.13

Якщо стрижень розтягнений, то його реакція направлена в бік від тіла до стрижня: $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, $\vec{R}_E$ (рис. 2.12, 2.13). Якщо стрижень стиснений, то його реакція направлена в бік від стрижня до тіла: $\vec{R}_C$, $\vec{R}_D$ (див. рис. 2.13). У разі спроби переміщення тіла по шорсткій поверхні виникає в’язь з невідомим напрямом, тому її розкладають на дві складові: нормальну $\vec{N}$ і дотичну $\vec{R}_{тер}$ (сила тертя), тобто $\vec{R} = \vec{N} + \vec{R}_{тер}$. Модулі $\vec{N}$ і $\vec{R}_{тер}$ визначають із відповідних умов рівноваги тіла. В'язі без тертя називають ***ідеальними***, а з тертям – ***реальними***.

Слід зауважити, що ідеально гладких поверхонь не існує– це абстракція, яку використовують у тих випадках, коли силами можна нехтувати.

8. Сферичний шарнір, упорний підшипник, підп'ятник. Напрями реакцій таких в'язей проходять через центр в'язі. Для сферичного шарніра (або підп'ятника) лінія дії реакції повинна проходити через центр сфери, напрям може бути довільним.

Розглядаючи рівновагу тіла, реакцію замінюють трьома невідомими складовими $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ і $\vec{R}_{Az}$ за напрямом трьох взаємно перпендикулярних осей. Модулі та їх напрями визначають з умов рівноваги відповідних систем сил. У разі циліндричного шарніра (підшипника) його реакція розміщена в площині, перпендикулярній до його осі oz. Невідомий вектор реакції в'язі в площині визначають двома складовими $\vec{R}_x$ і $\vec{R}_y$ по осях ox і oy, величини яких знаходять з умов рівноваги. В окремому випадку, коли можна знехтувати розмірами шарнірів і силами тертя, що виникають у них, шарніри називають ідеально точковими.

Контрольні запитання

1. Яке тіло називають вільним, невільним? Які переміщення може здійснювати вільне тіло в просторі?
2. Що називають в'яззю? Що називають реакцією в'язі?
3. Чим внутрішні сили відрізняються від зовнішніх?
4. Сформулюйте принцип звільнення твердих тіл від в'язей.
5. Куди направлена реакція опори на гладку поверхню?
6. Куди направлена реакція опори на гладке ребро тіла?
7. Як направлені реакції нерухомого і рухомого плоского циліндричного шарніра?
8. Куди направлена реакція гнучкої в'язі?
9. Куди направлена реакція такої в'язі, як жорстке закладання?
10. Чому зовнішні сили не врівноважуються реакціями в'язей?

3. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

3.1. Проекція сили на вісь і площину

Аналітичний метод розв'язання задач статики базується на понятті про проекцію сили на вісь. *Проекція сили на вісь – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом сили і додатним напрямом осі.* Якщо кут гострий – проекція додатна, якщо тупий – від'ємна: $F_x = F\cos\alpha$ (рис. 3.1): $F_{x1} > 0;$ $F_{x2} < 0;$ $F_{x3} < 0;$ $F_{x4} > 0.$

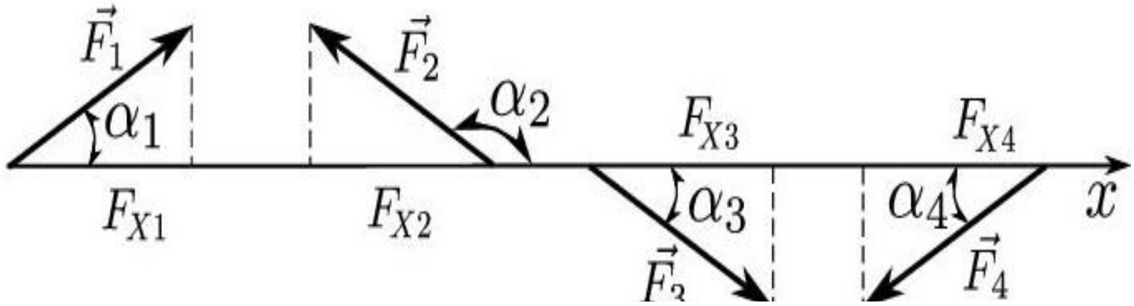
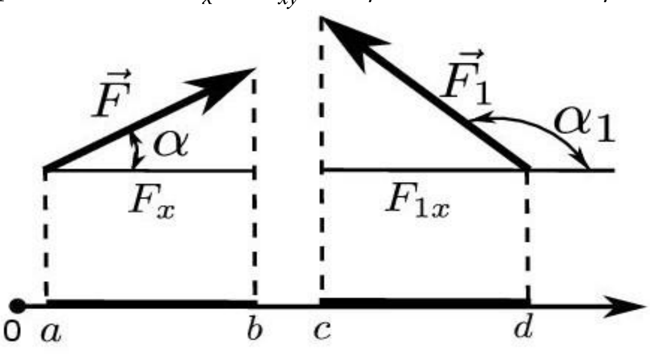


Рис. 3.1

Проекцією сили $\vec{F}$ *на площину* Oxy *називають вектор* $\vec{F}_{xy}$, *що знаходиться між проекціями початку і кінця сили* $\vec{F}$ *на цю площину* (рис. 3.2). За модулем $F_{xy} = F\cos\theta,$ де θ – кут між напрямом сили $\vec{F}$ та її проекції F_{xy}. Для знаходження проекції сили на вісь зручніше спочатку знайти її проекцію на площину, у якій ця вісь лежить, а потім знайдену проекцію на площину спроектувати на вісь. Наприклад, у випадку, показаному на рис. 3.3, отримаємо: $F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi,$ $F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi.$



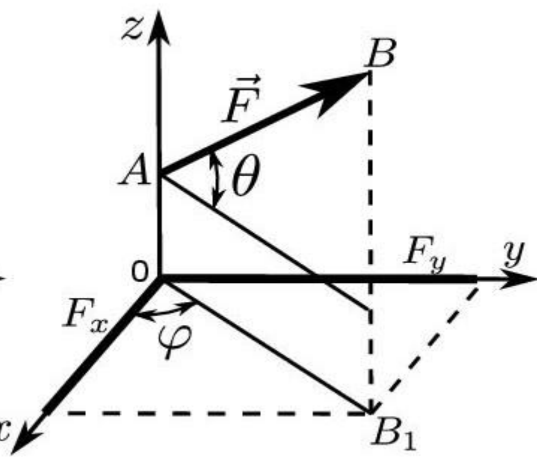


Рис. 3.2 Рис. 3.3

3.2. Аналітичний спосіб задавання сили

Для аналітичного задавання сили необхідно вибрати систему координатних осей $oxyz$. Вектор, який зображає силу $\vec{F}$, можна побудувати, якщо відомі модуль F цієї сили і кути $\alpha, \beta, \gamma,$ які сила складає з координатними осями. Точка A(рис. 3.3) прикладення сили повинна бути задана окремо її координатами (x, y, z). Для розв'язування задач зручніше задавати силу її проекціями F_x, F_y, F_z на координатні осі. Знаючи ці проекції, можна визначити модуль сили і косинуси кутів, які вона становить з координатними осями, за формулами:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \cos\beta = \frac{F_y}{F}; \cos\gamma = \frac{F_z}{F}.$$

Якщо сила розміщена в одній площині, то її можна задати проекціями на дві осі.

3.3. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної

Систему прикладених до абсолютно твердого тіла сил називають ***збіжною***, якщо лінії дії всіх сил перетинаються в одній точці. Точку перетину сил називають ***центром сил***. За аксіомою паралелограма сил рівнодійна $\vec{R}$ системи збіжних сил дорівнює векторній сумі цих сил: $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + ... + \vec{R}_n = \sum_1^n \vec{F}_i$. Графічно рівнодійну силу $\vec{R}$ визначають як сторону, що замикає силовий багатокутник (рис. 3.4). Для аналітичного визначення рівнодійної $\vec{R}$ вводять прямокутну систему координат $oxyz$ з початком у точці o перетину ліній дії заданих сил $(\vec{F}_{1,} \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$.

Користуючись теоремою, згідно з якою проекція векторної суми на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на ту саму вісь складових векторів, одержимо вирази для проекцій F_x, F_y, F_z рівнодійної $\vec{R}$ у вигляді:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \; R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \; R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Модуль рівнодійної $R=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}F_{ix}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}F_{iy}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}F_{iz}\right)^2}$,

а її напрям – такі ***напрямні косинуси:***

$$\cos\alpha=R_x/R;\qquad \cos\beta=R_y/R;\qquad \cos\gamma=R_z/R.$$

Таким чином, ***система збіжних сил*** *може бути замінена рівнодійною силою, яка прикладена в точці перетину сил і дорівнює геометричній сумі сил, що діють на тіло.*

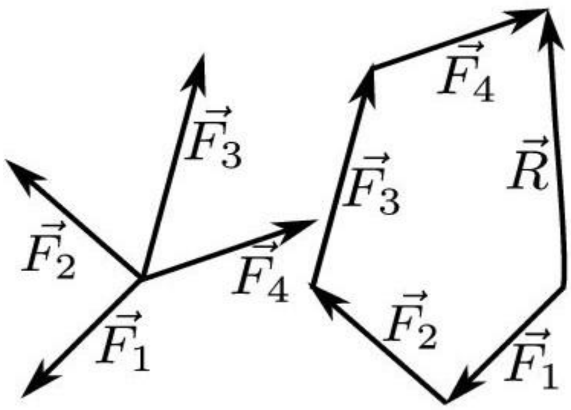


Рис. 3.4

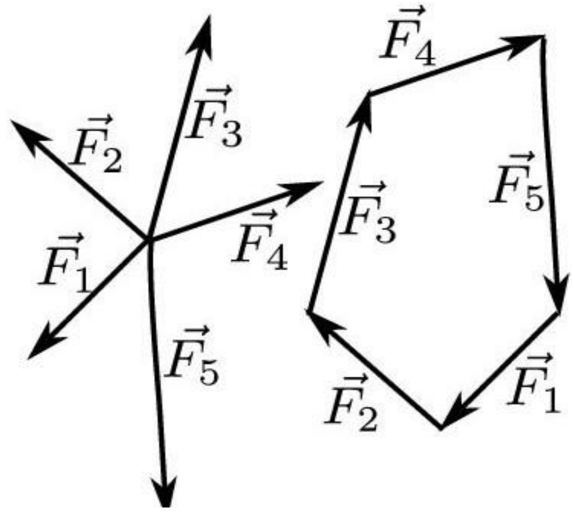


Рис. 3.5

3.4. Умови рівноваги системи збіжних сил

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю, тобто:

$$\vec R=\vec F_1+\vec F_2+\ldots+\vec F_n=\sum_{i=1}^{n}\vec F_i=0. \qquad (3.1)$$

Необхідність умови (3.1) випливає з того, що система збіжних сил, прикладених до твердого тіла, еквівалентна одній силі – рівнодійній $\vec R$. Ураховуючи умову $\vec R=\sum_{i=1}^{n}\vec F_i$, що ***багатокутник сил*** $(\vec F_1,\vec F_2,\ldots,\vec F_n)$ ***є замкнутим*** (рис.3.5), остання виражає умову рівноваги системи збіжних сил у графічній формі. Умови рівноваги системи збіжних сил у проекціях на координатні осі:

$$R_x=F_{1x}+F_{2x}+\ldots+F_{nx}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}=0;\ R_y=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}=0;\ R_z=\sum_{i=1}^{n}F_{iz}=0.$$

Ці умови називають аналітичними умовами рівноваги системи збіжних сил. Їх формулюють таким чином: ***для рівноваги***

просторової збіжної системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.
Одержані вирази дають змогу відповісти на питання, чи буде тіло перебувати в рівновазі під дією цієї системи збіжних сил.

3.5. Загальні умови розв'язання задач статики

У більшості задач тіло перебуває в рівновазі під дією заданої системи активних сил і в'язей, а реакції в'язей є невідомими. *Для системи збіжних сил у загальному випадку* можна записати ***три скалярних рівняння рівноваги***, тобто ***число невідомих параметрів реакцій в'язей повинно бути не більше трьох*** (у плоскій системі збіжних сил – не більше двох). Якщо число рівнянь рівноваги дорівнює числу невідомих реакцій в'язей, то така задача ***статично визначена***. Якщо число параметрів більше від числа рівнянь рівноваги, то такі задачі називаються ***статично невизначеними***. Під час розв'язання задач потрібно дотримуватися такої послідовності:

1. Виписавши вихідні дані, визначити об'єкт дослідження, тобто тіло (точку), рівновагу якого слід розглянути в задачі;
2. Зобразити (розставити) у вигляді векторів усі діючі на тіло (і тільки на це тіло) активні сили і реакції в'язей;
3. Звільнити від в'язей вибране тіло і замінити їх дію реакціями в'язей. Звільнене від в'язей тіло з прикладеною до нього системою активних сил і реакцій слід зображати окремо;
4. Розглянути рівновагу твердого тіла як вільного з урахуванням активних сил і реакцій в'язей;
5. Вибрати координатні осі та скласти рівняння, які б виражали умови рівноваги тіла. Визначити невідомі величини.

Рівняння рівноваги складають при аналітичному методі розв'язування задач на рівновагу системи збіжних сил. Проте, якщо число збіжних сил, рівновагу яких розглядають, дорівнює трьом, то зручно застосувати геометричний метод розв'язування цих задач, тобто замість рівнянь рівноваги всіх діючих сил (активних і реакцій в'язей) будують силовий трикутник, який на основі повинен бути замкнутий. Побудову силового трикутника починають із відомої сили, а далі за відомими елементами знаходять невідомі величини. Коли кількість сил, що утворюють збіжну систему, перевищує три, умову рівноваги доцільніше використовувати в аналітичній формі. Під час розв'язування задач на рівновагу збіжної плоскої системи сил аналітичним методом за початок координат звичайно вибирають точку, у якій збігається система сил.

Контрольні запитання

1. Що називають проекцією сили на площину?
2. За яких умов проекція сили на вісь є додатною, від'ємною або дорівнює нулю?
3. Запишіть формулу для визначення модуля сили $\vec{F}$ за її проекціями на координатні осі.
4. Запишіть формули для визначення напрямних косинусів кутів, які сила $\vec{F}$ складає з координатними осями.
5. Що називають центром системи збіжних сил?
6. Чому дорівнює проекція векторної суми на вісь?
7. Запишіть вирази для модуля рівнодійної R системи збіжних сил.
8. Запишіть вирази для визначення величини напрямних косинусів, які задають напрям рівнодійної R системи збіжних сил.
9. Запишіть рівняння рівноваги просторової системи збіжних сил.
10. Запишіть рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил.
11. Які задачі називають статично визначеними?
12. У чому полягає графічний метод розв'язування статично визначених задач?

4. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ Й ОСІ

4.1. Момент сили відносно точки

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки 0 називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з центра 0 в точку прикладення сили, на вектор сили $\vec{F}$ (рис. 4.1):

$$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} . \qquad (4.1)$$

Модуль моменту сили:

$$M = rF\sin\measuredangle(\vec{r},\vec{F}) = rF\sin\alpha; \; [M_o] = [r]\cdot\;[F] = 1м\cdot\;1H = 1Hм. \qquad (4.2)$$

сили $\vec{F}$, називається ***плечем сили*** $\vec{F}$ ***відносно центра*** *0*.

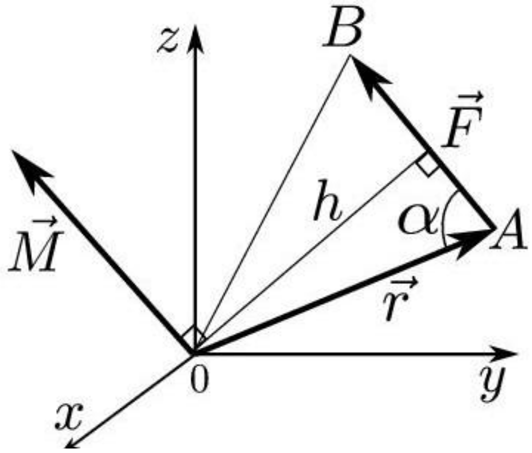


Рис. 4.1

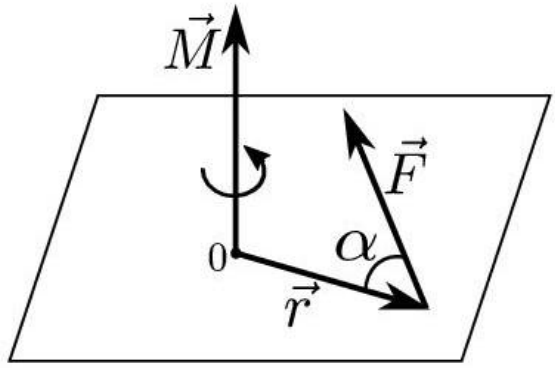


Рис. 4.2

Тоді модуль моменту сили (4.2) записують у вигляді:

$$|\vec{M}(\vec{F})| = F \cdot h = 2S_{\Delta OAB}, \tag{4.3}$$

де $h = r\sin(180 - \alpha) = r\sin\alpha$.

Модуль моменту сили відносно центра дорівнює добутку сили на плече та направлений перпендикулярно площині, що проходить через точку і лінію дії сили, у той бік, звідки «обертання» тіла під дією сили відносно точки було б видно проти руху стрілки годинника (рис. 4.2). З рівнянь (4.1, 4.2) можна знайти проекції вектора $\vec{M}$ на осі. Векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F}$ дорівнює:

$$\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x),$$

де ***моменти сили відносно координатних осей*** на осі координат:

$$M_x = yF_z - zF_y; \quad M_y = zF_x - xF_z; \quad M_z = xF_y - yF_x. \tag{4.4}$$

Модуль і напрям (напрямні косинуси) моменту сили відносно центра визначають таким чином:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \qquad (4,5)$$

$$\cos\measuredangle(\vec{M},\vec{i}) = \frac{M_x}{M}; \qquad \cos\measuredangle(\vec{M},\vec{j}) = \frac{M_y}{M}; \qquad \cos\measuredangle(\vec{M},\vec{k}) = \frac{M_z}{M}. \tag{4.6}$$

З визначення моменту сили відносно точки випливає:

1) ***якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили***, то момент сили відносно точки не зміниться;

2) ***момент сили відносно точки дорівнює нулю***, якщо лінія дії сили проходить через цю точку, оскільки плече сили дорівнює нулю $(h = 0)$;

3) ***момент сили відносно точки***чисельно дорівнює подвійній площі трикутника *OAB* (рис. 4.1), тобто $M(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}$;

4) ***момент сили відносно точки є зв'язаним вектором***, оскільки момент сили відносно точки $O\;\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ не дорівнює моменту сили відносно точки $O_1\;\vec{M}_{o1}(\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}$ (площа трикутника *OAB* не дорівнює площі трикутника O_1AB) (рис. 4.3);

5) ***теорема Варіньйона***(про момент рівнодійної системи збіжних сил):момент рівнодійної збіжної системи сил відносно довільного центра дорівнює векторній сумі моментів складових сил відносно того самого центра:

$$\vec{M}_o(\vec{R}) = \vec{M}_o(\vec{F}_1) + \vec{M}_o(\vec{F}_2) + \ldots + \vec{M}_o(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_i). \qquad (4.7)$$

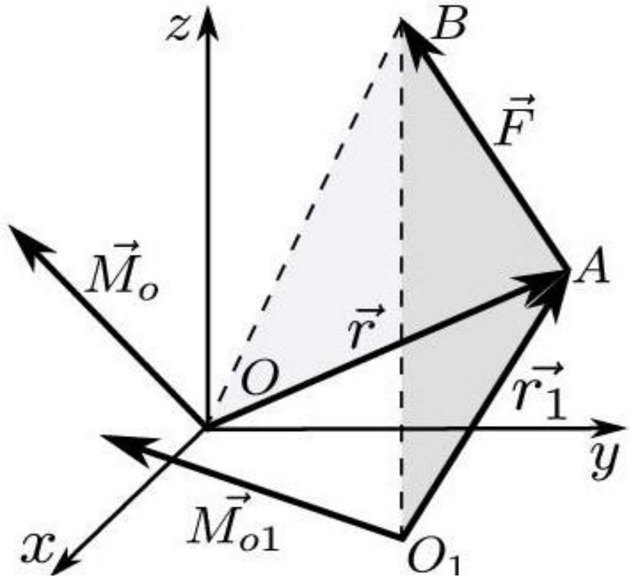


Рис. 4.3

Теорему узагальнюють на випадок будь-якої системи, що зводиться до рівнодійної. Якщо сили і точка *O*розміщені в одній площині, то їх моменти перпендикулярні до цієї площини і лежать на одній прямій.

4.2. Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називають проекцію на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки$M_{oz}(\vec{F})$, яка знаходиться на осі (рис. 4.4):

$$M_{oz}(\vec{F}) = M_o(\vec{F})\cos\gamma. \qquad (4.8)$$

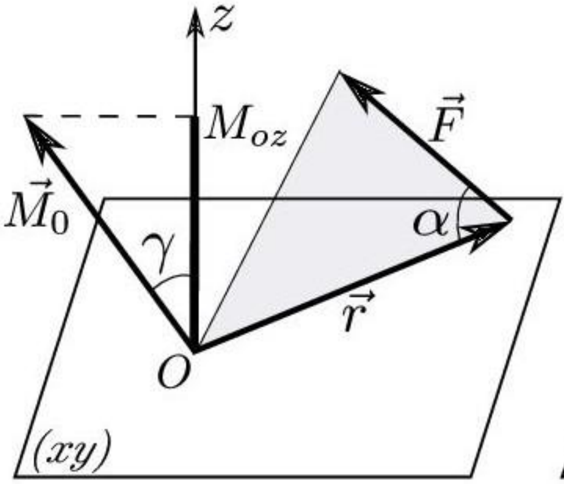


Рис. 4.4

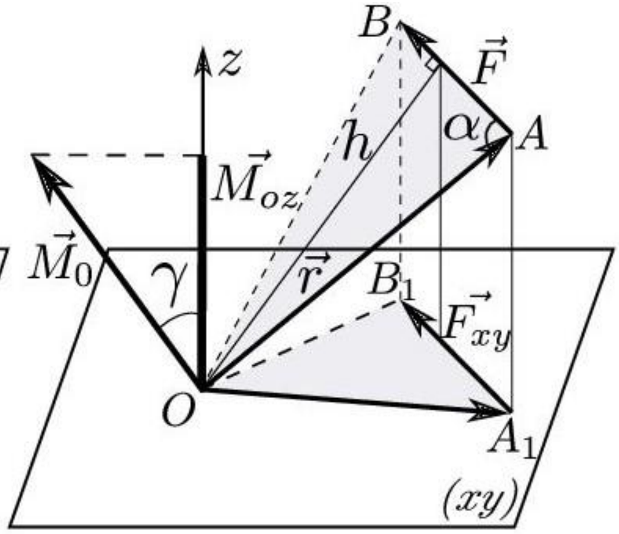


Рис. 4.5

Момент сили $\vec{F}$ відносно осі z – аналог сили в еквіваленті другого закону Ньютона $(\vec{F} = m\vec{a})$ для обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі: $\vec{M}_{oz}(\vec{F}) = J_z\vec{\varepsilon}$. З визначення випливає, що момент сили відносно координатних осей враховують за формулами (4.12 – 4.14). Із цих формул можна зробити висновок, що ***момент сили відносно осі не залежить від вибору точки на осі***. У разі розв'язування конкретних задач моменти сил відносно осей зручно визначати в такій послідовності:

1) провести через будь-яку точку *O* на осі z площину *xy*, перпендикулярну до осі z (рис. 4.5);

2) спроектувати силу $\vec{F}$ на площину – вектор $\vec{F}_{xy}$, початок і кінець якого збігається з проекціями початку і кінця вектора сили $\vec{F}(O\vec{A} = \vec{r},\, O\vec{A}_1 = \vec{r}_1)$;

3) визначити момент проекції $\vec{F}_{xy}$ сили $\vec{F}$ на цю площину відносно точки *O*:

$$M_{oz}(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h_1,\; M_{oz}(\vec{F}) = 2S_{\Delta OA_1B_1}. \qquad (4.9)$$

При цьому будуть виконані умови:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\cdot\vec{k}; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \qquad (4.10)$$

$$\vec{F}_{xy} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + 0\cdot\vec{k}; \quad \vec{r}' = x\vec{i} + y\vec{j} + 0\cdot\vec{k}. \qquad (4.11)$$

Використовуючи формули (4.4) –(4.6), визначимо моменти сили $\vec{F}$ відносно осей *Z,X,Y*:

$$\vec{M}_{oz}(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}_{xy}) = \vec{r} \times \vec{F}_{xy} = (xF_y - yF_x)\vec{k}; \qquad (4.12)$$

$$\vec{M}_{ox}(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}_{yz}) = \vec{r} \times \vec{F}_{yz} = (xF_z - yF_y)\vec{k}; \qquad (4.13)$$

$$\vec{M}_{oy}(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{F}_{zx}) = \vec{r} \times \vec{F}_{zx} = (xF_x - yF_z)\vec{k}. \qquad (4.14)$$

Момент сили відносно осі вважають додатним*, якщо при погляді з додатного кінця осі сила намагається обертати тіло відносно осі проти руху стрілки годинника, в іншому випадку момент вважають від'ємним.* Якщо момент додатний, то він відображається відрізком, направленим вгору по осі z від точки *0*, а якщо він від'ємний – то вниз. ***Момент сили відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:***

1) ***лінія дії сили паралельна осі чи збігається з нею***, тобто проекція сили на площину, яка перпендикулярна осі, дорівнює нулю ($\vec{F}_{xy} = 0$);

2) ***лінія дії сили перетинає вісь***, тобто плече проекції сили на площину, яка перпендикулярна осі, дорівнює нулю $(h = 0)$. Отже, ***момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині***. Порівнявши одержані формули (4.12) і (4.14) з виразом для моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O(4.8), можна записати:

$$M_{ox}(\vec{F})\vec{i} = \vec{M}_x(\vec{F});\ M_{oy}(\vec{F})\vec{j} = \vec{M}_y(\vec{F});\ M_{oz}(\vec{F})\vec{k} = \vec{M}_z(\vec{F}), \quad (4.15)$$

тобто *момент сили відносно точки є сумою моментів цієї сили відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, проведених через цю точку*.

4.3. Залежність між моментами відносно точки та відносно осі, яка проходить через цю точку

Нехай задані сила $\vec{F}$ і точка *O*, яка лежить на осі z (рис. 4.7). ***Момент сили*** $\vec{M}_0(\vec{F})$ ***відносно точки*** *O*, яку взято на перетині осі z з перпендикулярною площиною xy (рис. 4.7), направлений перпендикулярно площині трикутника *OAB*.

Його модуль $M_o(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}$. Для будь-якої іншої точки O_1 на осі z: $M_{o1}(\vec{F}) = 2S_{\Delta O_1AB}$, причому векторний момент $\vec{M}_{o1}(\vec{F})$ направлений перпендикулярно площині трикутника O_1AB.

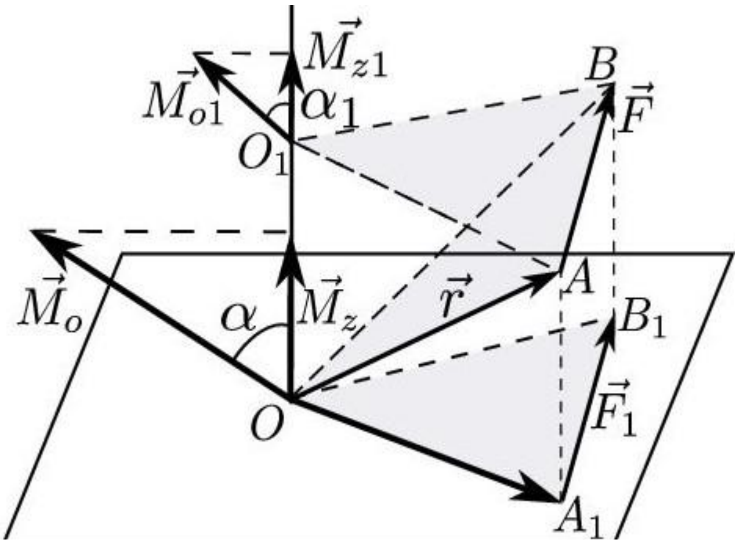


Рис. 4.7

Момент сили $\vec{M}_{oz}(\vec{F})$ ***відносно осі*** z направлений уздовж осі z, а його модуль: $M_{oz}(\vec{F}) = 2S_{\Delta OA_1B_1}$. Трикутник OA_1B_1 є проекцією трикутника OAB і O_1AB на площину xy. З геометрії відомо, що площа проекції плоскої фігури дорівнює площі проектованої фігури, помноженої на косинус кута між площинами, у яких розташовані ці фігури. Кут між ними вимірюють кутом між перпендикулярами до цих площин.Перпендикуляром до площини трикутника OA_1B_1 є вісь z, а перпендикулярами до площин трикутників OAB і O_1AB – відповідні векторні моменти $\vec{M}_o(\vec{F})$ і $\vec{M}_{o1}(\vec{F})$. Таким чином, $S_{\Delta OA_1B_1} = S_{\Delta OAB}\cos\alpha,$ де $\alpha -$ кут між вектором $\vec{M}_o(\vec{F})$ і віссю z.

Звідси маємо: $M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F})\cos\alpha = M_{oz}(\vec{F})$.

Аналогічно, $S_{\Delta OA_1B_1} = S_{\Delta O_1AB}\cos\alpha,$ де $\alpha -$ кут між вектором $\vec{M}_{o1}(\vec{F})$ і віссю z. ***Звідси***: $M_{oz}(\vec{F}) = M_{o1}(\vec{F})\cos\alpha_1 = M_{o1z}(\vec{F})$, де $o_1 -$ будь-яка точка на осі z. Таким чином, ***момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь векторного моменту сили відносно будь-якої точки на цій осі.***Момент сили відносно осі є скалярною величиною, як і будь-яка проекція векторана вісь. Якщо сила розташована в площині, перпендикулярній до осі, то:

$$\cos\alpha = \pm 1; \text{ і } M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}).$$

Контрольні запитання

1. Що називають моментом сили $\vec{F}$ відносно точки центра?
2. Запишіть формулу для визначення модуля моменту сили відносно точки та поясніть його розмірність.
3. Що називають плечем сили відносно центра?
4. Чому дорівнює момент сили відносно точки?
7. Запишіть аналітичні вирази проекцій на координатні осі моменту сили $\vec{F}$ відносно центра O.
8. Запишіть формулу для визначення модуля моменту сили $\vec{F}$ через значення його проекцій на координатні осі.
9. Запишіть формули для знаходження напрямних косинусів моменту сили $\vec{F}$ через значення його проекцій на координатні осі.
10. Чому момент сили відносно центра не зміниться,якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили?
11. За яких умов момент сили відносно точки дорівнює нулю?
12. Чому момент сили відносно точки дорівнює подвійній площі трикутника, який утворює вектор сили та її радіус-вектор?
13. Поясніть, чому момент сили відносно точки є зв'язаним вектором.
14. Сформулюйте і доведіть теорему Варіньйона.
15. За яких умов момент рівнодійної системи сил дорівнюєалгебраїчній сумі моментів складових сил відносно центра?
16. Що називають моментом сили відносно осі?
17. Поясніть, чому момент сили відносно осі не зміниться при переміщенні точки прикладання сили вздовж лінії її дії.
19. За яким правилом визначають знак (додатний або від'ємний) моменту сили відносно осі?
20. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю (сила не може обертати тіло навколо осі)?
21. Чому момент сили відносно точки є сумою моментів цієї сили відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, проведених через цю точку?
22. Яка залежність існує між моментами сили відносно точки та відносно осі, що проходить через цю точку?

5. *ПАРА СИЛ*

5.1. *Пара сил. Момент пари сил*

Дві паралельні сили, рівні за модулем, але протилежно направлені, являють собою неврівноважену систему, яку не можна замінити однією силою. ***Парою сил, прикладеною до твердого тіла, називають систему двох рівних за величиною паралельних між собою сил*** $(\vec{F};\vec{F}')$***, які направлені в протилежні боки уздовж незбіжних ліній дії (рис. 5.1, 5.2). Момент пари сил чисельно дорівнює добутку модуля сили на відстань між лініями дії сил.***

Плечем пари називають найкоротшу відстань a між лініями дії сил пари. Площину (*N*), у якій розміщені сили пари, називають площиною дії пари або площиною пари.*Пара сил не має рівнодійної, оскільки лінії дії цих сил не проходять через одну точку*. З аксіоми І випливає, що система сил пари не перебуває в рівновазі.

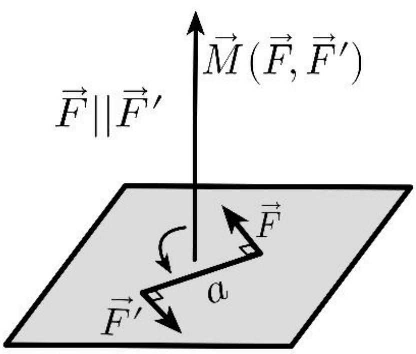


Рис. 5.1

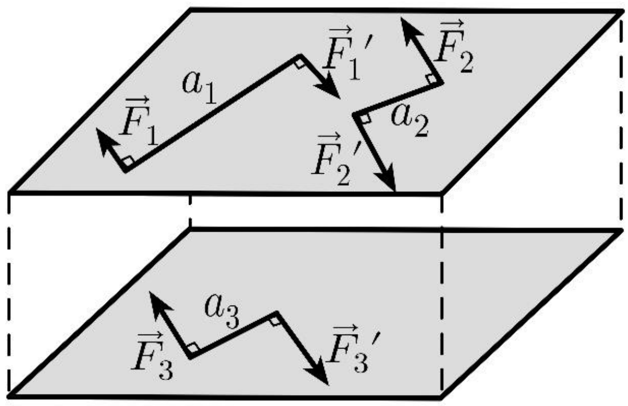


Рис. 5.2

Установлено, що пара сил, які діють на тверде тіло, намагається надати йому обертання. Дійсно, ***момент пари дорівнює сумі моментів двох сил***: $\vec{M}_o(\vec{F};\vec{F}') = \vec{M}_o(\vec{F}) + \vec{M}_o(\vec{F}')$.

Модуль моменту пари сил дорівнює добутку сили на відстань між лініями дії сил: $M_o(\vec{F};\vec{F}') = F \cdot a$. Момент пари направлений перпендикулярно до площини пари. Момент вважають позитивним, якщо він розвертає тіло за стрілкою годинника. За одиницю виміру модуля моменту пари сил, як і моменту сили відносно центра, прийнято ньютон на метр (*Нм*).

5.2. *Властивості пар сил*

1. Не змінюючи дії пари на абсолютно тверде тіло, її можна переносити і довільно повертати в площині дії, змінюючи величину сили, яка входить в цю пару, і довжину плеча так, щоб момент пари залишався незмінним (див. рис.5.2).

2. Пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині дії цієї пари(див. рис.5.2).

3. Довільно розміщену в просторі систему пар сил можна замінити однією рівнодіючою парою, момент якої дорівнює векторній сумі моментів складових пар:

$$\vec{M}(\vec{R},\vec{R}') = \vec{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2,\vec{F}_2') + \ldots + \vec{M}(\vec{F}_{n,}\vec{F}_n'). \qquad (5.1)$$

4. Для рівноваги пар необхідно і достатньо, щоб векторна сума моментів пар системи дорівнювала нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \vec{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2,\vec{F}_2') + \ldots + \vec{M}(\vec{F}_{n,}\vec{F}_n') = 0. \qquad (5.2)$$

У проекціях на три взаємно перпендикулярні осі:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ix} = 0;\ \sum_{i=1}^{n} m_{iy} = 0;\ \sum_{i=1}^{n} m_{iz} = 0. \qquad (5.3)$$

Якщо система пар сил розміщена в одній площині, то модуль результуючої пари буде дорівнювати алгебраїчній сумі модулів моментів пар сил, що утворюють цю систему:

$$M(\vec{R},\vec{R}') = M(\vec{F}_1,\vec{F}_1') + M(\vec{F}_2,\vec{F}_2') + \ldots + M(\vec{F}_{n,}\vec{F}_n'). \qquad (5.4)$$

Таким чином, для ***рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині (або в паралельних площинах), необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій моментів цих пар сил на вісь, перпендикулярну цій площині (площинам), дорівнювали нулю***.

Зауважимо, що механічна дія (вплив) у статиці абсолютно твердого тіла характеризується трьома типами векторів:

1) силою – ковзним вектором;

2) моментом сили відносно точки – прикладеним, або зв’язаним вектором;

3) моментом пари сил – вільним вектором.

Момент пари є повною характеристикою механічної дії пари сил на абсолютно тверде тіло, а дії над парами сил можна замінити еквівалентними векторними операціями над їх моментами. При цьому, оскільки обертальна дія пари сил залежить тільки від її моменту, то для задання пари іноді достатньо вказувати лише числове значення її моменту.

Контрольні запитання

1. Що називають парою сил, прикладеною до твердого тіла?
2. Що називають площиною дії пари сил, плечем пари сил?
3. Поясніть, чому система сил пари не перебуває в рівновазі?
4. Що намагається зробити з тілом прикладена до нього пара сил?
5. Що називають моментом пари сил $M_0(\vec{F};\vec{F}')$?
6. Запишіть формулу вектора моменту пари сил.
7. Запишіть формулу для визначення модуля моменту пари сил.
8. У яких одиницях вимірюють модуль моменту пари сил?
9. Чому момент пари сил є вільним вектором?
10. Чому момент пари сил є повною характеристикою механічної дії пари на тверде тіло?
11. Чому дії над парами сил можна замінити еквівалентними операціями над їх моментами?
12. Сформулюйте правило складання пар сил.
13. Як визначають модуль результуючої пари системи пар сил, що розміщені в одній площині або в паралельних площинах?
14. Запишіть рівняннями рівноваги системи пар сил.
15. Сформулюйте основні властивості пар сил.
16. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.

6. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

6.1. Паралельне перенесення сил

Лема: не змінюючи статичного стану твердого тіла, прикладену до цього тіла силу можна перенести у будь-яку його точку, паралельно самій собі, прикладаючи при цьому пару, момент якої дорівнює моменту цієї сили відносно нової точки прикладення.

Нехай у точці A прикладено силу $\vec{F}$ (рис. 6.1). Прикладемо тепер у точці B тіла систему двох сил $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$, еквівалентну нулю, причому $|\vec{F}'| = |\vec{F}''| = |\vec{F}|$ (рис. 6.2).Виникає система, яка складається із сили $\vec{F}'$ і пари сил $(F, \vec{F}'')$ з моментом m. Одержану таким чином пару сил (рис. 6.3) називають приєднаною парою сил.

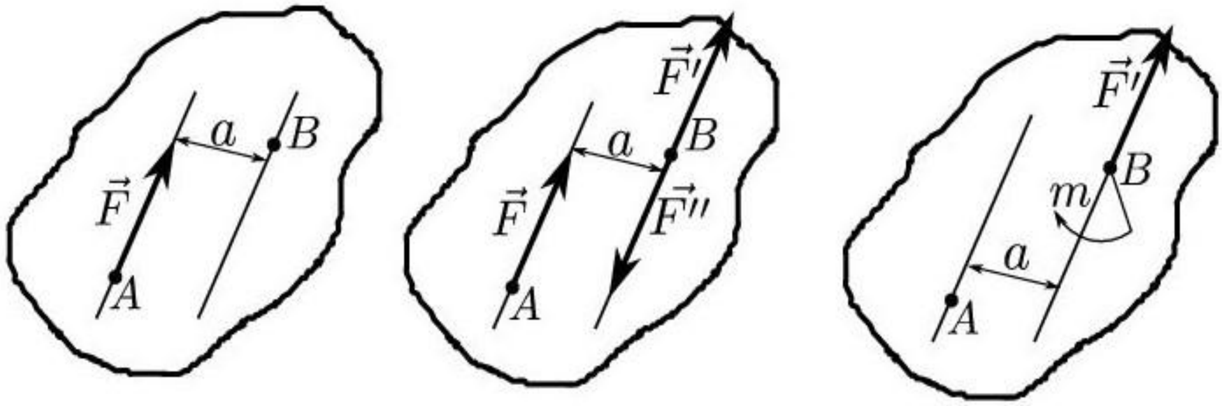


Рис. 6.1 Рис.6. 2 Рис. 6.3

***Теорема Пуансо**: довільну систему сил, які діють на тверде тіло, можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, прикладеної в довільно вибраній точці тіла (центрі зведення) і рівної головному вектору цієї системи сил, та однієї пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно вибраного центра зведення.*

Якщо лінії дії довільної системи сил не пересікаються в одній точці, то всі сили системи можна перенести в одну довільно вибрану точку – точку зведення. При переносі сили в точку, що не лежить на лінії її дії, за теоремою Пуансо додають приєднану пару сил m(див. рис. 6.3), а пучок сил у точці зведення замінюють головним вектором системи. Пари сил, що з'явилися, замінюють головним моментом системи.

6.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

***Теорема**. Для того, щоб довільна просторова система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ перебувала в рівновазі, необхідно і достатньо, щоб головний вектор $\vec{F}_0$ і головний момент $\vec{M}_0$ системи відносно довільного центра зведення дорівнювали нулю*. Умови рівноваги:

$$\vec{F}_o = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0; \qquad (6.1)$$

$$\vec{M}_o = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \ldots + M_o(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} M_o(\vec{F}_i) = 0. \qquad (6.2)$$

Умови рівноваги довільної просторової системи сил у проекціях:

$$F_{ox} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad M_{ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}(\vec{F}_i) = 0; \qquad (6.3)$$

$$F_{oy} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad M_{oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy}(\vec{F}_i) = 0; \qquad (6.4)$$

$$F_{oz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \qquad M_{oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}(\vec{F}_i) = 0. \qquad (6.5)$$

6.3. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Нехай усі сили системи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$, яка діє на тверде тіло, паралельні між собою, а вісь z паралельна цим силам. Тоді умови рівноваги мають вигляд:

$$F_{oz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \qquad (6.6)$$

$$M_{ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}(\vec{F}_i) = 0; \qquad (6.7)$$

$$M_{oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy}(\vec{F}_i) = 0. \qquad (6.8)$$

6.4. Умови рівноваги довільної системи сил на площині

6.4.1. Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекції всіх сил на координатні осі, які лежать в площині дії цих сил, дорівнювали нулю й алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювала нулю:

$$F_{ox} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad M_{oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}(\vec{F}_i) = 0. \qquad (6.9)$$

$$F_{oy} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad (6.10)$$

6.4.2.Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно будь-яких трьох точок площини, які не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + ... + M_A(\vec{F}_n) = 0. \quad (6.11)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + ... + M_B(\vec{F}_n) = 0; \quad (6.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_C(\vec{F}_i) = M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) + ... + M_C(\vec{F}_n) = 0. \quad (6.13)$$

6.4.3.Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо щоб дорівнювали нулю алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно двох будь-яких точок, які лежать у цій площині, а також алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісьU, що не перпендикулярна до прямої, яка проходить через ці дві вибрані точки:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + ... + M_A(\vec{F}_n) = 0. \quad (6.14)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F}_i) = M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + ... + M_B(\vec{F}_n) = 0; \quad (6.15)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iU} = F_{1U} + F_{2U} + ... + F_{nU} = \sum_{i=1}^{n} F_{iU} = 0. \quad (6.16)$$

6.5. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вісь, яка лежить у площині дії цих сил і паралельна ним, дорівнювала нулю й алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювала нулю:

$$F_{oy} = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad (6.17)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + ... + M_A(\vec{F}_n) = 0. \quad (6.18)$$

Контрольні запитання

1. Що називають приєднаною парою сил?

2. Запишіть умови рівноваги довільної просторової системи сил $(\vec{F}_{1,}\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$ у векторній формі.
3. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі.
4. Запишіть рівняння рівноваги просторової системи паралельних сил $(\vec{F}_{1,}\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$.
5. Запишіть рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил $(\vec{F}_{1,}\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$ через суми проекцій усіх сил на координатні осі, які лежать в площині дії цих сил.
6. Запишіть рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил через суми моментів усіх сил відносно будь-яких трьох точок площини, які не лежать на одній прямій.
7. Запишіть рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил $(\vec{F}_{1,}\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$ через суму проекцій усіх сил на вісь, яка лежить в площині дії цих сил і паралельна їм, та суму моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини.
8. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи пар сил $(\vec{F}_1,\vec{F}_1'),(\vec{F}_2,\vec{F}_2'),...,(\vec{F}_n,\vec{F}_n')$ у векторній формі.
9. Сформулюйте умову та запишіть рівняння рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині, у паралельних площинах.

7. *БАЛКОВІ СИСТЕМИ*

7.1. Балкові системи та їх види

Балкою називають деталь, яка зроблена з прямого бруса з опорами у двох (чи більше) точках і несе прямоосьове навантаження. Балкові системи застосовують у машинах і спорудах.

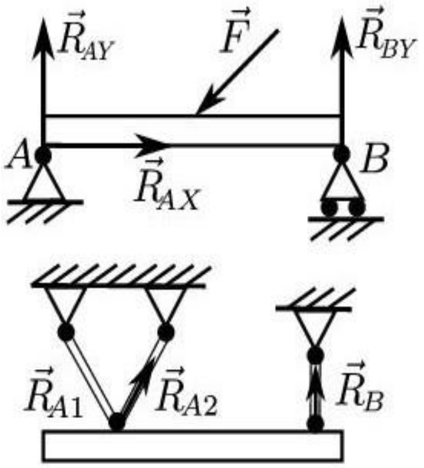
Види кріплень балок та напрями реакцій в'язей:

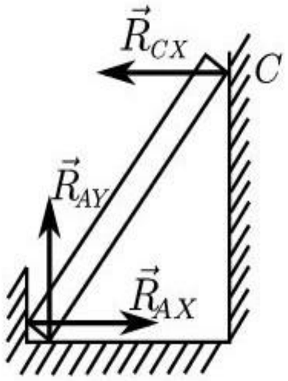
1) балка має дві опори – шарнірно-нерухому і шарнірно-рухому – або три непаралельні шарнірно прикріплені стрижні

(рис. 7.1);

2) балка спирається на три гладенькі поверхні, одна з яких має упор (рис. 7.2);

3) балка жорстко закріплена в стіні або затиснена спеціальним пристроєм (рис. 7.3).





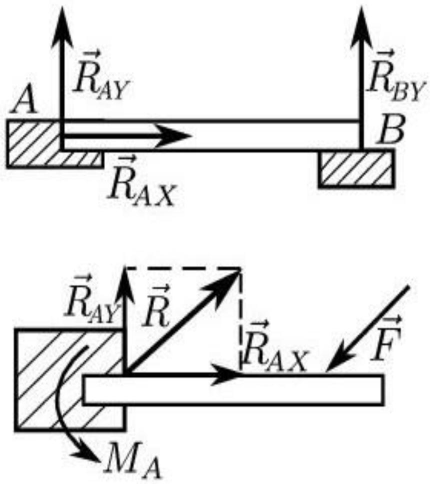


Рис. 7.1 Рис. 7.2 Рис. 7.3

7.2. Види навантажень балкових систем

Навантаженнями називають зовнішні сили, які діють на елементи конструкцій чи деталі машин і споруд під час їх експлуатації.

За часом дії навантаження бувають:

1) ***постійні***, які діють завжди;

2) ***тимчасові***, що діють протягом обмеженого періоду часу.

Змінне навантаження – навантаження, яке змінюється з часом. ***Залежно від характеру прикладання сил у часі розрізняють***:

1) ***статичні навантаження***, які відносно повільно й плавно зростають від нуля до свого граничного значення, а далі залишаються незначно змінними. Прискорення елементів конструкції та сили інерції відсутні або настільки малі, що ними можна знехтувати;

2) ***динамічні навантаження*** – навантаження, які змінюють свою величину за малий час. При цьому виникають сили інерції та значні прискорення, якими не можна нехтувати. Динамічні навантаження поділяють на:

а) ***миттєво прикладені***, які зростають від нуля до свого граничного значення за дуже малий проміжок часу (частки секунди);

б) ***ударні навантаження***, для яких характерне те, що в мить їх прикладання тіло, яке спричинює навантаження, має певну кінетичну енергію;

в) ***повторно-змінні навантаження***, які безперервно й періодично змінюються в часі. Вони, як правило, пов’язані з рухами деталей, що циклічно змінюються.

За характером прикладання навантаження поділяють на:

1) ***зосереджені*** (рис. 7.4) – такі зовнішні сили, що передаються на елемент конструкції через нескінченно малі площини (прикладені до тіла в певній точці);

2) ***розподілені*** (рис. 7.5–7.9) – такі зовнішні сили, що діють на одиницю об’єму, площі або довжини конструкції. Навантаження можуть бути рівномірно розподілені за довжиною, площею чи об’ємом.

Навантаження характеризуються ***інтенсивністю*** – силою, що припадає на одиницю об’єму $(\vec{\gamma})$, площі поверхні $(\vec{p})$ чи довжини лінії $(\vec{q})$ відповідно. Будь-яке реальне навантаження прикладено до певної ділянки тіла. В основному бувають ***паралельні*** та ***збіжні розподілені навантаження***.

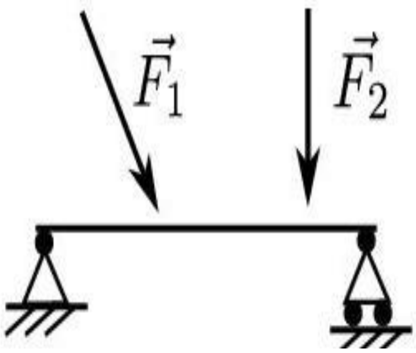


Рис. 7.4

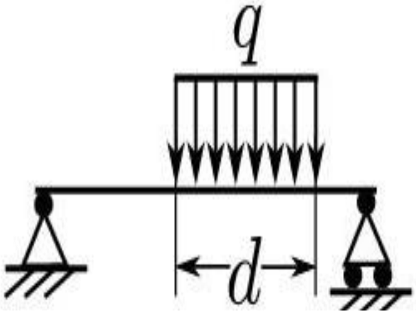


Рис. 7.5

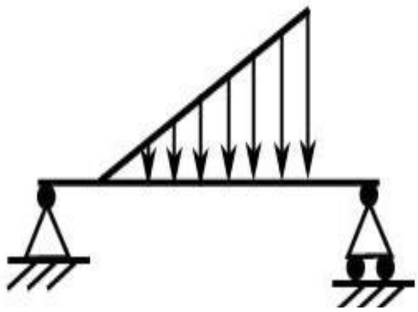


Рис. 7.6

Паралельне навантаження, прикладене під прямим кутом до елемента споруди або деталі машини, може бути перетворено на зосереджене:

а) за довжиною $Q = q \cdot \ell,\ [q] = Н/м;$ (7.1)

б) за площею $P = pS,\ [p] = Н/м^2;$ (7.2)

в) за об’ємом $G = \gamma V,\ [\gamma] = Н/м^3.$ (7.3)

Поверхневі сили можуть бути неперервно розподілені по всій поверхні тіла або її частині. Навантаження, що припадає на одиницю площі $p = P/S$, називають інтенсивністю поверхневого навантаження (рис. 7.8). Її виражають у паскалях (Па) або кратних одиницях (кПа, МПа, ГПа).

Розподілене по поверхні навантаження зводять до головної площини (рис. 7.8), унаслідок чого створюється ***навантаження, розподілене по лінії***. Інтенсивністю такого навантаження $q = pb$ називають навантаження, що припадає на одиницю довжини лінії $(Q = q\ell = pb\ell)$. Характер зміни лінійно розподіленого навантаження зображують у ***вигляді епюри*** (***графіка***) залежності q від ℓ. У разі рівномірно розподіленого навантаження по довжині (рис. 7.5–7.8) епюра q прямокутна. При дії гідростатичного тиску епюра навантаження q трикутна (рис. 7.9).

Рівнодійна сила R, ***розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі його епюри і прикладена в центрі її тяжіння*** C.

Перетворення ***нерівномірно розподіленого навантаження*** на зосереджене має більш складний алгоритм. Розглянемо паралельні сили, розподілені перпендикулярно по відрізку AB прямої довжиною ℓ з інтенсивністю q_i, що змінюється за лінійним законом (трикутником) (рис. 7.7).

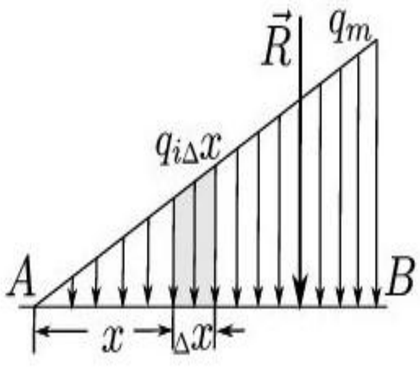


Рис. 7.7

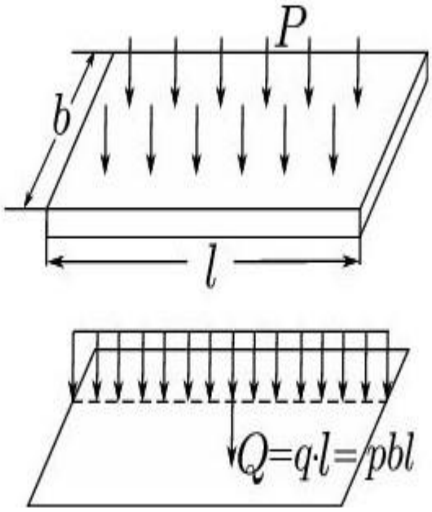


Рис. 7.8

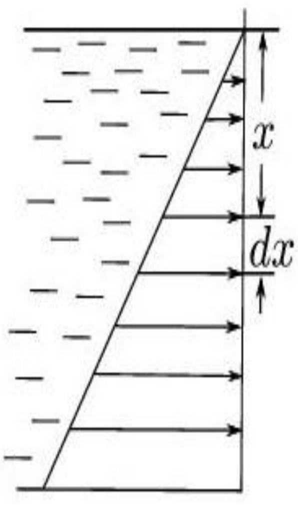


Рис. 7.9

Найбільша інтенсивність сили становить $q_м$. Замінимо розподілені сили зосередженими. Для цього відрізок AB розіб’ємо на елементарні відрізки довжиною Δx_i. На кожен такий відрізок діє сила $q_i \Delta x_i$, яку при достатньо малих розмірах відрізка Δx_i можна вважати зосередженою силою.

Для того, щоб замінити одержану таким чином систему зосереджених паралельних сил однією рівнодіючою силою R, необхідно провести їх додавання. Найпростіше це можна зробити шляхом інтегрування:

$$R = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} q_i \Delta x_i = \int_0^{\ell} q dx. \qquad (7.4)$$

Якщо x відраховувати від точки А, то з подібності трикутників

маємо: $$\frac{q}{x} = \frac{q_м}{\ell},\ q = \frac{q_м}{\ell} x. \qquad (7.5)$$

Підставляючи замість q під інтеграл його значення, одержимо:

$$R = \int_0^{\ell} \frac{q_м}{\ell} x dx = \frac{q_м}{\ell} \frac{\ell^2}{2} = \frac{q_м \ell}{2}. \qquad (7.6)$$

Точку прикладання рівнодійної C можна визначити, обрахувавши момент елементарних зосереджених сил $(\vec{q}_i \Delta x_i)$, наприклад, відносно точки A, та застосувавши потім теорему Варіньйона про момент рівнодіючої сили:

$$R \cdot AC = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i q_i \Delta x_i = \int_0^{\ell} qx dx = \int_0^{\ell} \frac{q_м}{\ell} x^2 dx = \frac{q_м}{\ell} \frac{\ell^3}{3} = \frac{q_м \ell^2}{3}. \qquad (7.7)$$

Відстань до точки прикладання рівнодіючої сили R:

$$AC = \frac{q_м \ell^2}{3} \frac{1}{R} = \frac{q_м \ell^2}{3} \frac{2}{q_м \ell} = \frac{2}{3} \ell. \qquad (7.8)$$

Точка C прикладання рівнодіючої сили збігається з центром тяжіння площі трикутника, що знаходиться в точці перетину медіан, яка розташована від основи трикутника на відстані 2/3 від його вершини A, тобто $AC = \ell \cdot 2/3$.

Жорстке защемлення

Опора не допускає переміщень і поворотів. Защемлення замінюють складовими сили і парою моментів R_{Ax}, R_{Ay} і M_R. Для визначення цих невідомих використовують рівняння:

$$\sum_0^n F_{ix} = 0;\ \sum_0^n F_{iy} = 0;\ \sum_0^n m_{iA} = 0.$$

Для контролю правильного розв'язання використовують додаткове рівняння моментів відносно будь-якої точки на балці: $\sum_{0}^{n} m_{iB} = 0.$

Шарнірно-рухома опора

Опора дозволяє поворот навколо шарніра і переміщення вздовж опорної поверхні. Реакція направлена перпендикулярно опорній поверхні.

Шарнірно-нерухома опора

Опора дозволяє поворот навколо шарніра і може бути замінена двома складовими сили вздовж осей координат.

Балка на двох шарнірних опорах

1. Невідомими є три сили (реакції), тому зручно використати рівняння в другій формі: $\sum_{0}^{n} m_{iA} = 0; \sum_{0}^{n} m_{iB} = 0; \sum_{0}^{n} F_{ix} = 0.$ Для контролю правильного розв'язання застосовують додаткове рівняння: $\sum_{0}^{n} F_{iy} = 0.$

2. Якщо три сили не лежать на одній прямій, то зручно використовувати систему рівнянь у третій формі:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^{n} m_B(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^{n} m_C(\vec{F}_i) = 0.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називають балкою?
2. Які види кріплень балок вам відомі?
3. Які сили називають навантаженнями?
4. На які види поділяють навантаження за характером дії?
5. Які навантаження називають зосередженими?
6. Чим розподілені навантаження відрізняються від зосереджених?
7. На які види поділяють розподілені навантаження?
8. На які види поділяють навантаження за часом дії?
9. Як рівномірно розподілене паралельне навантаження, прикладене під прямим кутом, може бути перетворене на зосереджене за довжиною?
10. Чи може рівномірно розподілене паралельне навантаження, прикладене під прямим кутом, бути перетворене на зосереджене

за площею та об’ємом?

11. Чому дорівнює і де прикладена рівнодійна паралельних сил, розподілених по відрізку прямої з інтенсивністю, що змінюється за лінійним законом?

7.3. Приклади розв’язання задач

Задача 1. Балку жорстко закладено в стіну на глибину h. До виступаючого кінця балки довжиною ℓ підвішено вантаж P. Нехтуючи вагою балки, визначити реакцію стіни.

Розв’язання

Прикладена до балки сила намагається повернути її так, що сила тиску балки на стіну в точці А направлена вниз, тому реакція стіни в цій точці ($\vec{R}_A$) направлена вертикально вгору. Сила тиску балки на стіну в точці В направлена вертикально вгору і, відповідно, реакція стіни в точці В ($\vec{R}_B$) направлена вертикально вниз (рис. 7.10).

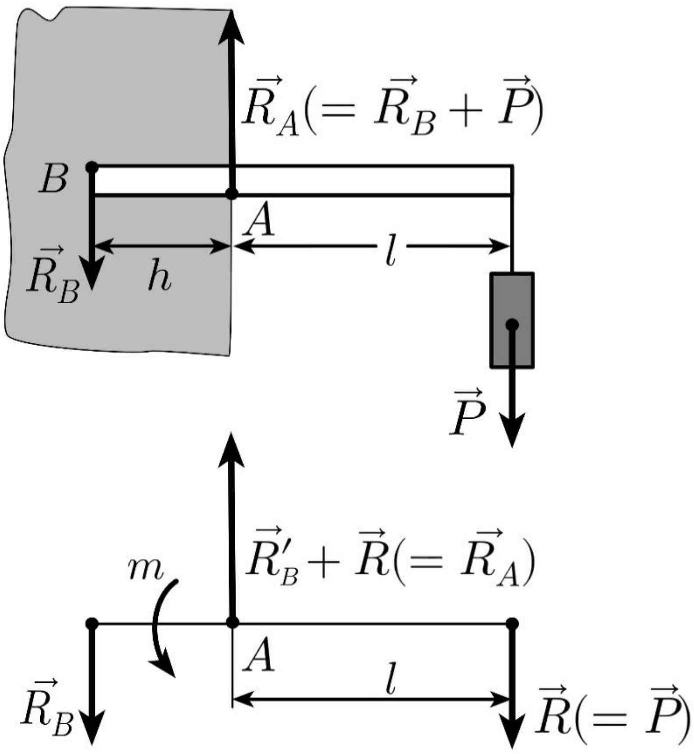


Рис. 7.10

Складемо рівняння рівноваги балки для плоскої системи сил:

$$\sum_0^n F_{iy} = R_A - R_B - P = 0; \quad \Rightarrow \quad R_A = R_B + P;$$

$$\sum_0^n m_{iB}(\vec{F}_i) = -R_A h + P(\ell + h) = 0; \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{P(\ell + h)}{h};$$

$$\sum_0^n m_{iA}(\vec{F}_i) = -R_B h + P\ell = 0; \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{P\ell}{h};$$

Задачу розв'язано, але знайденим реакціям стіни в місці закладання R_A і $\vec{R}_B$ можна надати іншу, більш зручну форму. Оскільки

$$R_A = \frac{P(\ell + h)}{h} = \frac{P\ell}{H} + P = R_B + P,$$

то реакцію можна розкласти на дві складові $R_A = R_B^{'} + P,$ направлені по лінії дії сили R_A в ту саму сторону і за модулем, який дорівнює: $R_B^{'} = R_B$ і $R = P$ (див. рис. 7.10).

Сили R_B і $R_B^{'}$ утворюють пару сил, яку прийнято називати реактивною парою, а момент цієї пари m– ***реактивним моментом***.Реактивний момент урівноважує обертальний ефект прикладеної до балки активної сили, тобто перешкоджає обертанню балки.

Задача 2 (жорстке защемлення). Плоска одноопорна (защемлена) балка навантажена зосередженими силами $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ і парою сил m. Визначити величини реакцій защемлення (рис.7.11).

Дані: $F_1 = 20$ *кН*; $F_2 = 8$ *кН*; $m = 12$ *кНм*; $a = 0,3$ *м.*

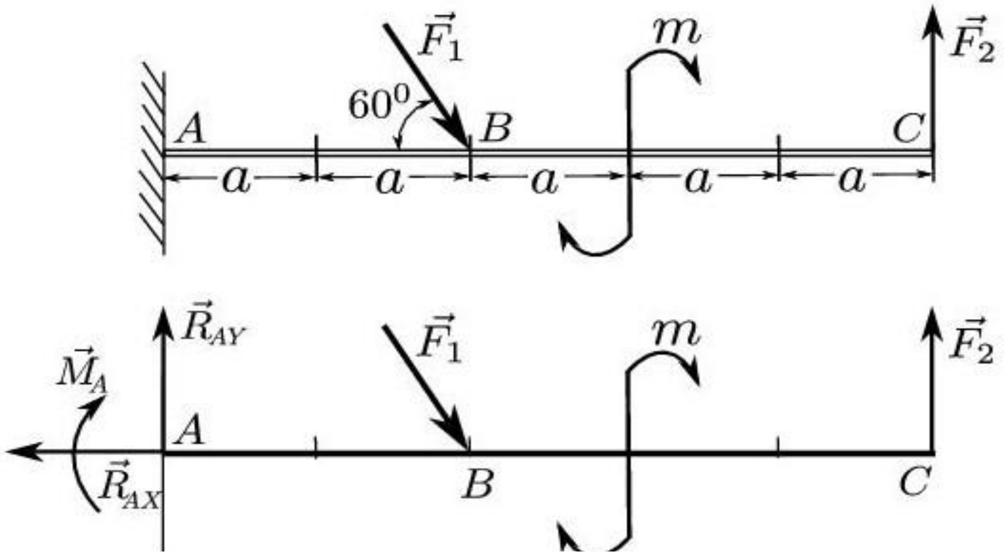


Рис. 7.11

Розв'язання

Защемлення (в'язь) замінюємо складовими сили R_{Ax}, R_{Ay} і моментом пари M_R. Для визначення цих невідомих запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_0^n F_{ix} = F_1 \cos 60^0 - R_{Ax} = 0; \quad \sum_0^n F_{iy} = F_2 - F_1 \sin 60^0 + R_{Ay} = 0;$$

$$F_1 \sin 60^0 \cdot 2a + m - F_2 \cdot 5a - M_A = 0.$$

Знайдемо невідомі величини:

$R_{Ax} = F_1 \cos 60^0 = 20 \cdot\ 0,5 = 10\ кН;$

$R_{Ay} = F_1 \sin 60^0 - F_2 = 20 \cdot\ 0,866 - 8 = 9,32\ кН.$

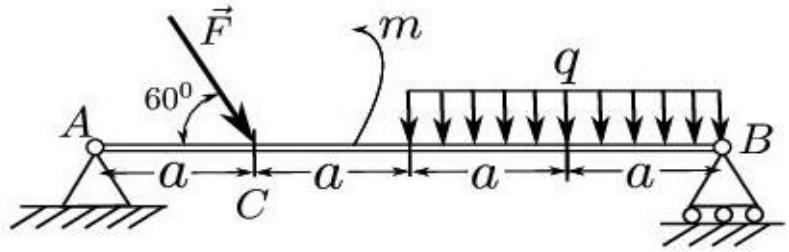
$M_A = F_1 \sin 60^0 2a + m - F_2 5a = 20 \cdot\ 0,866 \cdot\ 0,6 + 12 - 8 \cdot\ 1,5 = 10,392\ кНм.$

Перевірка розв'язання:

$$\sum_0^n m_{iB} = R_{Ay} \cdot 2a + m - F_2 \cdot 3a - M_A = 9,32 \cdot 0,6 + 12 - 8 \cdot 0,9 - 10,392 = 0.$$

Задача 3. Двохопорна балка з шарнірними опорами A і B навантажена зосередженою силою $\vec{F}$, розподіленим навантаженням і парою сил(рис. 7.12). Визначити величини реакцій в шарнірних опорах балки.

Дані: $F = 100\ кН;\ q = 4\ кН/м;\ m = 25\ кНм;\ a = 0,6 м.$



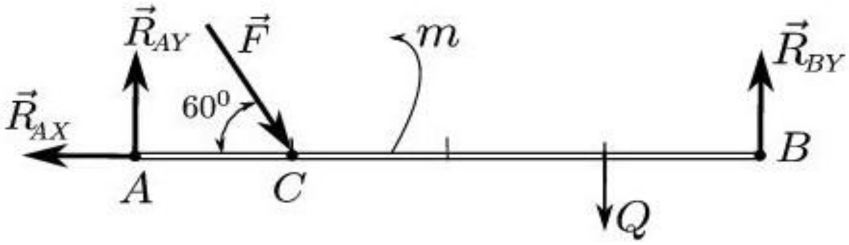


Рис. 7.12

Розв'язання

В'язі заміняємо складовими сили R_{Ax}, R_{Ay} і R_{By}. Для визначення цих реакцій запишемо рівняння рівноваги в другій формі:

$$\sum_0^n m_{iA} = F \sin 60^0 \cdot a - m + Q \cdot 3a - R_{By} \cdot 4a = 0;$$

$$\sum_0^n m_{iC} = R_{Ay} \cdot a - m + Q \cdot 2a - R_{By} \cdot 3a = 0; \ \sum_0^n F_{ix} = F_1 \cos 60^0 - R_{Ax} = 0.$$

Знайдемо невідомі величини:

$$\sum_0^n m_{iA} = 100 \cdot 0,866 \cdot 0,6 - 25 + 4,8 \cdot 3 \cdot 0,6 - R_{By} \cdot 4 \cdot 0,6 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{86,6 \cdot 0,6 - 25 + 4,8 \cdot 1,8}{4 \cdot 0,6} = 14,833 кН;$$

$$\sum_0^n m_{iC} = R_{Ay} \cdot 0,6 - 25 + 4 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 0,6 - R_{By} \cdot 0,6 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{m - Q \cdot 2a + R_{By} \cdot 3a}{a} = \frac{25 - 4,8 \cdot 1,2 + 14,833 \cdot 1,8}{0,6} = 76,566 кН.$$

Перевірка розв’язання:

$$\sum_0^n F_{iy} = R_{Ay} - F \sin 60^0 - Q + R_{By} = 76,566 - 86,6 - 4,8 + 14,833 = 0.$$

8.ЦЕНТР ТЯЖІННЯ

8.1. Центр тяжіння абсолютно твердого тіла

Сила тяжіння – рівнодіюча сил тяжіння всіх частин тіла до Землі. Сили тяжіння, прикладені до частин тіла, утворюють систему сил, лінії дії яких сходяться в центрі Землі. Розмірами тіла можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, тому з великим ступенем точності можна вважати, що сили тяжіння, які діють на окремі частини тіла, утворюють систему паралельних сил.

Зрозуміло, що в задачах небесної механіки про рух штучних супутників Землі, рух кораблів, літаків, ракет тощо сили тяжіння розглядають як центральні сили.

Розглянемо абсолютно тверде тіло, що складається з окремих частин, на які діють сили тяжіння $\vec{q}_1, \vec{q}_2, ..., \vec{q}_n,$ прикладені в різних точках (рис. 8.1). Ці сили можна вважати паралельними між собою.

Рівнодіюча $\vec{G}$ цієї системи паралельних сил тяжіння $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, ..., \vec{q}_n)$ дорівнює їх сумі $\vec{G} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + ... + \vec{q}_n$ і є силою тяжіння, що діє на все абсолютно тверде тіло, а центр цієї системи паралельних сил, у якому прикладена сила $\vec{G}$, називають ***центром тяжіння тіла*** C з координатами $(x_C,\ y_C,\ z_C)$.

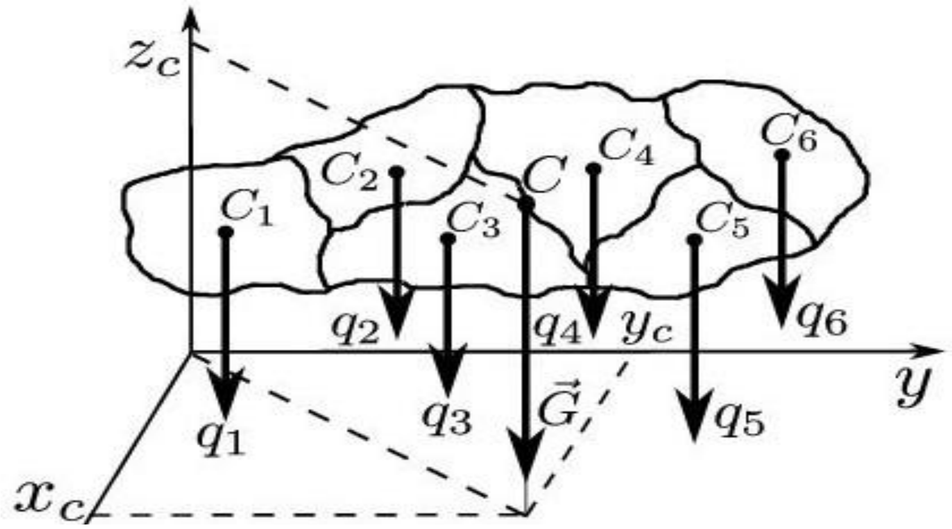


Рис. 8.1

У твердому тілі центр тяжіння займає певне положення, що не залежить від розміщення тіла в просторі. Для визначення точки прикладання сили тяжіння (рівнодійної паралельних сил) використаємо теорему Варіньйона про момент рівнодіючої.

Розглянемо тіло, складене з деяких частин у просторовій системі координат (див. рис. 8.1).Сили тяжіння частин q_i прикладені в центрах тяжіння (ЦТ) цих частин. Координати частин x_i, y_i, z_i. Координати центра тяжіння твердого тіла як центра паралельних сил такі:

$$M_x\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right) = Gy_C = \sum_{i=1}^{n} q_i y_i;\ y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i y_i}{G}; \tag{8.1}$$

$$M_y\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right) = Gx_C = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i;\ x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i x_i}{G}; \tag{8.2}$$

$$M_z\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right) = Gz_C = \sum_{i=1}^{n} q_i z_i;\ z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i x_i}{G}. \tag{8.3}$$

Визначимо положення центра тяжіння однорідного тіла об'ємом V і масою m, яке має постійну питому густину $\rho = const.$ Силу тяжіння, що діє на все однорідне тіло, визначають за формулою: $G = mg = \rho Vg = \gamma V,$ де $\gamma = \rho g -$ питома сила тяжіння (сила тяжіння, яка діє на одиницю об'єму однорідного тіла).

В однорідному тілі сила тяжіння пропорційна його об'єму:

$$G = \gamma V; \tag{8.4}$$

Силу тяжіння, що діє на окрему частину однорідного тіла масою $m_i = \rho V_i$ з координатами її центра $C_i(x_i, y_i, z_i)$, визначаємо за формулою:

$$q_i = m_i g = \rho V_i g = \gamma V_i, \tag{8.5}$$

де $V_i -$ об'єм цієї частини однорідного тіла. Тоді з формул (8.2), (8.3) одержуємо:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma V_i x_i}{\gamma V} = \frac{\sum_{i=1n} V_i x_i}{V}; \; y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i y_i}{V}; \; z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i x_i}{V}, \tag{8.6}$$

де $V_i -$ об'єм елемента тіла; $V -$ об'єм усього тіла.

8.2. Центр тяжіння однорідних плоских тіл (фігур)

Однорідне тіло, що має форму тонкої пластинки, можна розглядати як матеріальну плоску фігуру. Положення центра тяжіння C плоскої фігури визначаємо двома координатами. Для плоских тіл можна записати: $V = A \cdot h,$ де $A -$ площа фігури; $h -$ товщина. Розіб'ємо пластинку на скінченне число окремих фігур із площами A_i та координатами центра тяжіння x_i, y_i. Сила тяжіння, що діє на будь-яку окрему фігуру номер i визначається за формулою: $G_i = \gamma V_i = \gamma A_i h.$

Після підстановки отримаємо формули для координат центра тяжіння:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i h \cdot x_i}{Ah} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{A}; \; y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i h \cdot y_i}{Ah} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{A}; \; z_C = \frac{h}{2}, \tag{8.7}$$

де $A_i -$ площі частин перерізу; $x_i, y_i, z_i -$ координати центрів тяжіння окремих фігур;

$\sum_{0}^{n} A_i x_i$ – ***статичний момент площини*** S_y;

$\sum_{0}^{n} A_i y_i$ – ***статичний момент площини*** S_x.

Координати центра тяжіння плоскої фігури:

$$x_C = \frac{S_y}{A};\ y_C = \frac{S_x}{A}.$$

(8.8)Осі, що проходять крізь центр тяжіння, називають центральними. Статичний момент відносно центральної осі дорівнює нулю.

Розташування центра тяжіння простих геометричних фігур можна розрахувати за відомими формулами (рис. 8.2). Для розв'язання задач використовують такі методи:

1) ***симетрії***: центр тяжіння симетричних фігур знаходиться на осі симетрії;

2) ***розділення***: складні перерізи поділяють на декілька простих частин, положення ЦТ яких легко визначити;

3) ***від'ємних площин***: порожнини (порожнини) розглядають як перерізи з від'ємною площиною.

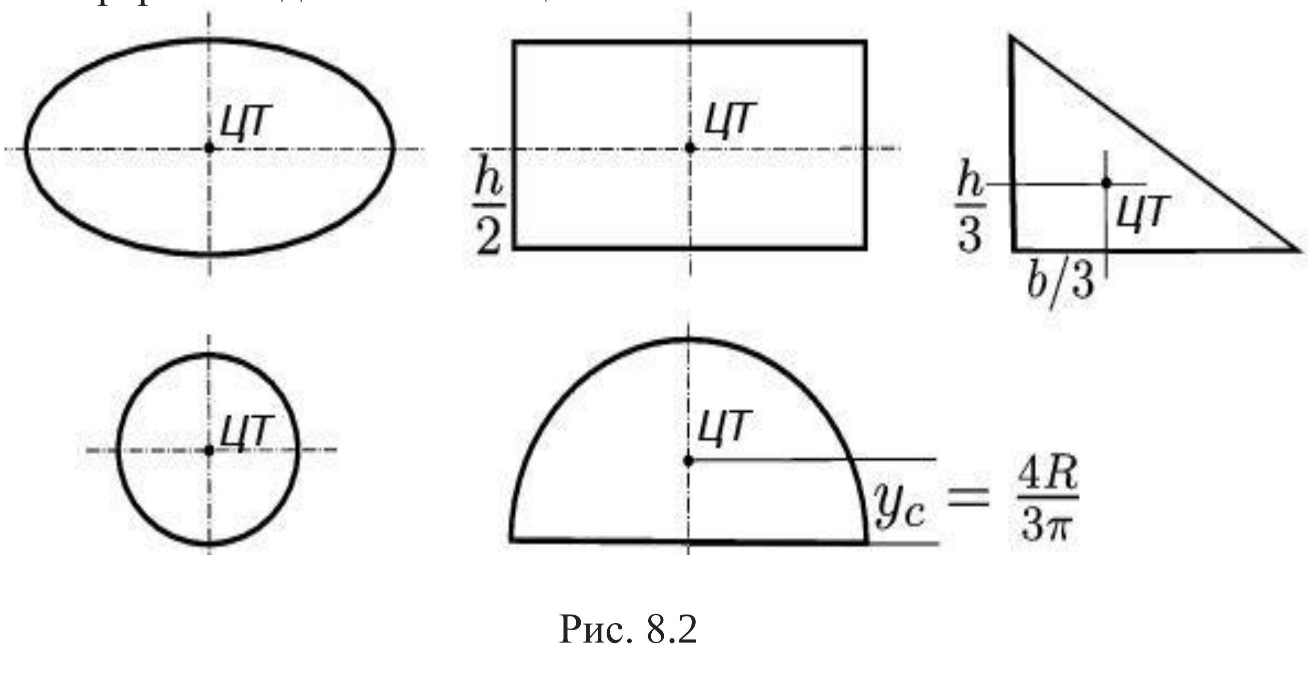


Рис. 8.2

8.3. Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Визначити положення центра тяжіння плоскої фігури, зображеної на рис. 8.3.

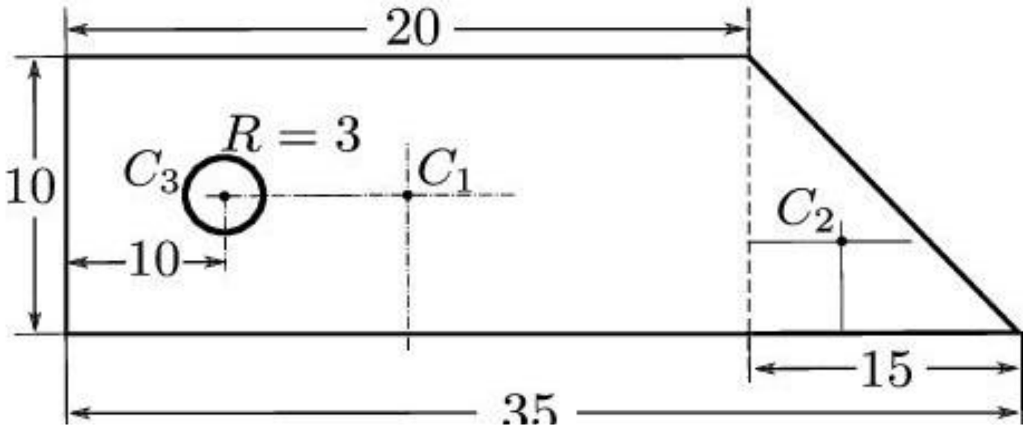


Рис. 8.3

Розв'язання

Розіб'ємо фігуру на три частини: прямокутник, трикутник, круг.

Координати центрів тяжіння фігур:

ЦТ фігури 1 (прямокутник): $x_1 = 10$ *см*;

$y_1 = 5$ *см.*

ЦТ фігури 2 (трикутник): $x_2 = 20 + 1/3 \cdot 15 = 25$ *см*;

$y_2 = 1/3 \cdot 10 = 3,3$ *см*;

ЦТ фігури 3 (круг): $x_3 = 10$ *см*;

$y_3 = 5$ *см.*

Знайдемо площі цих фігур:

1)прямокутник – $A_1 = 10 \cdot 20 = 200$ $см^2$;

2)трикутник– $A_2 = 0,5 \cdot 10 \cdot 15 = 75$ $см^2$;

3) круг– $A_3 = \pi R^2 = 3,14 \cdot 3^2 = 28,3$ $см^2$.

Знайдемо координати центра тяжіння фігури:

$$x_C = \frac{200 \cdot 10 + 75 \cdot 25 - 28,3 \cdot 10}{200 + 75 - 28,3} = 14,5 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{200 \cdot 5 + 75 \cdot 3,3 - 28,3 \cdot 5}{200 + 75 - 28,3} = 4,48 \text{ см}.$$

Контрольні запитання

1. Запишіть формули для координат центра паралельних сил.
2. Що називають центром тяжіння твердого тіла?
3. Запишіть формули для координат центра тяжіння твердого тіла.

4. Запишіть формули для координат центра тяжіння тіла, що складається зі скінченного числа окремих однорідних частин, які мають різну питому густину.
5. Запишіть формули для координат центра тяжіння неоднорідного абсолютно твердого тіла.
6. Запишіть формули для координат центра тяжіння площі однорідної пластини, яка розбита на скінченне число окремих фігур.
7. Запишіть формули для координат центра тяжіння площі неоднорідної пластини.
8. У чому полягає спосіб від'ємних площ під часвизначення координат центра тяжіння плоскої фігури?
9. У чому полягає спосіб від'ємних об'ємів?
10. Запишіть і поясніть формули для координат центра тяжіння шматка однорідного тонкого дроту постійного перерізу.
11. Поясніть, у чому полягає метод симетрії під час визначення координат центра тяжіння однорідного абсолютно твердого тіла.

9. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

9.1. Кінематика поступального руху

Кінематика розглядає рух як переміщення в просторі. Причини руху не розглядають.

Матеріальна точка – макроскопічне тіло, розмірами і формою якого можна знехтувати в умовах задачі.

Траєкторія – сукупність точок простору, які послідовно проходить матеріальна точка, що рухається. Форма траєкторії залежить від вибору системи відліку.

Існують три способи опису механічного руху:

1. ***Функціональний*** (основне рівняння руху – залежність шляху від часу): $S = S(t)$.

2. ***Координатний*** (основне рівняння руху – залежності проекцій радіус-вектора на осі координат від часу):

$$r_x = x(\mathrm{t});\ r_y = y(\mathrm{t});\ r_z = z(\mathrm{t}).$$

Оскільки декартові координати точки чисельно збігаються з проекціями вектора на осі координат, то є розкладання:

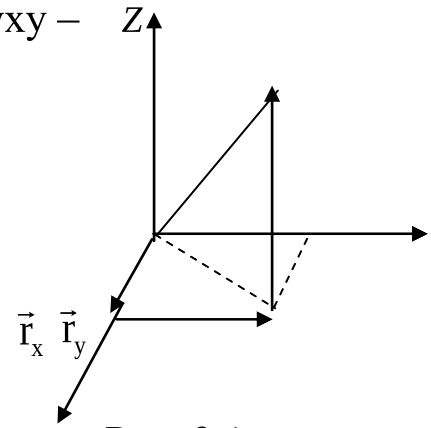
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти) уздовж додатних напрямів осей *OX, OY,OZ*(рис. 9.1 – 9.3) відповідно.

3. ***Векторний*** (основне рівняння руху – залежність радіуса-вектора від часу):

$\vec{r} = \vec{r}(t)$,де $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$, $\vec{r}$

за модулем $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$; $\vec{r}_z$ Y



$$\cos\alpha = \frac{r_x}{r}; \cos\beta = \frac{r_y}{r};$$

$$\cos\gamma = \frac{r_z}{r};$$

Рис. 9.1

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

9.2. Основні характеристики механічного руху

Шлях– довжина ділянки траєкторії. Шлях *S*, пройдений точкою з її початкового положення, є скалярною функцією часу: *S = S(t)*.Шлях є сумою довжин усіх ділянок траєкторії, тому вона не може бути негативною величиною.

Переміщення – це спрямований відрізок прямої, що з'єднує початкове і кінцеве положення тіла $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Очевидно (рис. 9.2, 9.3), що за модулем переміщення менше або дорівнює довжині шляху $\Delta r \le \Delta S$.

Рух матеріальних об'єктів характеризується швидкістю.

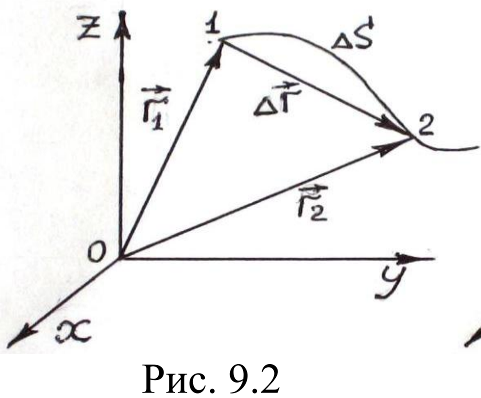


Рис. 9.2

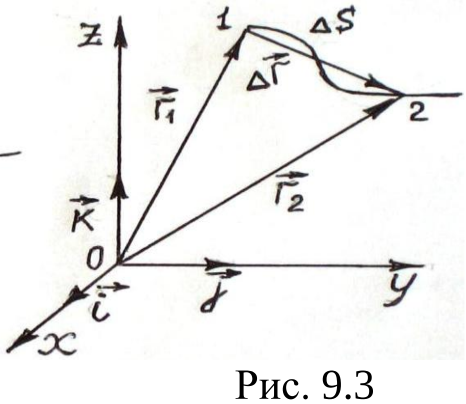


Рис. 9.3

Швидкість – векторна величина, що характеризує переміщення за одиницю часу.

Середньою шляховою швидкістю нерівномірного руху точки на шляху *S* називають фізичну величину, що дорівнює відношенню загального шляху до часу руху:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{s}{t}. \qquad (9.1)$$

Миттєва швидкість (за модулем) дорівнює границі, до якої прямує відношення шляху ΔS до часу, якщо час прямує до нуля:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \qquad (9.2)$$

Тобто миттєва швидкість точки дорівнює першій похідній від шляху за часом. У разі такого визначення ми матимемо лише абсолютну величину швидкості, у той час як *швидкість – це величина, що характеризується ще й напрямом.*

Миттєва швидкість (як векторна величина) дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора цієї точки $\vec{r}$:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (9.3)$$

Вектор швидкості $\vec{\upsilon}$ завжди спрямований за дотичною до траєкторії. Його можна представити у вигляді:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y + \vec{\upsilon}_z = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{\kappa}, \qquad (9.4)$$

де $\vec{\upsilon}_x, \vec{\upsilon}_y, \vec{\upsilon}_z$ – проекції швидкості на осі координат. Вони дорівнюють:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \upsilon_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (9.5)$$

Модуль вектора швидкості:

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}. \qquad (9.6)$$

Середню швидкість за час t можна знайти, якщо поділити загальний шлях $S = \upsilon_1 \Delta t_1 + \upsilon_2 \Delta t_2 + \upsilon_3 \Delta t_3 + ... + \upsilon_n \Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i \Delta t_i$ (або переміщення $\Delta \vec{r}$) на загальний час:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t} = \frac{1}{t} \ell \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \upsilon_i \Delta t_i = \frac{1}{t} \int_1^2 \upsilon dt. \qquad (9.7)$$

Зміна швидкості характеризується прискоренням.

Прискорення – це векторна фізична величина, що дорівнює зміні швидкості за одиницю часу, тобто прискорення – це перша похідна від швидкості за часом:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \qquad (9.8)$$

Прискорення $\vec{a}$ можна представити у такому вигляді:

$$\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{\kappa}, \quad (9.9)$$

де $\vec{a}_x,\ \vec{a}_y,\ \vec{a}_z$ – проекції швидкості на осі координат. Вони дорівнюють:

$$a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}, \upsilon_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}, \upsilon_z=\frac{d\upsilon_z}{dt}. \quad (9.10)$$

Модуль вектора прискорення:

$$a=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \quad (9.11)$$

9.3. Повне прискорення під час криволінійного руху

Під час руху тіла швидкість може змінюватися як за модулем $d\upsilon_\tau$, так і за напрямом $d\vec{\upsilon}_n$ (рис. 9.8). Зміна швидкості за напрямом за одиницю часу характеризується нормальним (доцентровим) прискоренням $\alpha_n=\upsilon^2/R,$ зміна швидкості за модулем – тангенціальним (дотичним) прискоренням $a_\tau=d\upsilon/dt.$

Вектор повного прискорення дорівнює сумі нормального і тангенціального прискорення:

$$\vec{a}=\vec{a}_n+\vec{a}_\tau\ . \quad (9.12)$$

Модуль повного прискорення дорівнює кореню квадратному із суми квадратів нормального і тангенціального прискорення:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{\left\langle\frac{\upsilon^2}{R}\right\rangle^2+\left\langle\frac{d\upsilon}{dt}\right\rangle^2}. \quad (9.13)$$

Напрям векторів зміни повної $d\vec{\upsilon},$ нормальної $d\vec{\upsilon}_n$ і тангенціальної швидкостей $d\vec{\upsilon}_\tau$ показано на (див. рис. 9.8.).

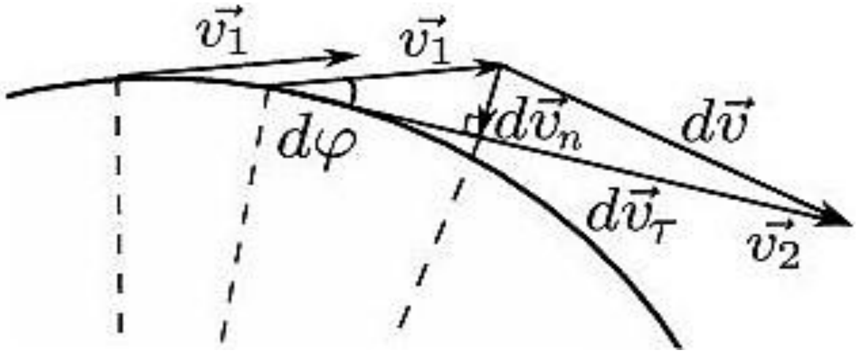


Рис. 9.8

Найпростіші рухи твердого тіла

Будь-який складний рух складається з найпростіших рухів. Розрізняють два простих типи рухів – *поступальний і обертальний.* При поступальному русі траєкторії всіх точок твердого тіла ідентичні в будь-який момент часу, тобто швидкості і прискорення однакові для всіх точок твердого тіла.

За формою траєкторії розрізняють прямолінійний та криволінійний рухи. Найбільш простим криволінійним рухом є обертальний. ***Обертальним*** називають такий рух, при якому всі точки тіла описують кола з центрами, розміщеними на одній прямій, яку називають віссю обертання.

9.4. Кінематика обертального руху

Шлях і лінійна швидкість не можуть бути основними кінематичними характеристиками, тому що вони лежать на різній відстані від осі обертання (рис. 9.10). Положення точки можна визначити завдяки відліку кута φ(одиниця вимірювання кута – ***рад***), який утворюють радіус точки і початковий радіус. Таким чином, ***кінематичне рівняння обертального руху – це залежність кута обертання від часу***: $\varphi = \varphi(t)$. Кутове переміщення $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Кутове переміщення за дуже малий час $dt \to d\varphi$.

Вектор кутового переміщення $d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{n}$ за модулем дорівнює куту елементарного оберту $d\varphi$ і спрямований по осі обертання (рис. 9.11). Напрям вектора кутового переміщення визначають за правилом свердлика (правило гвинта).

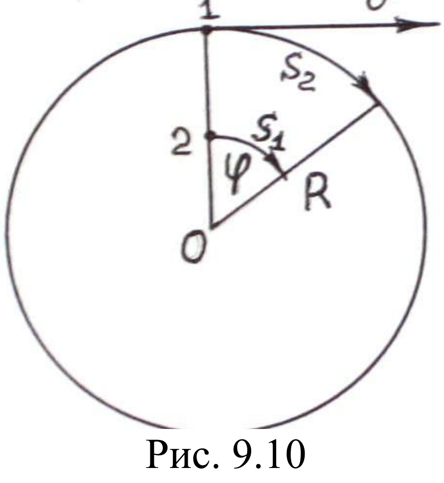


Рис. 9.10

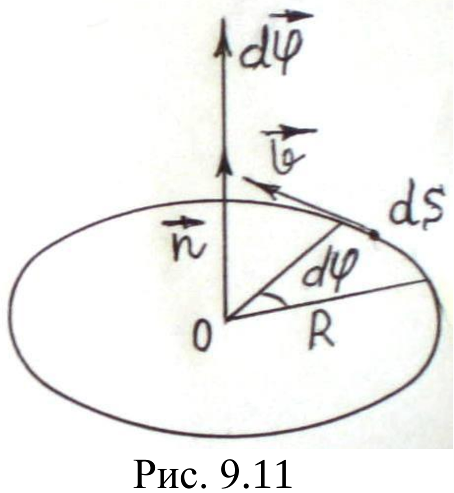


Рис. 9.11

Середня кутова швидкість $\langle\vec{\omega}\rangle$ – фізична величина, що дорівнює кутовому переміщенню $\Delta\varphi$ за одиницю часу (вимірюють у рад/с):

$$\langle\omega\rangle = \Delta\varphi/\Delta t. \ [\omega] = рад/с. \qquad (9.14)$$

Миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}$ – це похідна від кутового переміщення за часом:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (9.15)$$

Миттєва кутова швидкість $(\vec{\omega})$– вектор, спрямований по осі обертання. Напрям кутової швидкості визначають за правилом свердлика.

Середнє кутове прискорення $\langle\vec{\varepsilon}\rangle$ дорівнює зміні швидкості за одиницю часу (вимірюють у рад/с^2):

$$\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \Delta\vec{\upsilon}/\Delta t. \ [\omega] = рад/с^2. \qquad (9.16)$$

Миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ – це похідна від кутової швидкості за часом:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (9.17)$$

Період обертання T – час повного оберту на кут 2π рад.

Частота обертання $\nu = 1/T$ – число обертів за одиницю часу.

Зв'язок між лінійними і кутовими параметрами

Шлях точки за дугою кола $\Delta S = R\Delta\varphi$, де $\Delta\varphi$ кут у радіанах, тоді

$$\upsilon = \lim\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R\lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = \omega R. \qquad (9.18)$$

З формули (9.14) випливає, що лінійна швидкість зростає зі збільшенням радіуса. Із урахуванням того, що $\vec{\omega}\perp\vec{R}$ і $\sin(\omega\hat{}R) = 1$, швидкість обертального руху дорівнює:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega}\times\vec{R}. \qquad (9.19)$$

Лінійна швидкість дорівнює векторному добутку кутової швидкості на радіус-вектор точки.

Аналогія формул поступального та обертального рухів

Кінематичні характеристики	
Поступальний рух	Обертальний рух
$x = f(t)$ або $\vec{r} = f(t)$	$\varphi = f(t);\ [\varphi] - рад$
$\Delta x = x_2 - x_1$ або $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$	$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ або $d\vec{\varphi} = d\varphi\vec{n}$
$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ або $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ або $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
$a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ або $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$	$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ або $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Формули рівномірного руху	
$\vec{a} = 0,\ \vec{\upsilon} = const$	$\vec{\varepsilon} = 0,\ \vec{\omega} = const$
Формули рівнозмінного руху	
$a = const;\ \upsilon = \upsilon_0 \pm at;$ $x = x_0 + \upsilon_0 t \pm at^2/2$	$\varepsilon = const;\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t;$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2$
Основні динамічні характеристики	
сила – $\vec{F}$	момент сили – $\vec{M} = rF\sin\alpha$
маса – m	момент інерції – $I = \sum m r_i^2$
імпульс тіла – $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	модуль моменту імпульсу: $L = rp\sin\alpha$
Основний закон динаміки	
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},\ \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},\ \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$
Робота і енергія	
$A = \int_1^2 F dl \cos\alpha = \int_r F_l dl$ $W^{кін} = \frac{m\upsilon^2}{2};$ $W^{пот} = mgh,\ W^{пот} = \frac{kx^2}{2}$	$A = \int_1^2 M d\varphi \cos\alpha$ $W^{кін} = \frac{I\omega^2}{2}$

9.5. *Складний рух точки і тіла*

Складним називають рух, який можна розкласти на декілька простих рухів – поступальних і обертальних. При складному русі одночасно розглядають рух відносно двох систем відліку, одна з яких (основна) приймається за нерухому, а інша рухається відносно першої. Введемо такі визначення.

Відносний рух – це рух точки відносно рухомої системи відліку (до осей $ox_1y_1z_1$).

Відносна траєкторія – це траєкторія, яку описує точка у відносному русі. Кінематичні характеристики цього руху називають відповідно відносною швидкістю υ_r і відносним прискоренням a_r.

Переносний рух – це рух рухомої системи координат $ox_1y_1z_1$ і незмінно зв'язаних з нею точок простору відносно нерухомої системи координат $oxyz$.

Приклад. Людина іде по салону літака. Її рух відносно літака – це відносний рух. Рух людини відносно землі – абсолютний рух. Рух літака, у якому перебуває людина, – переносний рух.

Абсолютний, або ***складний*** – це рух точки *M* відносно нерухомої системи координат $oxyz$. Траєкторію цього руху називають абсолютною. Кінематичні характеристики цього руху називають відповідно абсолютною швидкістю (υ_a) й абсолютним прискоренням (a_a). Завданнями кінематики складного руху є:

1) визначення параметрів абсолютного руху точки за відомими параметрами відносного і переносного рухів;

2) визначення параметрів відносного і переносного рухів за відомими параметрами абсолютного руху.

Розглянемо складний рух на прикладі плоскопаралельного руху тіла (рис. 9.12) і колеса (рис. 9.13) по дорозі.

Плоскопаралельним називають рух твердого тіла, за якого всі точки тіла рухаються паралельно нерухомій у даній системі відліку площини. Плоско-паралельний рух вивчають методом розкладання складного руху на поступальний та обертальний і методом миттєвих центрів швидкостей. У методі розкладання для визначення швидкості будь-якої точки твердого тіла використовують теорему про додавання швидкостей (див. рис. 9.12).

Теорема про додавання швидкостей при складному русі

При складному русі точки абсолютна швидкість у кожен момент часу дорівнює геометричній сумі переносної (υ_r) і відносної (υ_r) швидкостей (див. рис. 9.13):

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_e^2 + \upsilon_r^2 + 2\upsilon_e \upsilon_r \cos\alpha}. \qquad (9.20)$$

Аналогічно визначають і прискорення *будь-якої точки* (a_e).

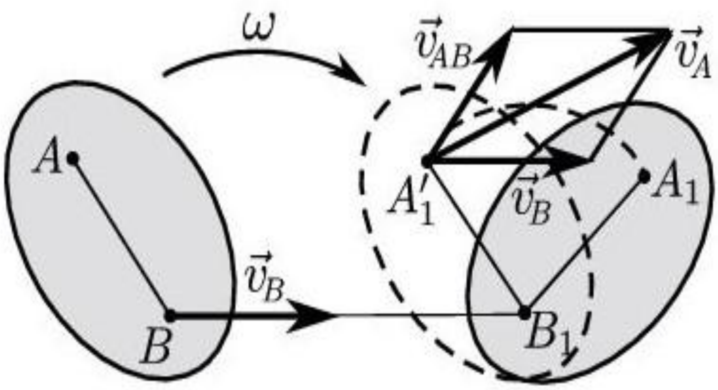


Рис. 9.12

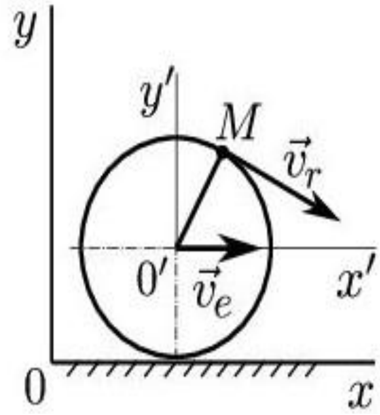


Рис. 9.13

Розглянемо складний рух тіла , що рухається відносно рухомої системи координат, яка у свою чергу рухається відносно основної, нерухомої системи координат(див. рис. 9.12).Точка *A* поступально рухається сумісно з точкою *B*, а потім повертається навколо точки *B* з кутовою швидкістю ω. Тоді абсолютна швидкість точки *A*:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_B + \vec{\upsilon}_{AB} = \vec{\upsilon}_{AB} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad (9.21)$$

де $r = AB$.

9.6. Приклади розв'язання задач

Задача №1. Точка рухається вздовж осі x. Закон її руху описує рівняння $x = A + Bt^2 - Ct^3$, де B = 3*м/с²*, C =0,2 *м/с³*. Визначити миттєву, середню швидкість і прискорення a точки в момент часу $t = 2$с. Знайти момент часу, у який прискорення дорівнюватиме нулю.

Розв'язання

Миттєву швидкість точки знайдемо за формулою:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt^2 - Ct^3) = 2Bt - 3Ct^2.$$

$$\upsilon = 2Bt - 3Ct^2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 0,2 \cdot 2^2 = 9,6 \ м/с.$$

Середню швидкість за час $t =$ 2с знайдемо, поділивши загальний шлях на загальний час:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \upsilon dt = \frac{1}{t}\int_0^t \left(2Bt - Ct^2\right)dt = \frac{1}{t}\left(2B\frac{t^2}{2} - 3C\frac{t^3}{3}\right) = \frac{1}{t}\left(Bt^2 - Ct^3\right);$$

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{1}{t}\left(Bt^2 - Ct^3\right) = \frac{1}{2}\left(3 \cdot 2^2 - 0,2 \cdot 2^3\right) = 4,4 \ м/с.$$

Прискорення точки: $a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(2Bt - 3Ct^2) = 2B - 6Ct.$

$$a = 2B - 6Ct = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 0,2 \cdot 2 = 3,6 \ м/с^2.$$

Знайдемо момент часу, в який прискорення дорівнюватимемо нулю:

$$a = 2B - 6Ct = 0; \qquad t = \frac{2B}{6C} = \frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 0,2} = 5 \ с.$$

Задача № 2. Колесо радіуса R = 1 м обертається так, що залежність кута повороту спиці колеса від часу t описує рівняння $\varphi(t)$ = 5+2t+t³, *рад*. Визначити кутове ε, тангенціальне a_τ, нормальне a_n і повне прискорення точок на ободі колеса через час t = 2*с* після початку руху.

Розв'язання

Миттєву кутову швидкість колеса знайдемо за формулою:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 2t^2 + t^3) = -2 \cdot 2t + 3t^2 = -4t + 3t^2;$$

$$\omega = -4t + 3t^2 = -4 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 4 \ рад/с.$$

Кутове прискорення точок:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 3t^2) = -4 + 6t; \quad \varepsilon = -4 + 6t = -4 + 6 \cdot 2 = 8 \ рад/с^2.$$

Тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R(-4+6t);$$

$$a_\tau = R(-4+6t) = 1\cdot\ (-4+6\cdot\ 2) = 8\ м/с^2.$$

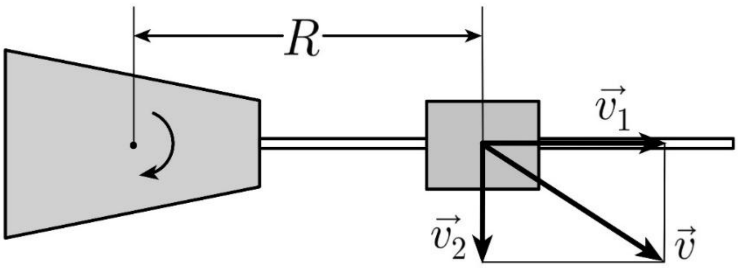
Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = 4^2\cdot\ 1 = 16\ м/с^2.$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{16^2 + 16^2} = 22{,}63\ м/с^2.$$

Задача№ 3. Візок рухається по стрілі баштового крана(рис.) зі швидкістю $\upsilon_1 = 2\,м/с$. Стріла крана обертається з кутовою швидкістю $\omega_2 = 0{,}2\,рад/с$. Чому дорівнює швидкість візка відносно Землі в момент часу, коли відстань від осі обертання до візка ℓ дорівнювала 6 *м*?



Розв'язання

Візок поступально рухається по стрілі баштового крана й одночасно повертається з кутовою швидкістю ω. Тоді абсолютна швидкість візка відносно Землі: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\omega}\times\vec{r}$, де $r = \ell$.

Швидкість візка відносно Землі за модулем

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} = \sqrt{\upsilon_1^2 + \omega^2\ell^2} = \sqrt{2^2 + 0{,}2^2\cdot\ 6^2} = 4{,}28\ м/с.$$

Контрольні запитання

1. Що являють собою матеріальна точка й абсолютно тверде тіло?
2. Які засоби опису руху ви знаєте?
3. Що являють собою шлях й переміщення? Яка різниця між ними?
4. Що являє собою середня шляхова швидкість?
5. Що являє собою миттєва швидкість? Запишіть формулу.

6. Що являє собою прискорення? Запишіть формули середнього, миттєвого прискорення.
7. Що являють собою кутове переміщення і кутова швидкість? Як направлений вектор кутової швидкості?
8. Що являє собою кутове прискорення? Як направлений вектор кутового прискорення?
9. Які існують зв'язки між поступальними й обертальними характеристиками руху?
10. Що являє собою нормальне, тангенціальне та повне прискорення? Як вони направлені? Запишіть формули.
11. Що являють собою відносний, переносний рухи?
12. Що являє собою абсолютна швидкість точки? Запишіть формулу.

10. ПОНЯТТЯ Й АКСІОМИ ДИНАМІКИ

10.1. Аксіоми динаміки

Динаміка – розділ теоретичної механіки, у якому встановлюють зв'язок між рухом тіл і діючими на них силами. У динаміці розв'язують два типи задач: визначають параметри руху за заданими силами або визначають сили, що діють на тіло, за заданими кінематичними параметрами. Динаміку поділяють на динаміку точки і динаміку твердого тіла. Закони класичної механіки прийнято розглядати як аксіоми.

• ***Перша аксіома*** *(принцип інерції): ізольована матеріальна точка перебуває в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, доки прикладені сили не виведуть її з цього стану.* Властивість тіл зберігати цей стан руху називають ***інертністю.*** Мірою інертності є маса. Маса є адитивною величиною, тобто маса тіла дорівнює масі всіх її частин:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i. \qquad (10.1)$$

У міжнародній системі одиниць СІ одиниця маси кілограм (1кг) є основною одиницею вимірювань.

• ***Друга аксіома*** *(другий закон Ньютона)* – основний закон динаміки *:прискорення матеріальної точки прямо пропорційне силі, що її викликає, і збігається з нею за напрямом:*

$$F = ma = m\frac{d^2S}{dt^2};\text{ де } a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}. \qquad (10.2)$$

З формули (10.2) випливає, що чим більша маса тіла, тим повільніше воно змінює свою швидкість. Фізичну величину, яка характеризує інертність тіла, називають масою цього тіла.

• ***Третя аксіома***(*третій закон Ньютона*)*: матеріальні тіла взаємодіють із силами, рівними за модулем і протилежними за напрямом*:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (10.3)$$

Ці сили завжди прикладені до різних тіл.

• ***Четверта аксіома***(*закон незалежності дії сил*): *кожна сила системи сил діє так, як би вона діяла одна. Прискорення, яке передається точці системою сил, дорівнює геометричній сумі прискорень*:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + ... \qquad (10.4)$$

10.2. Поняття про тертя

Тертя – опір, що виникає під час переміщення одного тіла по поверхні другого і перешкоджає їх відносному переміщенню .Розрізняють зовнішнє, внутрішнє і в’язке тертя. В’язке тертя виникає під час руху тіл у рідині та газі. Сила в’язкого тертя прямо пропорційна швидкості руху тіла. Причина зовнішнього тертя – механічне зачеплення виступів взаємодіючих тіл, а також взаємодія між атомами дотичних тіл. Види зовнішнього тертя: спокою, ковзання, кочення. Сила зовнішнього тертя завжди спрямована у бік, протилежний напряму руху тіла. Сила зовнішнього тертя прямо пропорційна силі нормального тиску *R*:

$$F_{тер} = fR, \qquad (10.5)$$

де *f* – коефіцієнт тертя.

Розрізняють три види зовнішнього тертя: ***тертя спокою, тертя ковзання, тертя кочення***. Для цих видів тертя існує таке співвідношення між коефіцієнтами тертя: $f_{сп}>f_{ков}$.

Коефіцієнт тертя залежить від матеріалу деталей, швидкості переміщення.

Тертя кочення пов’язане із взаємною деформацією колеса і ґрунту (рис. 10.1):

$$F_{рух} r = Rk;\ R = G;\ F_{рух} \geq k\frac{G}{r}, \tag{10.6}$$

де $k-$ максимальне значення плеча (половина колії),яке приймається за коефіцієнт тертя кочення, см.

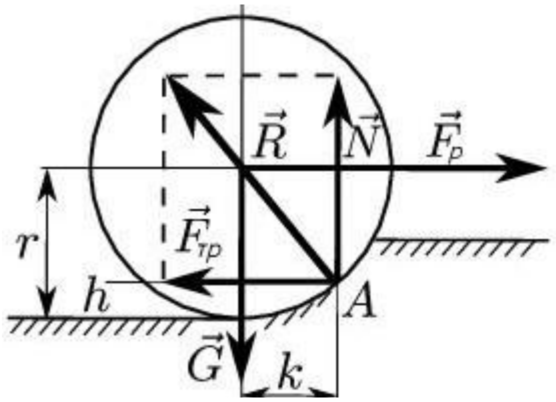


Рис. 10.1

Коефіцієнт тертя кочення визначають експериментально (сталь–сталь – $k \approx 0,005\,см$, гумова шина на шосе– $k \approx 0,24\,см$).

10.3. Сили інерції

Інертність – властивість тіл зберігати стан руху незмінним. Сила інерції виникає під час розгону або гальмування тіла і направлена у зворотний бік від прискорення. Сила інерції прикладена до в'язей і дорівнює: $F_{ін} = -ma.$ При криволінійному русі виникають нормальна і тангенціальна сили інерції:

$$F_{ін}^{н} = m\frac{\upsilon^2}{R}; \tag{10.7}$$

$$F_{ін}^{\tau} = ma_{\tau} = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{rd\omega}{dt} = mr\varepsilon. \tag{10.8}$$

10.4. Принцип кінетостатики (Даламбера)

Матеріальну точку, рух якої обмежено в'язями, називають невільною. Невільні матеріальні точки рухаються під дією активних сил і реакцій в'язей, що обмежують рух. Невільні матеріальні точки звільняють від в'язей і замінюють їх дію реакціями. Даламбер запропонував умовно прикладати силу інерції до тіла, а не до в'язей. Тоді система сил стає зрівноваженою і її можна прирівняти до нуля.

Принцип Даламбера: *матеріальна точка під дією активнихсил, реакцій в'язей і умовно прикладеної сили інерції перебуває в рівновазі, і сума цих сил дорівнює нулю:*

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i+\vec{F}_{ін}=0. \qquad (10.9)$$

Порядок розв'язання задач за принципом Даламбера:

1) скласти розрахункову схему;
2) вибрати систему координат;
3) виявити напрям і величину прискорення;
4) умовно прикласти силу інерції;
5) скласти систему рівнянь рівноваги;
6) визначити невідомі величини.

10.5. Робота і потужність. Коефіцієнт корисної дії (ККД)

Робота під час поступального руху дорівнює добутку сили на переміщення і косинус кута між ними:

$$A=\int_{r_1}^{r_2}Fdr\cos\alpha=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}d\vec{r}. \qquad (10.10)$$

Робота під час обертального руху дорівнює добутку момента сили на кутове переміщення: $A=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\vec{M}d\vec{\varphi}.$

Для характеристики швидкості виконання роботи введено поняття «потужність» як роботи, що виконується за одиницю часу:

$$P=\frac{A}{t}. \qquad (10.11)$$

Розмірність потужності: $[P]=\frac{Дж}{с}=Вт.$

Потужність під час поступального руху:

$$P=\frac{dA}{dt}=\frac{Fdr\cos\alpha}{dt}=F\upsilon\cos\alpha. \qquad (10.12)$$

Потужність під час обертального руху:

$$P=\frac{dA}{dt}=\frac{Md\varphi}{dt}=M\omega. \qquad (10.13)$$

Коефіцієнт корисної дії дорівнює відношенню корисної роботи до витраченої:

$$\eta = \frac{A_к}{A}. \qquad (10.14)$$

Теорема про зміну імпульсу: зміна імпульсу механічної системи $(\Delta m\vec{\upsilon})$ дорівнює імпульсу сили $(\vec{F}t)$:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}; \quad md\vec{\upsilon} = \vec{F}dt; \quad \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} md\vec{\upsilon} = \int_0^t \vec{F}dt; \quad m\vec{\upsilon} - m\vec{\upsilon}_0 = \vec{F}t. \qquad (10.15)$$

10.6. Енергія. Зв'язок між силою і потенціальною енергією

Енергія – найбільш універсальна міра різних форм руху матерії, яка описує якісні та кількісні зміни стану руху. Запишемо рівняння руху тіла з точки 1 в точку 2 під дією постійної сили і помножимо обидві частини рівняння на елементарне переміщення $dr = \upsilon dt$:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}\upsilon dt = fdr. \qquad (10.16)$$

У формулі $fdr-$ елементарна робота сили на шляху dr, а вираз зліва – зміна кінетичної енергії:

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dt}dt = m\upsilon d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = dW,^k \qquad (10.17)$$

Кінетична енергія залежить від вибору системи відліку, тому:

$$W^k = \frac{m\upsilon^2}{2} + const. \qquad (10.18)$$

Проінтегруємо співвідношення (10.17) з урахуванням (10.18):

$$\int_1^2 d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \int_1^2 fdr \qquad (10.19)$$

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A_{12} \qquad (10.20)$$

З формули (10.20) ***випливає теорема про зміну кінетичної енергії: зміна кінетичної енергії тіла на деякому шляху дорівнює роботі, виконуваній над тілом***, тобто робота сили – кількісна міра зміни кінетичної енергії. Таким чином, ***кінетична енергія характеризує здатність тіла виконати роботу***.

У диференціальній формі елементарна робота:

$$dA = Fdr = -dW^n. \qquad (10.21)$$

Функція $W^n(r)$ повністю визначає силу за модулем і напрямом:

$$F = -\frac{dW^n}{dr} \qquad (10.22)$$

або $$F_x = -\frac{\partial W^n}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial W^n}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial W^n}{\partial z}. \qquad (10.23)$$

У загальному вигляді сила дорівнює градієнту потенціальної енергії зі знаком –:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial W^n}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W^n}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W^n}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla W^n, \qquad (10.24)$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори (орти) координатних осей.

Конкретний вигляд потенціальної енергії залежить від характеру силового поля. Наприклад, на невеликій висоті h над поверхнею Землі $(h \ll R)$ потенціальна енергія тіла дорівнює:

$$W^n = Ph = m\frac{\gamma M}{(R+h)^2}h \approx mgh. \qquad (10.25)$$

10.7. Графічне зображення енергії

Графік залежності потенціальної енергії від зміщення (відстані) називають потенціальною кривою. Аналіз потенціальних кривих дозволяє визначити характер руху тіла. Графік потенціальної енергії тіла масою m, піднятого на висоту h над поверхнею Землі, показано на рис. 3.1. Кут нахилу прямої, що проходить через початок координат, тим більший, чим більша маса тіла, оскільки $tg\alpha = mg$. Якщо повна енергія тіла дорівнює W, то на висоті тіло має потенціальну енергію W^n, яка визначається відрізком вертикалі, обмеженим точкою h на осі абсцис і графіком $W^n(h)$.

Графік залежності потенціальної енергії пружно-деформованого тіла від деформації має вигляд параболи (рис. 3.2), де задана повна енергія W визначається горизонтальною прямою, а значення W^k і W^n задаються так само, як і на рис. 3.1. Якщо кінетична енергія менша за W, то тіло міститься в потенціальній ямі.

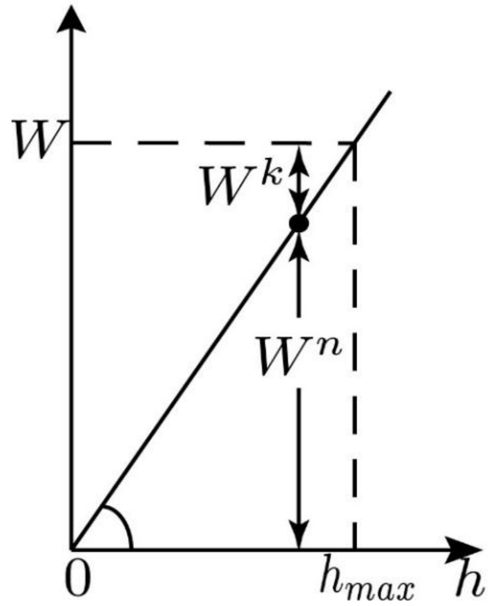


Рис. 10.2

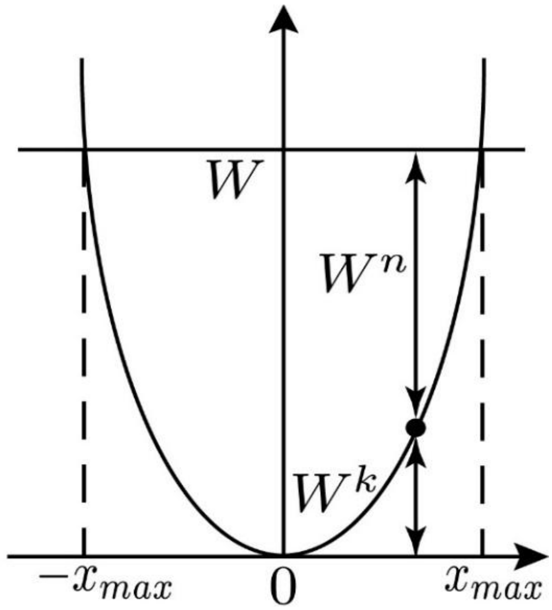


Рис. 10.3

Експериментально доведено, що в механіці виконується закон збереження механічної енергії: ***у замкненій механічній системі тіл, між якими діють тільки консервативні сили (сили пружності та гравітації), загальна (кінетична і потенціальна) енергія зберігається, тобто не змінюється з часом.***

Математично закон збереження механічної енергії записують так:

$$\frac{d}{dr}(W^k + W^n) = 0; \qquad (W^k + W^n) = const. \qquad (10.26)$$

10.8. Приклади розв'язання задач

Задача № 1. Матеріальна точка рухається по колу радіусом R = 0,2*м* відповідно до рівняння $\varphi = 15t - t^3$. Знайти в момент часу t = 2 *с* лінійну швидкість і повне прискорення.

Розв'язання

Лінійна швидкість дорівнює добутку кутової швидкості на радіус обертання, тому спочатку знайдемо кутову швидкість і кутове прискорення:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(15t - t^3) = 15 - 3t^2 = 15 - 3\cdot\ 2^2 = 3\ c^{-1}.$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(15 - 3t^2) = 6t = 6 \cdot\ 2 = 12\ c^{-2}.$$

Лінійна швидкість: $\upsilon = \omega R = 3 \cdot\ 0,2 = 0,6\ м/с$.

Тангенційне (дотичне) прискорення:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \varepsilon R = 12 \cdot\ 0,2 = 2,4\ м/с^2.$$

Нормальне (доцентрове) прискорення:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{0,6^2}{0,2} = 1,8\ м/с^2.$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{1,8^2 + 2,4^2} = 3\ м/с^2.$$

Задача № 2. Матеріальна точка масою $m = 5\ кг$ рухається згідно з рівнянням $x = Bt + Ct^3$, де B = 2 *м/с²*, С = 0,25*м/с³*. Знайти силу, що рухає в момент часу $t = 2c$.

Розв'язання

За другим законом Ньютона сила дорівнює добутку маси на прискорення: $F = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$,

де швидкість: $\upsilon = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(Bt + Ct^3) = B + 3Ct^2.$

Прискорення точки: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d}{dt}(B + 3Ct^2) = 6Ct^2.$

Підставимо прискорення у формулу другого закону Ньютона:

$$F = ma = m \cdot\ 6Ct^2 = 5 \cdot\ 6 \cdot\ 0,25 \cdot\ 2^2 = 30\, H.$$

Задача № 3. Через блок, що має вигляд колеса, перекинута нитка, до кінців якої прив'язані вантажі з масами $m_1 = 0,3кг$ і $m_2 =$ 0,2 *кг*. Масу колеса $m = 0,2кг$ вважати рівномірно розподіленою за ободом, масою спиць знехтувати. Визначити прискорення a, з яким рухатимуться вантажі, і сили натягу нитки (T_1, T_2) по обидві сторони блока.

Розв'язання

Запишемо рівняння руху системи тіл:

$$m_1 a = m_1 g - T_1;$$

$$m_2 a = T_2 - m_2 g;$$

$$J\varepsilon = M_1 - M_2,$$

де $J = mR^2 -$ момент інерції колеса (обода), $\varepsilon = a/R -$ кутове прискорення, $M_1 = F_1 R,\ M_2 = F_2 R -$ обертальні моменти:

$$M_1 = F_1 R = m_1 gR;$$

$$M_2 = F_2 R = m_2 gR;$$

Підставимо $J,\ \varepsilon,\ M_1,\ M_2$ в рівняння руху колеса:

$$mR^2 \frac{a}{R} = m_1 gR - m_2 gR; \qquad ma = m_1 g - m_2 g = (m_1 - m_2)g.$$

Знайдемо прискорення системи:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m} = \frac{(0,3 - 0,2)\cdot\ 9,8}{0,2} = 4,9\ м/с^2.$$

Знайдемо сили натягу нитки:

$$T_1 = m_1 g - m_1 a = m_1(g - a) = 0,3(9,8 - 4,9) = 0,98\,H;$$

$$T_2 = m_2 g - m_2 a = m_2(g - a) = 0,2(9,8 - 4,9) = 1,47\,H.$$

Задача № 4. Куля скочується з похилої площини висотою h = 98 см. Яку лінійну швидкість буде мати центр кулі в той момент, коли вона скотиться з похилої площини?

Розв'язання

За законом збереження механічної енергії:

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Підставимо значення моменту інерції $J = 0,4mR^2$ і кутової швидкості $\omega = \upsilon/R$:

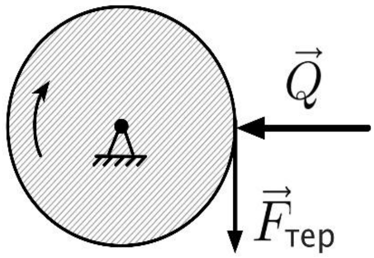
$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{0,4mR^2}{2}\cdot\ \frac{\upsilon^2}{R^2}, \quad \rightleftharpoons \quad \frac{2}{2}gh = \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{0,4\upsilon^2}{2}.$$

Лінійна швидкість кулі у той момент, коли вона скотиться з похилої площини: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2gh}{1,4}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 9,8 \cdot 0,98}{1,4}} = 3,7\ м/с.$

Задача № 5. Платформа у вигляді диска обертається за інерцією навкруги вертикальної осі з частотою $n_1 = 14$ *хв⁻¹*. На краю платформи стоїть людина. Коли вона перейшла в центр платформи, частота виросла до $n_2 = 24$ *хв⁻¹*. Маса людини $m_л = 70$ *кг*. Визначити масу платформи m. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

Розв'язання

За законом збереження моменту імпульса: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$,



де $J_1 = \dfrac{mR^2}{2} + m_л R^2$; $J_2 = \dfrac{mR^2}{2}$;

$\omega_1 = 2\pi n_1$; $\omega_2 = 2\pi n_2$.

Підставимо значення моменту інерції:

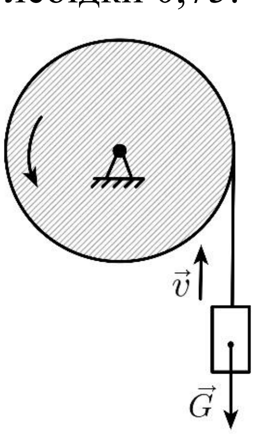
$$\left(mR^2/2 + m_л R^2\right)2\pi\omega_1 = mR^2/2 \cdot 2\pi\omega_2.$$

Скоротивши на R^2, отримаємо: $(m + 2m_л)n_1 = mn_2$,

$$m = \frac{2m_л n_1}{n_2 - n_1} = \frac{2 \cdot 70 \cdot 14}{(24-14)} = 196кг.$$

Задача № 6. Знайти потужність двигуна мотора лебідки для підйому тіла вагою $G = 3\ кН$ на висоту $h = 10\ м$ за 2,5*с*. *ККД* лебідки 0,75.

Розв'язання



Корисна потужність дорівнює добутку сили на швидкість і косинус кута між ними:

$$P_{кор} = F\upsilon\cos 0^0 = 3000 \cdot 4 = 12000Вт = 12\ кВт.$$

Швидкість: $\upsilon = h/t = 10/2,5 = 4\ м/с$;

При рівномірному підйомі $F = G = 3\ кН$.

Повна потужність $P_{пов} = \frac{P}{\eta} = \frac{12}{0,75} = 16\ кВт.$

Задача № 7. Точильний камінь притискається до деталі з силою $Q = 15\ кН$. Коефіцієнт тертя $f = 0,28$. Деталь обертається зі швидкістю $n = 100\ об/хв$, її діаметр 60 *мм*. Яка потужність затрачується на обробку деталі?

Розв'язання

Потужність, потрібна для обробки деталі: $P = M\omega,$
де момент сили різання дорівнює добутку сили різання на плече:

$$M = F_{різ}\frac{d}{2} = 12,6\ кНм.$$

Сила різання дорівнює силі тертя, тому:

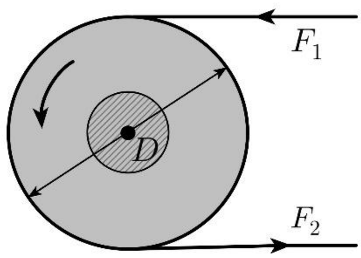
$$F_{різ} = F_{тер} = fQ = 0,28 \cdot 15 \cdot 10^3 = 4,2\ кН$$

Кутова швидкість обертання деталі: $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 100}{60} = 10,7$ $рад/с.$

Потрібна потужність:

$$P = F_{тер}\frac{d}{2}\frac{2\pi n}{60} = \frac{0,28 \cdot 15000 \cdot 0,06 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 100}{2 \cdot 60} = 1,32\ кВт.$$

Задача № 8. Шків обертається за допомогою пасової передачі. Натяг тяглового ременя $F_1 = 120\ Н$, віденого $F_2 = 50\ Н$. Маса шківа $m = 200\ кг,$ діаметр $D = 80\ мм.$ Момент опору в підшипниках $M_{оп} = 1,2\ Нм.$ Шків уважати тонкостінним циліндром. Знайти кутове прискорення вала (його масою знехтувати).



Розв'язання

За основним законом динаміки обертального руху добуток моменту інерції на кутове прискорення дорівнює сумарному моменту зовнішніх сил, що діють на тіло:

$$J\varepsilon = M_1 - M_2 - M_{оп}.$$

Кутове прискорення вала:

$$\varepsilon = \frac{M_1 - M_2 - M_{on}}{J},$$

де момент інерції шківа:

$$J = mR^2 = mD^2/4.$$

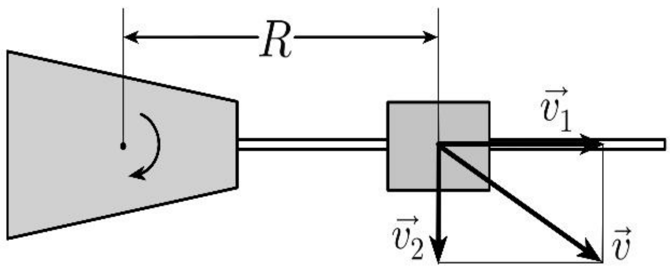
Сумарний момент зовнішніх сил:

$$\sum_{i=1}^{3} M_i = F_1\frac{D}{2} - F_2\frac{D}{2} - M_{on} = \frac{F_1D - F_2D - 2M_{on}}{2}.$$

Кутове прискорення шківа:

$$\sum_{i=1}^{3} M_i = \frac{(F_1D - F_2D - 2M_{on})4}{2mD^2} = \frac{(120\cdot\ 8\cdot\ 10^{-2} - 50\cdot\ 8\cdot\ 10^{-2} - 2\cdot\ 1.2)2}{200\cdot\ 64\cdot\ 10^{-4}} = 5\,H/м.$$

Задача № 9. Візок рухається по стрілі баштового крана зі швидкістю $\upsilon = 2\,м/с.$ Стріла крана обертається з кутовою швидкістю $\omega = 0,25\,рад/с.$ Чому дорівнює швидкість візка відносно Землі в момент часу $t = 2\ с.$ Прийняти початкове положення візка $R_0 = 2\ м.$



Розв'язання

Швидкість візка відносно Землі дорівнює векторній сумі швидкостей:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2} = \sqrt{\upsilon_1^2 + \omega^2 R^2} = \sqrt{2^2 + 0,25^2\cdot\ 6^2} = 2,5\,м/с.$$

де $R = R_0 + \upsilon t = 2 + 2\cdot\ 2 = 6\ м.$

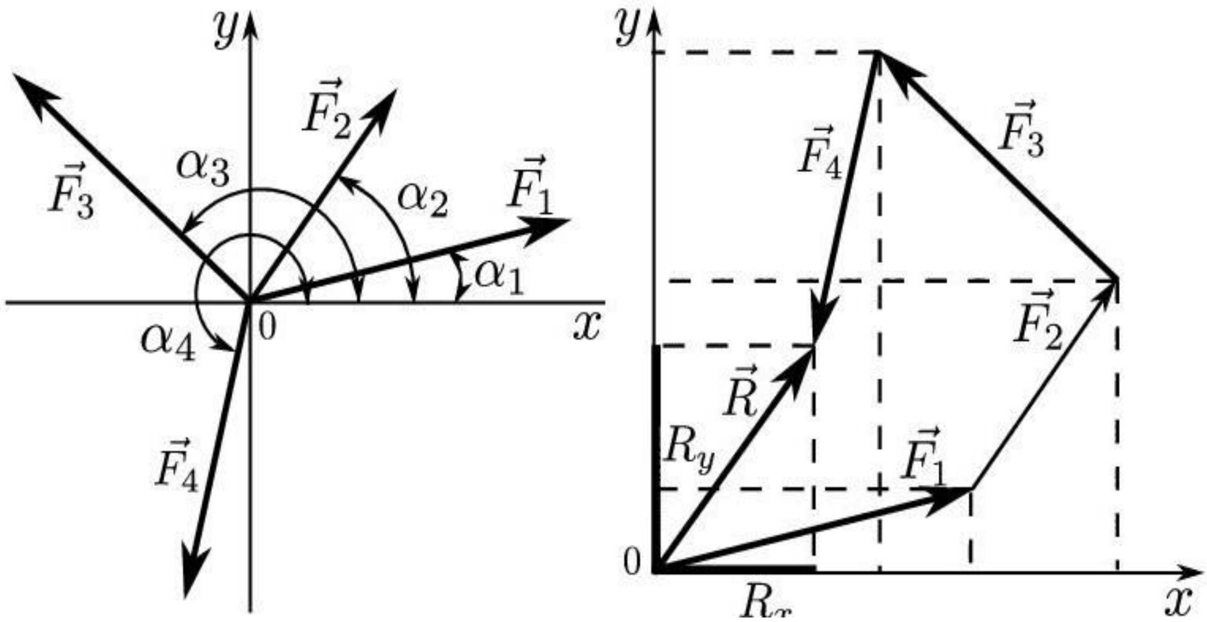
Контрольні запитання

1. Що являє собою інертність? Яка фізична величина є мірою інертності тіла?
2. Що являє собою сила? У яких одиницях її вимірюють?
3. Що являє собою маса? В яких одиницях її вимірюють?

4. Сформулюйте закони Ньютона. Запишіть формули.
5. Що являє собою імпульс? В яких одиницях його вимірюють?
6. Сформулюйте і запишіть формулу теореми про зміну імпульсу.
7. Що являє собою робота сили?
8. Чому полягає зв'язок між силою і потенціальною енергією?
9. Що являє собою потужність? Запишіть формулу.
10. Що являє собою енергія? Які види механічної енергії ви знаєте?
11. Запишіть формулу теореми про зміну кінетичної енергії.
12. Сформулюйте принцип Даламбера.

Розрахунково-графічна робота № 1

Визначення рівнодійної плоскої системи збіжних сил аналітичним і геометричним способами



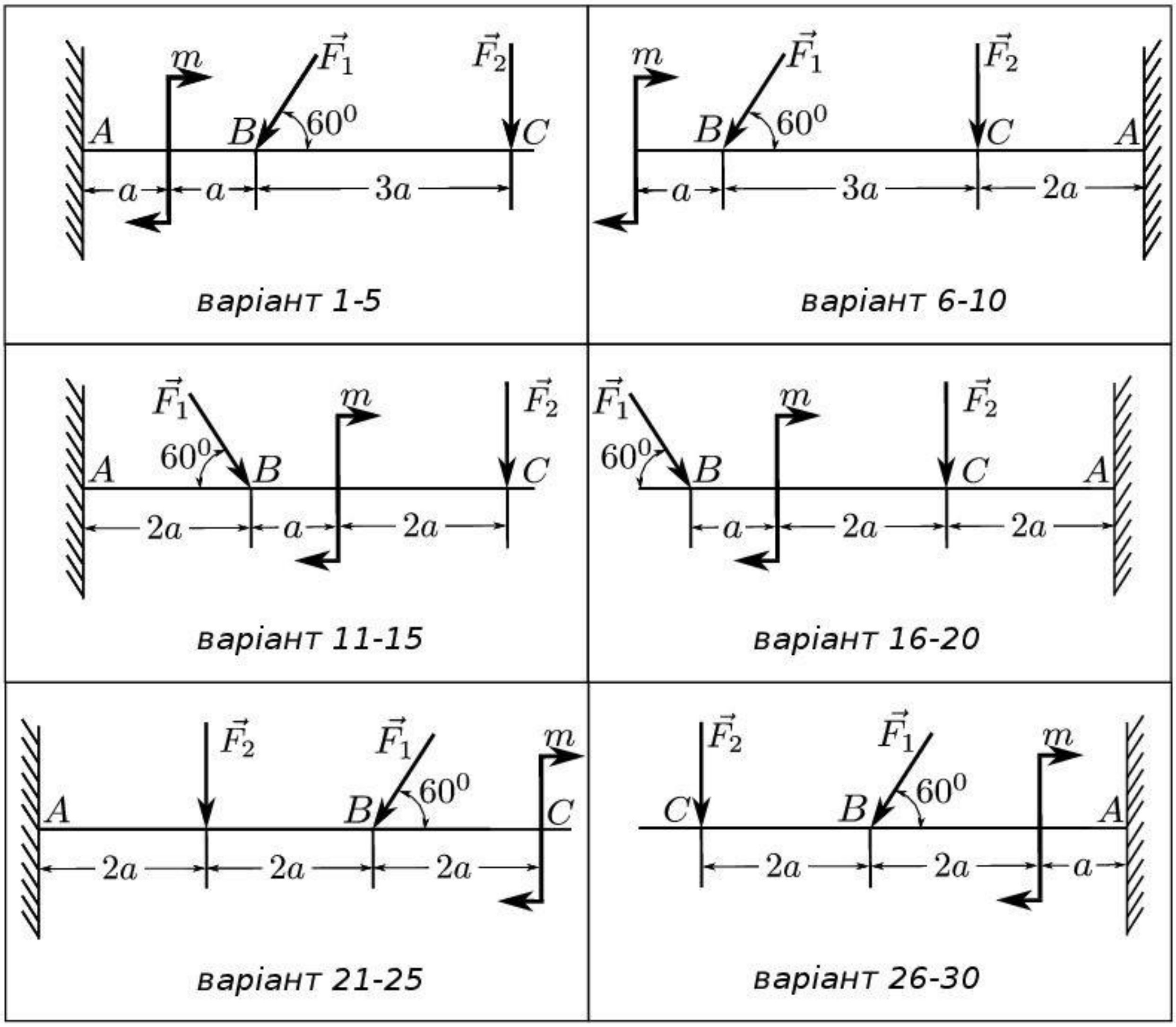
Завдання. За схемою рисунків знайти рівнодійну систему збіжних сил. Варіанти завдань наведено в таблиці.

Пара-метр	Варіант									
	1; 11; 21	*2; 12; 22*	*3; 13; 23*	*4; 14; 24*	*5; 15; 25*	*6; 16; 26*	*7; 17; 27*	*8; 18; 28*	*9; 19; 29*	*10; 20; 30*
F_1, *кН*	10	12	8	16	4	6	14	18	10	8
F_2, *кН*	6	8	10	12	6	14	8	10	6	12
F_3, *кН*	8	4	12	14	10	15	10	8	12	10
F_4, *кН*	6	10	14	15	9	8	16	12	8	14
α_1, *град*	30	0	60	120	45	75	30	60	0	45
α_2, *град*	45	60	30	30	75	0	60	45	30	60
α_3, *град*	0	300	270	150	300	270	210	150	120	150
α_4, *град*	150	120	210	60	120	150	120	210	60	75

Розрахунково-графічна робота № 2

Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених сил і пар сил

Завдання. Визначити величини реакцій в опорі защемленої балки. Провести перевірку розв’язання.

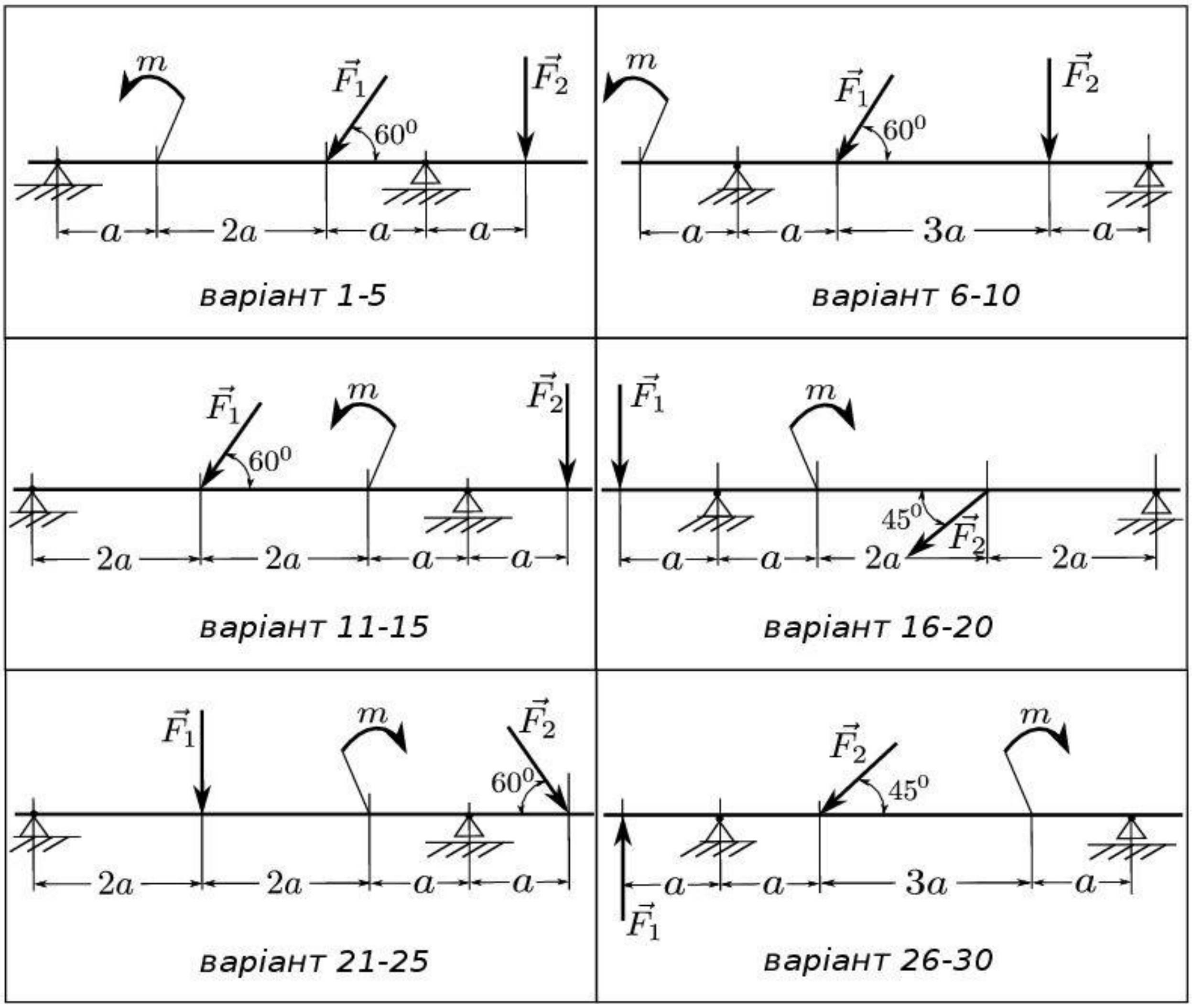


Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	*2; 12; 22*	*3; 13; 23*	*4; 14; 24*	*5; 15; 25*	*6; 16; 26*	*7; 17; 27*	*8; 18; 28*	*9; 19; 29*	*10; 20; 30*
$F_1, кН$	12	14	16	18	20	22	10	24	26	28
$F_2, кН$	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	5
$m, кНм$	14	13	12	11	10	9	8	7	12	14
$a, м$	0,5	0,5	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2

Розрахунково-графічна робота № 3

Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених сил і пар сил

Завдання. Визначити величини реакцій для балки в шарнірних опорах балки. Перевірити розв’язання.

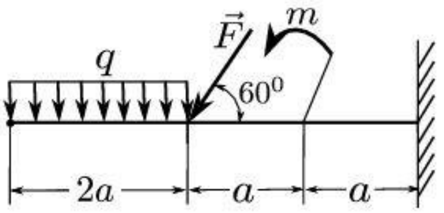


Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	*2; 12; 22*	*3; 13; 23*	*4; 14; 24*	*5; 15; 25*	*6; 16; 26*	*7; 17; 27*	*8; 18; 28*	*9; 19; 29*	*10; 20; 30*
$F_1, кН$	12	14	16	18	20	22	10	24	26	28
$F_2, кН$	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	5
$m, кНм$	14	13	12	11	10	9	8	7	12	14
$a, м$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2

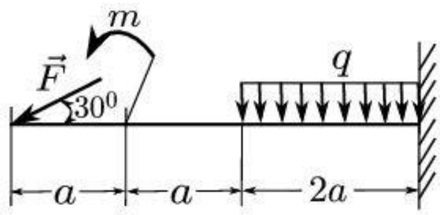
Розрахунково-графічна робота № 4

Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених і розподілених навантажень

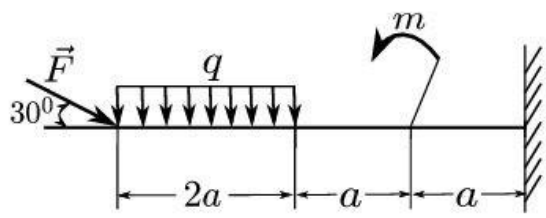
Завдання. Визначити величини реакцій в опорі защемленої балки. Перевірити розв’язання.



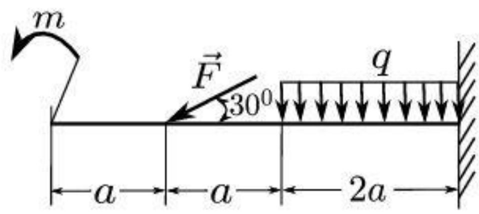
варіант 1-5



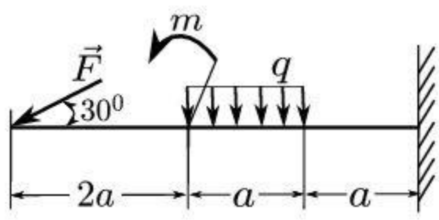
варіант 6-10



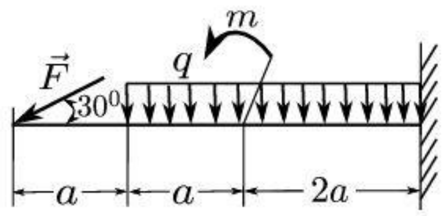
варіант 11-15



варіант 16-20



варіант 21-25



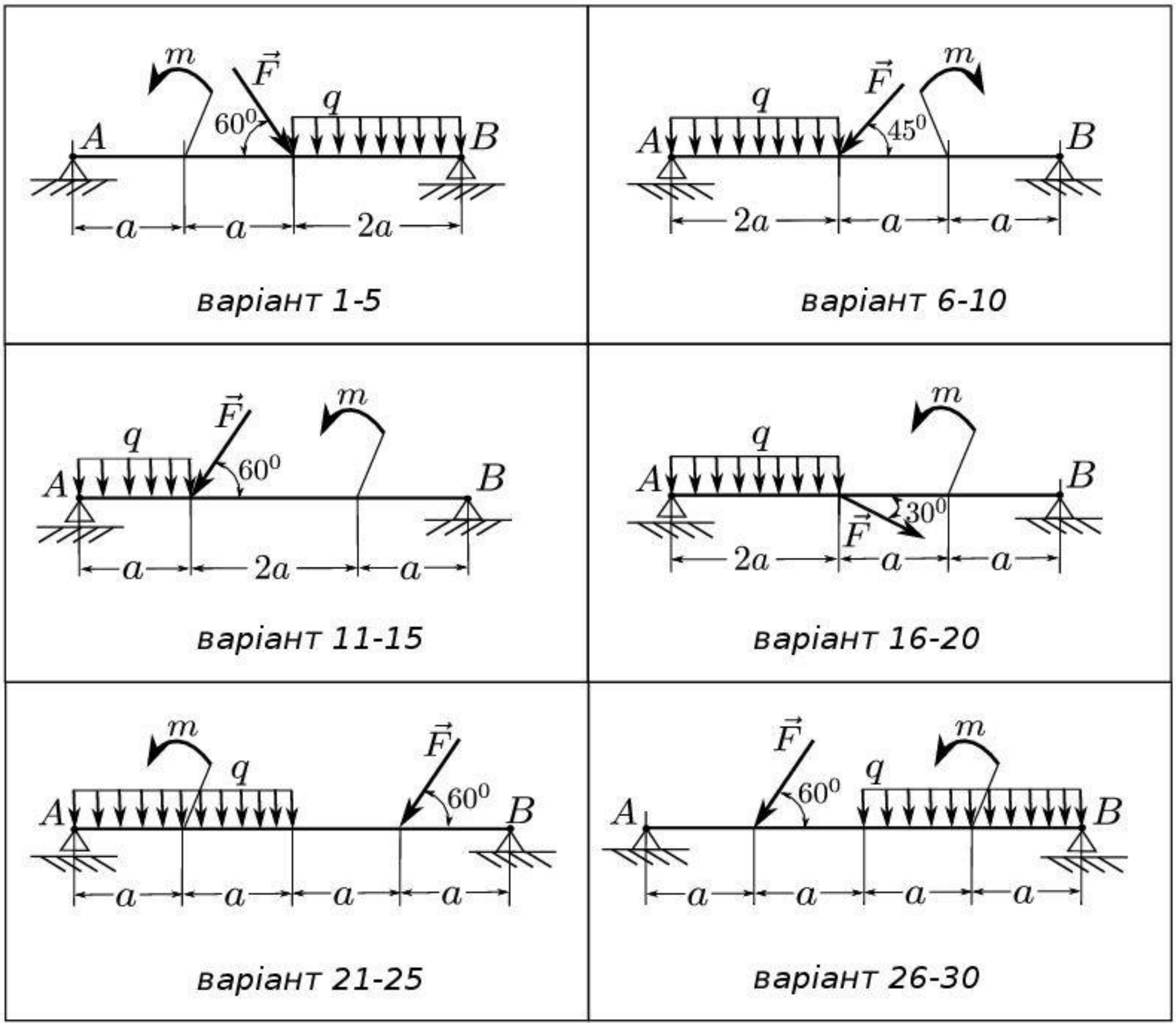
варіант 26-30

Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	*2; 12; 22*	*3; 13; 23*	*4; 14; 24*	*5; 15; 25*	*6; 16; 26*	*7; 17; 27*	*8; 18; 28*	*9; 19; 29*	*10; 20; 30*
$F_1, кН$	6	8	10	12	14	22	20	18	16	4
$q, кНм$	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
$m, кНм$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	20
$a, м$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2

Розрахунково-графічна робота № 5

Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених і розподілених навантажень

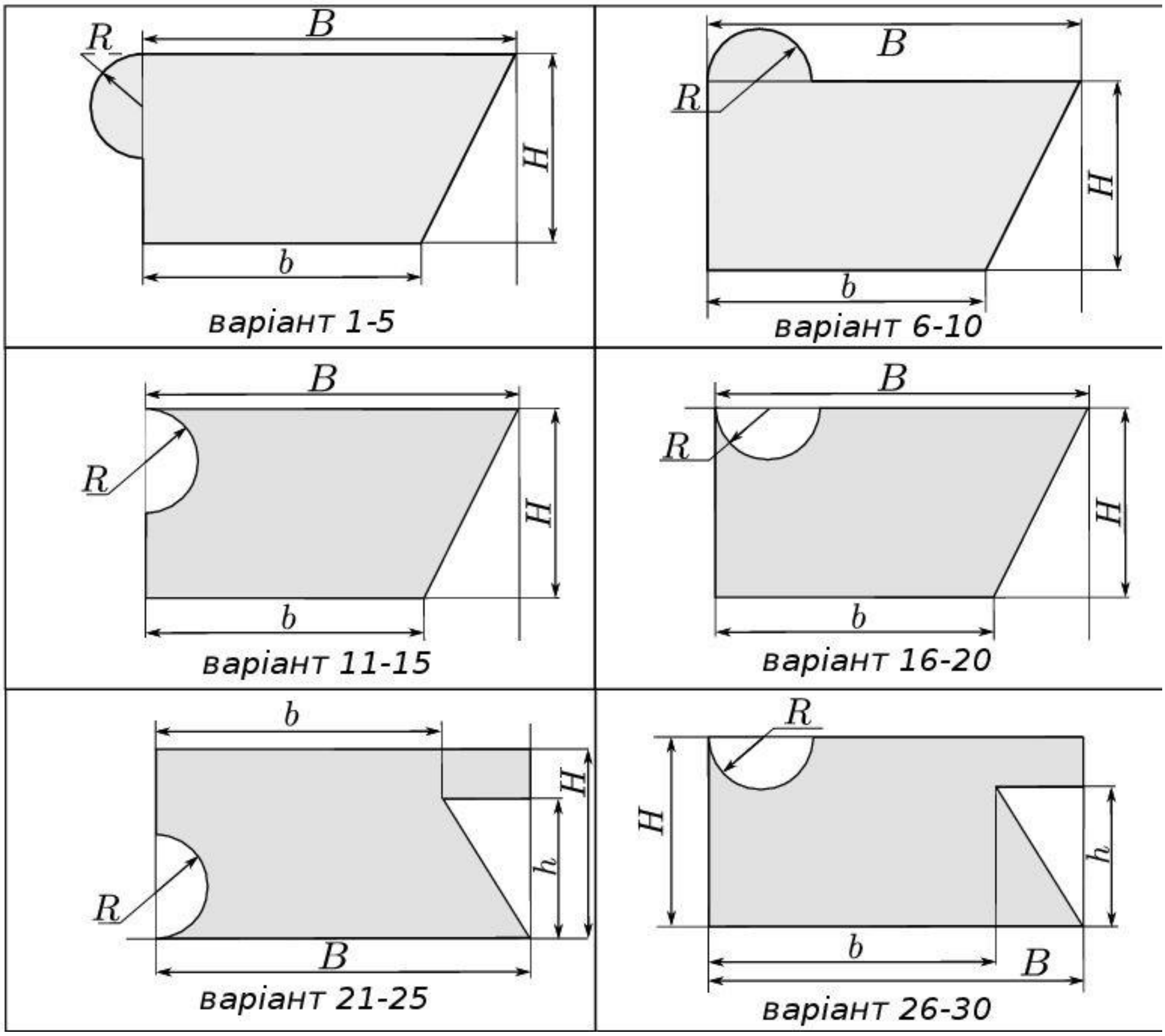
Завдання. Визначити величини реакцій в шарнірних опорах балки. Перевірити розв’язання.



Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	*2; 12; 22*	*3; 13; 23*	*4; 14; 24*	*5; 15; 25*	*6; 16; 26*	*7; 17; 27*	*8; 18; 28*	*9; 19; 29*	*10; 20; 30*
$F_1, кН$	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80
$q, кНм$	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
$m, кНм$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	20
$a, м$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4

Розрахунково-графічна робота № 6

Завдання. Визначити координати центра тяжіння заданого перерізу (розміри деталі підставляти за варіантами).



Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	*2; 12; 22*	*3; 13; 23*	*4; 14; 24*	*5; 15; 25*	*6; 16; 26*	*7; 17; 27*	*8; 18; 28*	*9; 19; 29*	*10; 20; 30*
B, *мм*	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
b, *мм*	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
H, *мм*	90	100	120	130	140	150	160	170	180	190
h, *мм*	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
R, *мм*	26	26	30	30	30	40	40	50	50	50

Розрахунково-графічна робота № 7

Завдання 1. Рух вантажу задано рівнянням $y = At^2 + Bt + y_0$. Визначити швидкість і прискорення вантажу в момент часу t, а також швидкість і прискорення точки D на ободах барабана лебідки.

Параметр	Варіант											
	1 13	2 14	3 15	4 16	5 17	6 18	7 19	8 20	9 21	10 22	11 23	12 24
$A, м/с^2$	2	1	3	1	3	3	2	1	4	1	2	3
$B, м/с$	3	1	2	4	2	1	1	4	1	3	3	2
$y_0, м$	4	2	3	2	0	5	4	2	3	5	1	2
$R, м$	0,3	0,2	0,5	0,6	0,4	0,2	0,5	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3
$t, с$	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

Завдання 2.Відповісти на тестові питання.

	Питання	Відповіді
1	За заданим законом обертання вала $\varphi = 0,2t^3 - 4t$ (рад) визначити вид руху	1) рівномірний
		2).рівноприскорений
		3) рівноуповільнений
		4) змінний
2	Закон обертання колеса $\varphi = 4t - 0,25t^2$ (рад). Визначити час до повної зупинки	6 с
		8 с
		10 с
		12 с
3	Лебідкою піднімають вантаж $m = 300$ кг зі швидкістю $\upsilon = 0,5\, м/с$. Потужність двигуна 2 *кВт*. Визначити *ККД* механізму	0,675
		0,935
		0,735
		0,845
4	Під дією крутного моменту $M = 300\, Нм$ за 4 с швидкість колеса зі стану спокою збільшилася до 320 об/хв. Визначити момент інерції колеса	23,88
		58 65
		35,83
		102

Рекомендована література

1. Авотін С.С. Технічна механіка / С.С. Авотін, М.Я. Рохманов. – Харків: ХНАУ, 2018. – 99 с.
2. Булгаков В.М. Теоретична механіка / В.М. Булгаков, В.В., Яременко, О.М. Черниш, М.Г. Березовий. – Київ: Центр учбової літератури, 2017. – 640 с.
3. Гнап А.К. Технічна механіка / А.К. Гнап, М.Я. Рохманов. – Харків: ХНАУ, 2003. – 198с.
4. Олофинская В.П. Техническая механика / В.П. Олофинская. – Москва: Форум,2007. – 347 с.
5. Рохманов М.Я. Фізика / М.Я. Рохманов, С.С. Авотін. – Харків: ХНАУ, 2020. – 288с.
6. Технічна механіка / І.Я. Бялер, В.Н. Левінсон, В.Ю. Саліон, В.А. Михайловський. – Київ: Вища шк., 1971. – 379 с.
7. Ткачук А.І. Технічна механіка / А.І. Ткачук. – Кіровоград: Авангард, 2015. – 260 с.
8. Федуліна А.І. Теоретична механіка / А.І. Федуліна. – Київ: Вища шк., 2005. – 319 с.
9. Черниш О.М. Теоретична механіка / О.М. Черниш, В.В. Яременко, М.Г. Березовий. – Київ: Центр учбової літератури, 2018. – 760 с.
10. Эрдеди А.А. Техническая механика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов / А.А. Эрдеди, Ю.А. Медведев, Н.А. Эрдеди. – Москва: Высш. школа, 1991. – 303 с.