УДК 534.1:539.3

ПРО УДАРНУ ВЗАЄМОДІЮ ВАЖКОГО ТВЕРДОГО ТІЛА З ПРУЖНИМ ПІВПРОСТОРОМ

Ольшанський В.П., д.ф-м.н., проф., Богомолов О.В., д.т.н., проф.,
(Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка)
Богомолов О.О., аспірант
(Луганський національний аграрний університет)

Проведено визначення основних характеристик динамічної взаємодії важкого параболоїдного деформівного тіла з пружним півпросторон при вертикальному його падінні на півпростір з малої висоти. Досліджено вплив ваги тіла, що вдаряє на його взаємодію з півпросторон. Узагальненням класичного варіанту теорії Г.Герца виведен й апробовано розрахунками нові формули для обчислення контактного зближення тіл, тривалості ударної взаємодії, розмірів еліптичної площадки контакту та максимального значення контактного тиску.

Ключові слова: *пружний удар, важке деформівне тіло, пружний півпростір, узагальнена теорія Герца.*

Постановка задачі. Задачі ударної взаємодії параболоїдних деформівних тіл з іншими масивними пружними тілами виникають при дослідженні падіння їх на підлогу або дно платформи транспортного засобу при збиранні та транспортуванні плодів та овочів деяких сільськогосподарських культур. До них умовно ніжна віднести певні сорти кавунів, динь, капусти та ін. таку форму мають і окремі види зерна, що потребують сепарування, наприклад насіння ріпаку, гороху, сої та інших культур [1]. Ударна взаємодія плодів, овочів, зерна з іншими твердими тілами призводить до їх травмування, що скорочує термін придатності їх для споживання. Тому вивчення динамічних навантажень, яким піддаються плоди при ударах з невеликими швидкостями зіткнення, становить науково-практичний інтерес.

Огляд основних джерел. Для розв'язання цієї задачі можна використовувати класичну теорію удару, запропоновану Герцем, яка дає можливість визначити місцеві деформації та контактні напруження, без урахування хвильових процесів. Ця теорія висвітлена в багатьох публікаціях, зокрема в [2, 3, 4]. Але вона не враховує додаткових динамічних навантажень на тіла, спричинених дією ваги падаючого тіла, тобто в ній ідеться про горизонтальний удар. В умовах вертикального удару з невеликою швидкістю зіткнення доводиться враховувати, також дію ваги тіла, що вдаряє. Тому далі будемо розв'язувати задачу в узагальненій постановці.

Метою статті є виведення та апробація формул для обчислення основних параметрів ударної взаємодії параболоїдного важкого тіла з іншим пружним тілом великої маси (півпростором) при вертикальному падінні з малої висоти.

Основні матеріали досліджень. Масу тіла, піддаючого удару, вважаємо нескінченною його приймаємо за пружний півпростір, утворений горизонтальною площиною. Контактне зближення тіл після зіткнення $x = x(t)$ описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} = mg - \beta x^{3/2}, \tag{1}$$

у якому:

$$\beta = \frac{4\sqrt{R_1}}{3Q}\,\frac{\left(1 + 3\varepsilon^2/8 + 15\varepsilon^4/64\right)^{1/2}}{\left(1 + \varepsilon^2/4 + 9\varepsilon^4/64 + 25\varepsilon^6/256\right)^{3/2}};$$

$$Q = \frac{1-\mu^2}{E} + \frac{1-\mu_П^2}{E_П}; \tag{2}$$

$$\varepsilon^2 = \sqrt{\frac{16\left(5 + R_2/R_1\right)^2}{9\left(3 + R_2/R_1\right)^2} + \frac{64\left(1 - R_2/R_1\right)}{3\left(3 + R_2/R_1\right)}} - \frac{4\left(5 + R_2/R_1\right)}{3\left(3 + R_2/R_1\right)},$$

де m – маса тіла, що вдаряє;

E, μ – його модуль пружності та коефіцієнт Пуассона;

$R_1 \geq R_2$ – головні радіуси кривини поверхні тіла в зоні контакту з півпросторон;

$E_П$, $\mu_П$ – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона півпростору;

g – прискорення вільного падіння; крапка над х означає похідну за часом t.

Формула (2) наближена. Вона одержана в результаті заміни повних еліптичних інтегралів першого та другого роду частковими сумами їх степеневих рядів:

$$K(\varepsilon)\approx\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}+\frac{9\varepsilon^4}{64}+\frac{25\varepsilon^6}{256}\right);\; L(\varepsilon)\approx\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{3\varepsilon^4}{64}-\frac{5\varepsilon^6}{256}\right).$$

Похибка формули (2) при $R_2 \geq 0{,}5R_1$ знаходиться в межах 5 % і дорівнює нулю, коли $R_2 = R_1$.

Рівнення (1) відрізняється від рівнення класичного варіанту теорії пружного удару наявністю додатка mg, що вносить певні зміни у розв'язок, який будуємо при початкових умовах:

$$x(0)=0\,;\; \dot{x}(0)=v\,, \tag{3}$$

де v – швидкість зіткнення тіл.

Якщо падіння відбувається з висоти h, то $v=\sqrt{2gh}$.

Для одержання формули швидкості руху, рівнення (1) подаємо у вигляді:

$$\dot{x}d\dot{x}=\left(g-\frac{\beta}{m}x^{3/2}\right)dx. \tag{4}$$

Проінтегрувавши (4), з урахуванням (3), отримуємо:

$$\frac{dx}{dt}=v\sqrt{1+\frac{2g}{v^2}x-\frac{4}{5}\frac{\beta}{mv^2}x^{5/2}}\,. \tag{5}$$

Звідси випливає рівняння для обчислення максимального зближення тіл γ при ударі:

$$1+\frac{2g}{v^2}\gamma-\frac{4}{5}\frac{\beta}{mv^2}\gamma^{5/2}=0. \tag{6}$$

Корінь цього трансцендентного рівнення доводиться визначити числовими методами.

Так за ітераційною формулою Ньютона [5]:

$$\gamma_{n+1}=\frac{v^2+\frac{6}{5}\frac{\beta}{m}\gamma_n^{5/2}}{2\left(\frac{\beta}{m}\gamma_n^{3/2}-g\right)},\; n=1,2,\ldots. \tag{7}$$

Умовою використання (7) є нерівність:

$$\frac{\beta}{v}\gamma_n^{3/2}-g>0,$$

тобто корінь рівняння (6) має бути простим і додатнім.

За початкове наближення доцільно брати:

$$\gamma_1 = \left(\frac{5m}{4\beta} v^2 \right)^{2/5} . \tag{8}$$

Саме таке значення γ дає класична теорія [2,4].

Замість (7) для проведення ітерацій, можна також використовувати рекурентне співвідношення:

$$\gamma_{n+1} = \left[\frac{5m}{4\beta} \left(v^2 + 2g\gamma_n \right) \right]^{2/5}, \ n = 1, 2, \ldots , \tag{9}$$

яке випливає з (5).

При $g = n = 0$ формула (9) переходить в (8).

Згідно з (5), час ударної взаємодії t_y подається інтегралом:

$$t_y = \frac{2}{v} \int_0^{\gamma} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{2gx}{v^2} - \frac{4\beta}{5mv^2} x^{5/2}}} . \tag{10}$$

Переходом до нової змінної інтегрування $y = x/\gamma$ виразу (10) надаємо вигляд:

$$t_y = \frac{2\gamma}{v} I(\lambda),$$

де $I(\lambda) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^{5/2} + \lambda y \left(1 - y^{3/2} \right)}}$, $\lambda = \frac{2g\gamma}{v^2} = \frac{\gamma}{h}$.

Інтеграл $I(\lambda)$ не виражається в елементарних функціях

Тому для обчислень t_y доводиться використовувати лінійну інтерполяцію та спеціально складену таблицю $I(\lambda)$.

Таблиця

Значення $I(\lambda)$

λ	$I(\lambda)$	λ	$I(\lambda)$	λ	$I(\lambda)$
0	1,4716	0,15	1,4272	0,40	1,3624
0,005	1,4701	0,20	1,4134	0,45	1,3506
0,01	1,4685	0,25	1,4000	0,50	1,3391
0,05	1,4563	0,30	1,3870	0,55	1,3280
0,10	1,4415	0,35	1,3745	0,60	1,3172

Значення $I(0) \approx 1{,}4716$ відповідає класичному варіанту теорії Герца [4].

Зазначимо, що $I(\lambda)$ це збіжний невласний інтеграл другого роду і при його комп'ютерних обчисленнях треба виділити сингулярність у підінтегральної функції, яку вона має при $y = 1$.

Користуючись (10) можна записати інтегральне подання:

$$t_{ун} = \frac{2}{v} \int_0^{\gamma} \frac{dx}{\sqrt{1 + \lambda - \frac{4\beta}{5mv^2} x^{5/2}}} \tag{11}$$

для оцінки знизу часу контактної взаємодії $t_{ун}$.

Інтеграл в (11) виражається через відому спеціальну функцію. Щоб одержати цей вираз формулі (11) надаємо вигляд:

$$t_{ун} = \sqrt{\frac{5m}{\beta}} \int_0^{\gamma} \frac{dx}{\sqrt{\alpha^{5/2} - x^{5/2}}},$$

де $\alpha = \left(\frac{5mv^2(1+\lambda)}{4\beta} \right)^{2/5}$.

Далі вводимо допоміжну змінну інтегрування $u = x/\alpha$. Тоді:

$$t_{ун} = \sqrt{\frac{5m}{\beta\sqrt{\alpha}}} \int_0^{\gamma/\alpha} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{5/2}}}.$$

Наступним перетворенням: $u^{5/2} = \xi$; $u = \xi^{2/5}$; $\frac{5}{2} u^{3/2} du = d\xi$, $du = \frac{2}{5} u^{-3/2} d\xi = \frac{2}{5} \xi^{-3/5} d\xi$, одержуємо:

$$t_{ун} = \frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{5\beta\sqrt{\alpha}}} \int_0^{w} \frac{d\xi}{\xi^{3/5} (1 - \xi)^{1/2}}, \tag{12}$$

де $w = \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{5/2}$.

У підсумку (12) зводимо до:

$$t_{ун} = \frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{5\beta\sqrt{\alpha}}} B_w\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right).$$

Тут $B_w\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right)$ - неповна бета–функція [6,7].

Якщо не враховувати дію сили ваги, то $\lambda = 0$; $\alpha = \gamma$; $w = 1$; $\beta = \frac{5mv^2}{4\gamma^{5/2}}$; $\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{5\beta\sqrt{\alpha}}} = \frac{4\gamma}{5v}$. Неповна бета–функція стає повною і виражається через затабульовані Гама-функції $\Gamma(z)$. Тому:

$$t_{ун} = \frac{4\gamma}{5v} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Оскільки: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(0{,}4) \approx 2{,}21825$; $\Gamma(0{,}9) \approx 1{,}06867$, то:

$$t_{ун} = 1{,}4716 \frac{2\gamma}{v}.$$

Це значення $t_{ун}$ дорівнює $t_у$, яке одержали раніше за допомогою таблиці при $\lambda = 0$. У випадку $\lambda = 0$ нижня оцінка дає точне значення $t_у$, а при інших λ $t_{ун} < t_у$.

Обчисливши γ, далі нескладно знайти максимум сили контактної взаємодії $P_{\max}$, бо:

$$P_{\max} = \beta\gamma^{3/2}.$$

При цьому максимуми півосей еліптичної області контакту становлять:

$$a_{\max} = \left[\frac{3}{4} Q P_{\max} R_1 \left(1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \frac{15}{64}\varepsilon^4\right)\right]^{1/3}; \; b_{\max} = a_{\max}\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

а максимальний тиск q_{max} в центрі цієї області дорівнює:

$$q_{\max} = \frac{3P_{\max}}{2\pi a_{\max} b_{\max}}.$$

Числові результати. Для проведення розрахунків приймаємо вихідні дані найбільш показові для деяких відів овочів, плодів та зерна, наприклад гарбуз, яблуко, насіння ріпаку. Для гарбуза вихідні дані приймаємо: $R_1 = 0{,}3$ м; $R_2 = 0{,}174$ м; $m = 12$ кг; $E = 2\cdot10^6$ Па; $\mu = 0{,}5$; $E_n = 5\cdot10^8$ Па; $\mu_n = 0{,}45$; $v = 0{,}5$ м/с. Для цих даних: $\varepsilon^2 = 0{,}534$; $Q = 3{,}766\cdot10^{-7}$ Па; $\beta = 1{,}685\cdot10^6$ м$^{1/2}$/Па. Початкове наближення $\gamma_1 = 0{,}00548$ м. Інтераціями по формулі (7) одержуємо: $\gamma_2 = 0{,}00662$; $\gamma_3 = 0{,}00646$; $\gamma_4 = 0{,}00646$ м. За ітераціями по формулі (9) маємо; $\gamma_2 = 0{,}00633$; $\gamma_3 = 0{,}00644$; $\gamma_4 = 0{,}00646$ м. Отже, збіжність ітерацій по формулі (7) дещо швидша, ніж по (9). Прийнявши $\gamma = \gamma_4$, знаходимо, що: $\lambda = 0{,}5070$; $I(\lambda) = 1{,}3375$; $t_y = 0{,}0346$ с; $P_{\max} = 874{,}880$ Н; $a_{\max} = 0{,}0455$ м; $b_{\max} = 0{,}0311$ м; $q_{\max} = 295201$ Па. Якщо проводити розрахунки за класичними варіантом теорії, без урахування ваги падаючого тіла, то одержано: $t_y = 0{,}0323$ с; $P_{\max} = 683{,}551$ Н; $a_{\max} = 0{,}0419$ м; $b_{\max} = 0{,}0286$ м; $q_{\max} = 272353$ Па. Ці числові результати менші за попередні, причому різниця максимумів зусиль $\Delta P_{\max} = 191{,}329$ Н, тобто вона суттєво більша ваги тіла, що вдаряє $mg = 117{,}72$ Н. Це є наслідком нелінійності розглянутої задачі.

Аналогічно виконаємо розрахунки для яблука та ріпаку.

Вихідні данні для яблука з урахуванням дії сили гравітації: $m = 110\cdot10^{-3}$ кг; $R = 0{,}03$ м; $\mu = 0{,}5$; $E = 2\cdot10^6$ Па; $v = 0{,}5$ м/с; $E_n = 2\cdot10^6$ Па. Для цих даних $Q = 0{,}377\cdot10^{-6}$ Па; $\beta = 6{,}126\cdot10^5$ м$^{1/2}$/Па. Одержуємо $\gamma_1 = 0$; $\gamma_2 = 0{,}00126$; $\gamma_3 = 0{,}001306$; $\gamma_4 = 0{,}001308$; $\gamma_5 = \gamma_4$; $P_{\max} = 28{,}979$ Н; $a_{\max} = b_{\max} = 0{,}006264$ м; $q_{\max} = 352631{,}6$ Па. Без урахування сили гравітації отримаємо $\gamma = 0{,}00126$; $P_{\max} = 27{,}399$ Н;

$a_{\max} = b_{\max} = 0{,}006148$ м; $q_{\max} = 3460751$ Па.

Вихідні данні для насіння ріпаку з урахуванням дії сили гравітації: $m = 5 \cdot 10^{-6}$ кг; $R = 0{,}001$ м; $E = 0{,}61 \cdot 10^{9}$ Па; $\mu = 0{,}45$; $v = 0{,}5$ м/с; $E_n = 5 \cdot 10^{8}$ Па; $\mu_n = 0{,}45$. Отже отримуємо $Q = 2{,}911 \cdot 10^{-9}$ Па; $\beta = 6{,}126 \cdot 10^{5}$ м$^{1/2}$/Па; $\gamma_1 = 0$; $\gamma_2 = 0{,}000006504$; $\gamma_3 = 0{,}000006505$; $\gamma_4 = \gamma_3$; $P_{\max} = 0{,}240$ Н; $a_{\max} = b_{\max} = 0{,}0000807$ м; $q_{\max} = 17595659{,}8$ Па та без урахування сили гравітації: $\gamma = 0{,}000006504$; $P_{\max} = 0{,}240$ Н; $a_{\max} = b_{\max} = 0{,}0000807$ м; $q_{\max} = 17595659{,}8$ Па.

Тобто отримані дані свідчать, що з урахуванням гравітації максимум обчисленої сули удару для таких тіл як гарбуз збільшується на 28 %, для яблука на 5,77 %, а для насіння ріпаку збільшення сили удару дорівнює 0.

Висновки. Виведені тут контактні формули узагальнюють класичний варіант теорії Герца і придатні для обчислення основних характеристик удару при вертикальному падінні важкого тіла на пружний півпростір. Урахування дії сили гравітації, при невеликих швидкостях удару, суттєво збільшує розрахункові величини порівняно до тих, що дає класична теорія, для таких важких тіл як, наприклад гарбуз, для таких тіл до яких відноситься зерно урахуванням сили тяжіння під час удару можна знехтувати.

Список літератури

1. Богомолов А.В. Сепарация трудноразделимых сыпучих смесей/ А.В.Богомолов.–Харьков: ХНТУСХ, 2013–308 с.

2. Гольдский В. Удар. Теория и физические свойства содержимых тел/ В.Гольдский. – М.: Стройиздат, 1965. – 447 с.

3. Кильчесвский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар/ Н.А.Кильчесвский. – К.: Наукова дунка, 1976–319 с.

4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара/ Я.Г.Пановко. –М.: Наука, 1987 –223 с.

5. Бахвалов Н.С. Численные методы/ Н.С.Бахвалов,

Н.П.Жидков, Г.М.Кобельников. – М.: Бинон, 2001 – 630с.

6. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) А.Абрамовиц, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. –832 с.

7. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров)/Г.Корн, Т.Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

Аннотация

Проведено определение основных характеристик динамического взаимодействия тяжелого параболоидного деформированного тела с упругим полупространством при вертикальном его падении на полупространством с малой высоты. Исследовано влияние веса ударного тела на его взаимодествие с полупространством. Обобщением классического варианта теории Г.Герца выведено и апробировано расчетами новые формулы для вычисления контактного сближения тел, продолжительности ударного взаимодействия, размеров эллиптической площадки контакта и максимального значения контактного давления.

Ключевые слова: *упругий удар, тяжелое деформированное тело, упругое полупространство, обобщенная теория Герца.*

Abstract

The main characteristics of the dynamic interaction of a heavy paraboloid deformed body with an elastic half-space are determined under its vertical incidence on a half-space from a low altitude. The effect of the weight of a shock body on its interaction with a half-space is studied. A generalization of the classical version of the theory of Hertz is deduced and approved by calculations new formulas for calculating the contact approach of bodies, the duration of the shock interaction, the dimensions of the elliptical contact area and the maximum value of the contact pressure.

Key words: *elastic impact, heavy deformed body, elastic half-space, generalized Hertz theory.*