

УДК 534.1

ПРО КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ДЕЯКИХ ОВОЧІВ З ГРУНТОМ

Ольшанський В.П., д.ф.-м.н., проф., Бурлака В.В., к.т.н., доц.,
Сліпченко М.В., к.т.н., доц.

*(Харківський національний технічний університет сільського
господарства імені Петра Василенка)*

Розглянуто контактну взаємодію з ґрунтом овочів, які тривалий час зростають, а потім дозрівають на поверхні землі. Для моделювання контактної взаємодії використано відомий в теорії пружності розв'язок задачі Г. Герца. Ґрунт змодельовано пружним півпростором, а овочі – пружним тілом, яке обмежене в зоні контакту з землею поверхнею другого порядку. Одержано формули для обчислення розмірів еліптичної області контакту та розподілу на ній надлишкового тиску, спричиненого дією ваги овочевого тіла. Показано, що цей тиск може бути суттєвим для масивних овочів, таких як: кавуни, дині, гарбузи та ін. З метою спрощення розрахунків складена спеціальна таблиця, що дозволяє знайти ексцентриситет області контакту та значення повних еліптичних інтегралів першого та другого роду, задіяних у розрахункових формулах, при відомому відношенні головних радіусів кривизни граничної поверхні тіла, що давить на пружний півпростір. Наведено приклад розрахунку.

Ключові слова: *контактна задача Герца, ґрунт як пружний півпростір, пружне тіло овочу, еліптична зона контакту, надлишковий тиск.*

Вступ. Інформація про напруження, що виникають в умовах гравітації, потрібна для дослідження їх впливу на процес старіння та скорочення терміну придатності овочів до споживання. Оскільки овочі, що при зростанні лежать на поверхні землі, контактують з нею лише на частині власної граничної поверхні, то саме там виникає надлишковий тиск, який спричинює місцеві внутрішні напруження, що сприяють деградації овочів. Тому обчислення контактного тиску і розмірів зони його прикладення є важливою задачею природокористування.

Аналіз останніх досліджень. Розв'язок цієї задачі у досить загальному вигляді одержав Г. Герц [1, 2]. Але він розглядав стискання високо модульних пружних тіл. Тому його розв'язок часто

використовують у технічних розрахунках [2]. Тут робимо спробу задіяти його в ароінженерії, приймаючи овочі за низько модульні пружні тіла. Це припущення стосується лише поверхневого пружного шару, тобто товстостінної захисної оболонки, яка за механічними властивостями може суттєво відрізнятись від властивостей середини овочу. Отже далі йдеться лише про місцеві контактні деформації, які розвиваються під дією ваги у приповерхневому шарі овочу. Таке припущення не перечить теорії Г. Герца.

Метою даної статті є розробка та апробація способу обчислення надлишкового тиску та розмірів зони його прикладення до поверхні овочу з боку ґрунту, на якому він знаходиться під дією власної ваги.

Постановка задачі та її розв'язок. Ґрунт приймаємо за пружний півпростір, обмежений горизонтальною площиною. Його модуль пружності та коефіцієнт Пуассона позначаємо символами E_* і μ_* . Аналогічні пружні характеристики приповерхневого шару овочу позначаємо через E , μ . Припускаємо, що в області контакту поверхнею овочу є параболоїд:

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2},$$

де $R_1 \geq R_2$ – головні радіуси кривизни граничної поверхні.

У полі земного тяжіння з прискоренням g стискаючою силою виступає вага $P = Mg$ овочевого тіла з масою M .

За цих припущень, із розв'язку контактної задачі теорії пружності випливає, що площадка прикладення тиску обмежена еліпсом, який має піввісі [2]:

$$a = \left[MgQR_1 \frac{3}{\pi} D(\varepsilon) \right]^{\frac{1}{3}}; \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}. \quad (1)$$

$$\text{Тут} \quad Q = \frac{1-\mu_*^2}{E_*} + \frac{1-\mu^2}{E}; \quad D(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} [K(\varepsilon) - L(\varepsilon)]; \quad K(\varepsilon),$$

$L(\varepsilon)$ – повні еліптичні інтеграли відповідно першого та другого роду.

Вони затабульовані в [3], [4] та інших виданнях зі спеціальних функцій.

Ексцентриситет площадки контакту ε є коренем трансцендентного рівняння:

$$(1 - \varepsilon^2) \frac{D(\varepsilon)}{K(\varepsilon) - D(\varepsilon)} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (2)$$

Він залежить від співвідношення головних радіусів кривизни.

З метою спрощення визначення ε складена спеціальна таблиця. Методом лінійної інтерполяції наведених в ній даних легко визначити ε в широкому діапазоні відношень R_2 / R_1 .

У випадку $R_2 / R_1 \geq 0,9$ замість таблиці можна використовувати наближену формулу:

$$\varepsilon^2 = \sqrt{\left[\frac{4 \cdot (5 + R_2 / R_1)}{3 \cdot (3 + R_2 / R_1)} \right]^2 + \frac{64 \cdot (1 - R_2 / R_1)}{3 \cdot (3 + R_2 / R_1)} - \frac{4 \cdot (5 + R_2 / R_1)}{3 \cdot (3 + R_2 / R_1)}}. \quad (3)$$

До неї призводить використання апроксимацій:

$$K(\varepsilon) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{9\varepsilon^4}{64} \right); \quad L(\varepsilon) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{3\varepsilon^4}{64} \right); \quad (4)$$

$$D(\varepsilon) \approx \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{8} + \frac{15\varepsilon^4}{64} \right); \quad K(\varepsilon) - D(\varepsilon) \approx \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{3\varepsilon^4}{64} \right)$$

Підстановка (4) в (2) і відкидання степенів ε вище четвертого перетворює трансцендентне рівняння в наближене бікватратне, що має розв'язок (3).

Для відношення $R_2 / R_1 = 1$ $\varepsilon = 0$, тобто еліптична область контакту становиться круговою.

Таблиця 1

Значення ε^2 , $K(\varepsilon)$ і $L(\varepsilon)$ для різних R_2 / R_1

$10 \frac{R_2}{R_1}$	$10 \varepsilon^2$	$K(\varepsilon)$	$L(\varepsilon)$	$10 \frac{R_2}{R_1}$	$10 \varepsilon^2$	$K(\varepsilon)$	$L(\varepsilon)$
0,2	9,93	3,872	1,012	5,2	5,81	1,930	1,309
0,4	9,84	3,464	1,024	5,4	5,60	1,909	1,320
0,6	9,74	3,226	1,036	5,6	5,38	1,888	1,331
0,8	9,63	3,054	1,047	5,8	5,16	1,868	1,343
1,0	9,50	2,908	1,060	6,0	4,94	1,849	1,354
1,2	9,38	2,805	1,072	6,2	4,71	1,830	1,365
1,4	9,24	2,708	1,084	6,4	4,48	1,812	1,376
1,6	9,10	2,628	1,096	6,6	4,25	1,795	1,387

Продовження таблиці 1

1,8	8,95	2,555	1,109	6,8	4,02	1,779	1,398
2,0	8,80	2,493	1,121	7,0	3,78	1,763	1,410
2,2	8,65	2,438	1,132	7,2	3,55	1,748	1,420
2,4	8,48	2,383	1,145	7,4	3,31	1,732	1,431
2,6	8,32	2,337	1,156	7,6	3,06	1,717	1,443
2,8	8,15	2,293	1,168	7,8	2,82	1,704	1,453
3,0	7,97	2,250	1,181	8,0	2,57	1,690	1,464
3,2	7,79	2,212	1,192	8,2	2,32	1,676	1,475
3,4	7,61	2,177	1,204	8,4	2,07	1,663	1,486
3,6	7,42	2,142	1,216	8,6	1,82	1,651	1,497
3,8	7,23	2,111	1,228	8,8	1,57	1,639	1,507
4,0	7,04	2,081	1,239	9,0	1,31	1,626	1,518
4,2	6,84	2,052	1,251	9,2	1,05	1,615	1,529
4,4	6,64	2,025	1,263	9,4	0,79	1,603	1,539
4,6	6,44	2,000	1,274	9,6	0,53	1,592	1,550
4,8	6,23	1,975	1,286	9,8	0,27	1,582	1,560
5,0	6,02	1,952	1,297	10	0,00	1,571	1,571

У відповідності з розв'язком Г.Герца розподіл тиску в зоні контакту описується виразом [1, 2]:

$$q(x, y) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Mg}{\pi ab} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Він максимальний у центрі еліптичної площадки і становить:

$$q_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Mg}{\pi ab},$$

що легко обчислити знаючи розміри a і b .

Числові результати. Для проведення розрахунків приймаємо: $R_1 = 0,5 \text{ м}$; $R_2 = 0,15 \text{ м}$; $M = 9 \text{ кг}$; $E = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}$; $\mu = 0,35$; $E_* = 4 \cdot 10^7 \text{ Па}$; $\mu_* = 0,3$. Обчисленням одержуємо: $R_2 / R_1 = 0,3$; $Q = 4,615 \cdot 10^{-7} \text{ Па}^{-1}$. По таблиці знаходимо: $\varepsilon^2 = 0,797$; $D(\varepsilon) = 1,341$. Далі за формулами (1) отримуємо: $a = 0,0297 \text{ м}$; $b = 0,0134 \text{ м}$. Для цих розмірів максимальний надлишковий тиск становить 105923 Па . Таким чином, в центрі площадки контакту повний тиск у два рази перевищує атмосферний.

Висновки. Викладений спосіб, з використанням спеціальної таблиці, дає можливість обчислювати розміри еліптичної області контакту з ґрунтом овочів, які лежать на поверхні землі та визначити

надлишковий тиск, що виникає в зоні контакту. Ця інформація потрібна для розрахунку напружено-деформованого стану овочів, від чого залежить час їх деградації.

Список літератури

1. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
2. Гурняк Л.І. Опір Матеріалів / Л.І. Гурняк, Ю.В. Гуцуляк, Т.Б. Юзків. – Львів: Новий світ. – 2005. – 364 с.
3. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука. – 1979. 832 с.
4. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука. – 1977. – 344 с.

Аннотация

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕКОТОРЫХ ОВОЩЕЙ С ПОЧВОЙ

Рассмотрено контактное взаимодействие с грунтом овощей, которые длительное время растут, а затем созревают на поверхности земли. Для моделирования контактного взаимодействия использовано известное в теории упругости решение задачи Г. Герца. Грунт смоделирован упругим полупространством, а овощи – упругим телом, которое ограничено в зоне контакта с землей поверхностью второго порядка. Получены формулы для вычисления размеров эллиптической области контакта и распределения на ней избыточного давления, вызванного действием веса овощного тела. Показано, что это давление может быть существенным для массивных овощей, таких как: арбузы, дыни, тыквы и др. С целью упрощения расчетов составлена специальная таблица, которая дает возможность найти эксцентриситет области контакта и значения полных эллиптических интегралов первого и второго рода, задействованных в расчетных формулах, при известном отношении главных радиусов кривизны граничной поверхности тела, которое давит на упругое полупространство. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: *контактная задача Герца, почву как упругое полупространство, упругое тело овоща, эллиптическая зона контакта, избыточное давление.*

Abstract

ABOUT CONTACT INTERACTION SOME VEGETABLES WITH THE SOIL

The contact interaction with the soil of vegetables which grows for a long time and then ripens on the surface of the earth is considered. To simulate the contact interaction, the solution of the Hertz problem known in the theory of elasticity is used. The soil is modeled by an elastic half-space, and vegetables – by an elastic body, which is limited in the zone of contact with the ground by a surface of the second order. Formulas are obtained for calculating the dimensions of the elliptical region of contact and the distribution of excess pressure on it, caused by the weight of the vegetable body. It is shown that this pressure can be significant for massive vegetables such as watermelons, melons, pumpkins, etc. To simplify the calculations, a special table has been compiled which makes it possible to find the eccentricity of the contact region and the values of the full elliptic integrals of the first and second kind involved in calculated formulas, for a certain ratio of the main radius of curvature of the boundary surface of the body, which presses on the elastic half-space. An example of calculation is given.

Key words: *Hertz contact problem, soil as an elastic half-space, elastic body of the vegetable, elliptical contact zone, overpressure.*

УДК 534.1:539:3

ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ УДАРОМ ЗАДЕМПФОВАНОЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ В ОСЦИЛЯТОР

Ольшанський В.П., д.ф.-м.н., проф., Богомолов О.В., д.т.н., проф.,
*(Харківський національний технічний університет сільського
господарства імені Петра Василенка)*

Богомолов О.О., аспірант
(Луганський національний аграрний університет)

Розглянуто вертикальний абсолютно непружний удар падаючого тіла по твердому тілу, яке закріплено на пружині з в'язким демпфером. Показано, що внаслідок такого удару неколивальна дисипативна система, з властивим їй аперіодичним рухом, може переходити в дисипативну коливальну систему. З'ясовано достатні для цього умови. Одержано аналітичні розв'язки диференціального рівняння коливального руху після удару. Виведено замкнені формули для обчислення максимального переміщення системи і часу його досягнення. Показано, що одержані аналітичні