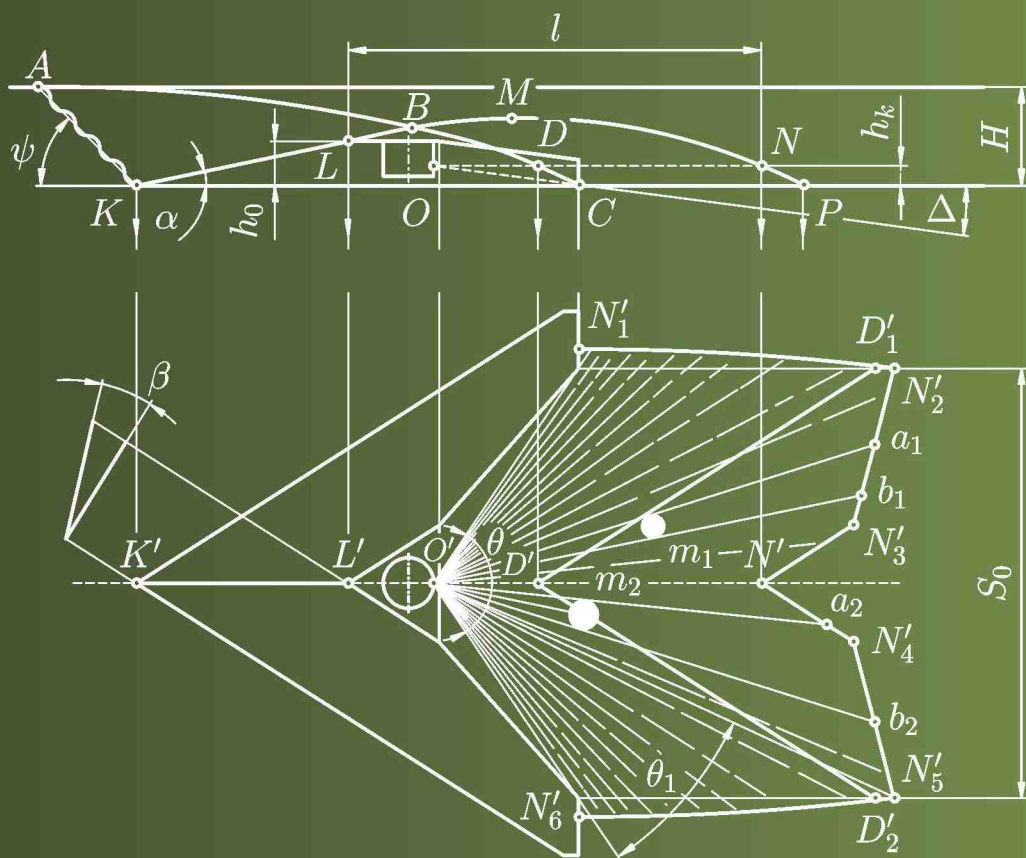


**В.И. МЕЛЬНИК**

# **ВНУТРИПОЧВЕННОЕ ВНЕСЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ В РАСТЕНИЕВОДСТВЕ**



**Харьков 2010**

В.И.МЕЛЬНИК

**ВНУТРИПОЧВЕННОЕ  
ВНЕСЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ  
В РАСТЕНИЕВОДСТВЕ**

Харьков 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

МИНИСТЕРСТВО АГРАРНОЙ ПОЛИТИКИ УКРАИНЫ

Харьковский национальный технический университет  
сельского хозяйства имени Петра Василенко (ХНТУСХ)

В.И.МЕЛЬНИК

**ВНУТРИПОЧВЕННОЕ  
ВНЕСЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ  
В РАСТЕНИЕВОДСТВЕ**

Харьков  
“Міськдрук”  
2010

УДК 631.348  
ББК 40.726  
М 48

Издается по решению ученого совета  
Харьковского национального технического университета сельского хозяйства  
имени Петра Василенко (протокол № 9 от 27 мая 2010 года).

Рецензенты: Первый проректор Харьковского национального технического университета сельского хозяйства имени Петра Василенко, чл.-кор. НААНУ, докт. техн. наук, проф., *Л.Н.Тищенко*;

Главный научный сотрудник Украинского научно-исследовательского института прогнозирования и испытания техники и технологий для сельскохозяйственного производства имени Леонида Погорелого, чл.-кор. НААНУ, докт. техн. наук, проф., *А.С.Кушнарев*.

М 48. **Мельник В.И.** Внутрипочвенное внесение жидкостей в растениеводстве: Монография. — Харьков: “Міськдрук”, 2010, — 439 с.: ил.

ISBN 978-966-1664-69-1

В монографії викладено наукові основи узгодження процесів взаємодії робочих органів із ґрунтом та функціонування гідравлічних розпилювачів. Ґрунт розглядається як суцільне середовище, що підпорядковується теоріям пластичності та граничної рівноваги, а факел розпилу робочої рідини, як векторне поле. При моделюванні посіву застосовувався метод Монте-Карло. Розроблено технологію стрічкового післяпосівного підґрунтового внесення гербіцидів. Польові дослідження проводились із застосуванням ізотопних методів та сцинтиляційної техніки.

Для науковців і фахівців, що працюють в області механізації сільськогосподарського виробництва.

В монографии изложено научные основы согласования процессов взаимодействия рабочих органов из почвой та функционирования гидравлических распылителей. Грунт рассматривается как сплошная среда, подчиняющаяся теориям пластичности и предельного равновесия, а факел распыла рабочей жидкости, как векторное поле. При моделировании посева применяется метод Монте-Карло. Разработано технологию ленточного послепосевного внутрипочвенного внесения гербицидов. Полевые исследования проводились с применением изотопных методов та сцинтилляционной техники.

Для научных работников и специалистов, работающих в области механизации сельскохозяйственного производства.

Ил. 171. Табл. 29. Библиогр. 426.

ISBN 978-966-1664-69-1

УДК 631.348  
ББК 40.726  
© В.И.Мельник 2010 р.



## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время сельскохозяйственные земли в нашей стране находятся в крайне запущенном состоянии. Выход из сложившейся ситуации лежит в использовании методов и средств интегрированной системы защиты растений, одним из важных звеньев которой, в частности, является применение далеко небезвредных для окружающей среды гербицидов. Их применение должно выполняться высокоэффективными и экологически щадящими методами. Применительно к почвенным препаратам таким методом прежде всего является ленточное внутрипочвенное их внесение. В случае выхода земледелия в нашей стране на европейский уровень, востребованность химических методов борьбы с сорняками останется, хотя и сместится по шкале приоритетов в сторону страховых приемов, которые будут применяться для быстрого исправления технологических ошибок или незапланированных технологических ситуаций. Кроме того, технические средства для применения гербицидов с успехом могут использоваться на внесении химических удобрений, в частности в микродозах, и для иных целей.

Таким образом, разработка экологически щадящих технологий и технических средств для внесения жидких удобрений и химзащиты растений является актуальной научно-производственной проблемой на пути развития растениеводства в Украине. Ее решению посвящена настоящая работа. Далее приведем краткое описание полученных результатов.

Разработаны научные основы взаимодействия рабочих органов с почвой, когда последняя рассматривается как весома сплошная среда и описывается системой квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Для нее разработан новый метод поиска характеристического решения, который позволил получить соотношения, выполняющиеся вдоль декартовых координат и связывающие между собой параметры напряженного состояния и независимые координаты. Используя эти соотношения получены новые положения теории развития трещин в грунте.

Разработана математическая модель процесса распыления рабочей жидкости гидравлическими распылителями. В ее основе лежит представление о факеле распыла как о векторном поле. На основе применения такой модели сформулированы требования к распылителям, в частности обоснована необходимость получения их нормированной двумерной характеристики. Для ее получения разработан стенд и математический метод представления двумерного распределения жидкости распылителем в виде бикубического сплайна. Разработаны математические методы позволяющие расчетным путем получать параметры распределения рабочей жидкости по обрабатываемой поверхности в случае произвольной ориентации распылителя.

Разработаны функциональные связи, позволяющие согласовывать конструктивные и режимные параметры рабочего органа, предназначенного для внутрипочвенного внесения жидких средств химзащиты растений.

Разработанные теоретические методы позволили получить ряд специализированных конструкций рабочих органов для ленточного внутрипочвен-

ного внесения жидких средств химизации, в том числе предназначенных для работы на комковатых почвах, и реализующих метод размазывания препарата по дну борозды. Разработана технология послепосевого ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов, которая может быть реализована самостоятельными агрегатами использующими метод их вождения по технологическим щелям в почве. Для осуществления такой технологии разработан ряд технических средств, предназначенных для нарезки технологических щелей и для вождения агрегатов по ним. Для случая, когда послепосевное ленточное внутрипочвенное внесение гербицидов осуществляется комбинированными машинами, орудиями или агрегатами показано, что рабочие органы для внутрипочвенного внесения гербицидов должны располагаться на собственных подвесках и не иметь жестких связей с идущими впереди сошниками.

Полевые исследования неравномерности распределения химикатов под слоем почвы в случае применения разработанных технических средств и технологий проводились с использованием изотопных методов, в основном (где это было необходимо) без выемки проб из почвы. При этом применялась сцинтилляционная исследовательская техника, в том числе и авторской разработки. В качестве радионуклида использовался фосфор-32 (бета-излучатель) и технеций-99m (гамма-излучатель). Обосновано, что в случае применения фосфора-32 удастся регистрировать только тормозное гамма-излучение, что приводит к потере точности исследований. В этом смысле применение технеция-99m предпочтительнее, только необходимо учитывать время на полураспад (6,02 ч.).

Поскольку применение разработанной технологии послепосевого внутрипочвенного внесения гербицидов влечет за собой вероятностное перераспределение ранее высеянных семян полезных растений, были проведены соответствующие исследования. Для этого была разработана специальная методика получения несмещенных оценок параметров распределения семян растений в пределах ленты посева рядка. При этом использовалась разработанная модель посева. В ее основе лежит метод Монте-Карло. Параметры модели проверялись путем применения полевых исследований.

Для экспресс-оценки эффективности и безвредности для человека гербицидного действия предложено использовать метод внутриклеточного микроэлектрофореза. Исследования показали его высокую перспективность.

Вопросы экологичности и эргономичности нашли свое отражение в разработанных конструктивно-технологических решениях, в частности, в специальной конструкции распылителя и методе его безрезьбового крепления.

Хозяйственные испытания показали эффективность предлагаемых инженерно-технологических решений. Их применение позволяет отказаться от выполнения некоторых самостоятельных технологических операций (предпосевная культивация, заделка гербицидов, послепосевное прикатывание кольчатощпоровыми катками) и снизить расход препаратов до 74%, а значит в той же мере снизить вредное воздействие на окружающую среду. Окупаемость дополнительных капиталовложений не превышает 2,6 года.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

ВВ	— внутрипочвенное внесение;
ВВГ	— внутрипочвенное внесение гербицидов;
КП	— классификационный признак;
ЛВГ	— ленточное внесение гербицидов;
МИВ	— метка идеального высева;
МНПК	— международная научно-практическая конференция;
МНТК	— международная научно-техническая конференция;
ММП	— математическая модель посева;
МЭФ	— микроэлектрофорез;
НИМ	— навесная исследовательская машина;
ПР	— пятно распыла;
п.г.	— подглава;
ПСЧ	— псевдослучайное число;
РЖ	— рабочая жидкость;
РНТК	— республиканская научно-техническая конференция;
РО	— рабочий орган;
СО	— светоотражающая оболочка;
ТС	— техническое средство;
ТСПГ	— технические средства для применения гербицидов;
УМО	— ультрамалообъемный;
ФР	— факел распыла;
ФЭУ	— фотоэлектронный умножитель;
ЩН	— щелеватель-направитель;
ЭО%	— количество электроотрицательных ядер в процентах.

ГЛАВА 1  
АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ

1.1. Агротехническое обоснование прогрессивных технологий  
использования гербицидов на посевах пропашных культур

Комплексное использование взаимосвязанных организационных, агротехнических, химических и других мероприятий, способствующих лучшему росту и развитию культурных растений, а также угнетению и уничтожению сорняков, позволяет достигнуть прироста урожая на 10–12% [1].

Кукуруза — важнейшая из пропашных культур мирового земледелия [2]. Недобор урожая на ее посевах при сильной засоренности может составить 24 ц/га [3]. Биологической особенностью кукурузы, обуславливающей возможность массового произрастания сорняков в ее посевах, является высокая чувствительность к сорнякам [4] и медленный рост в начальный период вегетации [5]. Механические приемы борьбы с сорной растительностью и химические обработки, применяющиеся в отдельности, не дают желаемых результатов, поэтому в большинстве случаев их используют в комплексе [6, 8–15]. Возможно и летне-осеннее применение гербицидов после уборки предшественника, а также по вегетирующим растениям [4, 16].

Большое разнообразие гербицидов и их смесей (около 100 наименований) [4], а также их препаративных форм (эмульгирующиеся концентраты, которые при разведении с водой образуют эмульсии; смачивающиеся порошки, образующие с водой суспензии; растворы в воде и органических растворителях; гранулированные препараты; капсулы; пасты, растворяющиеся в воде, и применяющиеся в сухом виде порошки; пенящиеся жидкости и др. [4, 16, 17]), существенно затрудняет не только использование гербицидов, но и разработку новых экологически обоснованных приемов и технических средств (ТС) для их применения. Чтобы выделить из этого многообразия гербициды, сходные по физико-химическим и другим свойствам, их классифицируют по группам (рис. 1.1) [3, 16].

На посевах пропашных культур получили широкое распространение органические контактные и системные гербициды избирательного действия [4, 19, 20]. В качестве основных гербицидов чаще используют препараты корневого действия, чаще именуемые почвенными, а гербициды листового действия — в



Рис. 1.1. Классификация гербицидов

качестве страховых [21, 22]. Основное преимущество почвенных гербицидов заключается в продолжительности их токсического действия, которое нередко распространяется на весь вегетационный период, а также — в меньшей зависимости их эффективности от погодных условий [20]. Применение страховых гербицидов по вегетирующим растениям приводит к уничтожению ранее взошедших сорняков, но не позволяет предотвратить появления новых, а, значит, вероятно необходима необходимость повторения таких обработок [6]. В целом рентабельность основных и страховых гербицидов на посевах зерновых может превышать 500% [16]. Но почвенные препараты дороже и поэтому, в ряде случаев, предпочтительнее послевсходовые обработки [6, 7]. Находясь в поверхностном слое, почвенные гербициды проявляют токсическое действие прежде всего на прорастающие сорняки. Раннее подавление конкурентов способствует повышению урожайности культуры [16]. Следует подчеркнуть, что преимущества почвенных гербицидов удастся использовать не всегда. От способа внесения почвенных препаратов зависит не только их эффективность, а даже избирательность [16]. Способы применения препаратов требуют коренного улучшения [23]. Продолжительное время инновации в области агрохимии в основном касались собственно химических продуктов и в меньшей степени — технологий их внесения [23].

Многие годы до настоящего времени на посевах кукурузы в качестве основных (почвенных) гербицидов широко применяют препараты триазиновой группы (симазин, атразин и др.) [16]. Препараты на основе тиокарбаматов (эрадикан и др.) [24] появились несколько позже. В зависимости от специфики почвенно-климатических условий и преобладания определенных видов сорняков, применяют и другие препараты. Некоторые из химикатов, прежде всего летучие, например эрадикан, после распыления по поверхности почвы требуют немедленной заделки [4]. Это условие чаще всего выполняется путем использования комбинированных агрегатов на базе трактора класса тяги 3–5 кН и соответствующим образом дооборудованной дисковой бороны БДТ-7 [24–26]. О высоком качестве заделки химикатов с помощью тяжелой дисковой бороны в оптимальных почвенноклиматических условиях свидетельствует богатый опыт [4, 10, 12, 20, 27–30], но в условиях повышенной влажности она заливает и плохо перемешивает почву [3, 10, 28], а на рыхлом грунте — чрезмерно заглубляется. Неравномерность обработки почвы дисковой бороной по глубине не позволяет отказаться от предпосевной культивации. Проводят ее чаще всего с целью сохранения влаги вслед за дисковой бороной, заделывающей гербицид [27].

При безотвальной системе земледелия основная масса 63–70% семян сорняков сосредотачиваются в верхнем слое почвы (до 5 см) [3]. Предшествующие заделке гербицидов операции по обработке почвы частично уменьшают потенциальную опасность загрязнения посевов сорняками, в частности и теми, которые не подавляются применяемыми химикатами, но после прохода дисковых орудий верхний слой почвы, равный максимальной глубине прорастания большинства сорняков 1,5–2 см [16], снова возобновляет запасы этих семян, а, следовательно, и возможность их прорастания.

В отдельных случаях представляется возможным лучше заделать гербицид, применяя другие дисковые орудия, а также различные культиваторы и бороны, но, как правило, далеко не с тем качеством, которое необходимо с точки зрения эффективного использования токсиканта.

Известно, что в себестоимости мероприятий по защите растений львиную долю затрат (иногда до 90%) составляют расходы на пестициды, а их применение порой сопровождается некоторыми отрицательными действиями, например, загрязнением окружающей среды. Отсюда повышенный интерес к приемам, позволяющим добиваться высокой эффективности химической защиты при уменьшенном расходе препаратов [31].

Активность почвенных гербицидов зависит от состояния влажности почвы [4, 21, 32, 33], которая должна быть не менее 20% [16, 28, 34], а также от ее адсорбционной способности [19, 35, 36]. В целом доступность адсорбированных почвой пестицидов для растений недостаточно изучена, но полученный опыт позволяет предполагать, что "...доступной для них является лишь та часть токсиканта, которая находится в почвенном растворе" [16, 36]. Следовательно, распыление гербицидов по поверхности почвы с последующей их заделкой, приводит к бесполезным потерям той части химиката, которая остается в верхнем сухом слое почвы. Чему способствует также и фотохимический распад этой части гербицидов под действием солнечных лучей [35].

Обозначенные проблемы частично решаются в Астраханской технологии возделывания овощных культур [37, 38], которая основана на вождении агрегатов по направляющим щелям в почве и предполагает ленточное внесение гербицидов (ЛВГ) в открытые борозды и последующую их заделку. Основным недостатком такого метода, является перемешивание и, как следствие, дополнительное высушивание почвы. Для богарного земледелия в зонах недостаточного увлажнения это недопустимо.

Рациональным с этой позиции является внесение гербицидов непосредственно на определенную глубину в почву в виде горизонтального экрана, например, с помощью специально оборудованного штангового культиватора [18]. Из результатов исследований, проведенных Минаковым Н.А., следует, что действенность гербицида лучше всего проявляется при внесении его концентрированным слоем непосредственно в зону заделки семян тест-культуры (ячмень), т.е. на глубину 4–6 см. Этим достигаются два весьма важных условия: во-первых гербицид сразу попадает в зону расположения корневых волосков, во-вторых, в этом слое имеется достаточно влаги. При таком внесении концентрация гербицида намного выше, чем при равномерном перемешивании его с верхним слоем почвы до глубины заделки [19]. Подобные результаты получены Юнаевым А.А., также использовавшим в своих опытах внутрипочвенное внесение гербицидов (ВВГ). Максимальное количество сорняков уничтожалось при внесении гербицида на глубину заделки семян кукурузы, т.е. на 6–8 см. Совмещение операций внесения гербицидов и предпосевной культивации способствовало сохранению влаги [40]. Такие же преимущества метода ВВГ получены и Гниломедовым В.П. [33], а также сотрудниками Краснодарского НИИСХ им. П.П. Лукьяненко [41].

Ученые Московской сельхозакадемии им. К.А. Тимирязева предложили свой способ внесения гербицидов в подповерхностный слой на глубину 5–10 см, предусматривающий использование рабочего органа (РО) в виде стрелчатой лапы с приспособлением для смачивания дна борозды [42]. Но и этот способ, и ранее упомянутые способы внесения гербицида в подповерхностный слой до настоящего времени не получили широкого распространения, главным образом, из-за отсутствия совершенных конструкций устройств, позволяющих реализовать их преимущества.

Выше упоминалось, что возделывание пропашных культур даже по индустриальной технологии редко обходится без боронований посевов и механизированных междурядных обработок. В последнем случае необработанными остаются только защитные зоны рядков (16–30 см), а, значит, гербициды достаточно вносить лентами по рядкам посевов. Такой способ, предусматривающий внесение химикатов одновременно с высевом или культивацией и распыление рабочей жидкости (РЖ) по поверхности почвы полосами, с последующей заделкой или без нее, получил широкое распространение [20]. С точки зрения качества заделки химикатов, этот способ эквивалентен сплошному внесению. Но он трудно осуществляется как самостоятельная операция [43], а при совмещении операций приводит к снижению производительности машин [20]. Основными преимуществами способа являются: экономия препаратов в несколько раз [31], возможность визуального контроля качества распыла, а также некоторое понижение опасности отрицательного последствия токсиканта в системе севооборота [5, 20].

Основные преимущества ленточного и экранного (открытого или внутрпочвенного) внесения гербицидов возможно реализовать одновременно. Для этого следует использовать имеющийся опыт по возделыванию овощных культур [37, 44, 45] с минимальными затратами ресурсов и ручного труда, основанный на использовании технологических щелей в почве, нарезаемых перед посевом, в качестве направляющих элементов для всех участвующих в технологическом цикле орудий [37, 38]. В этом же контексте заслуживает внимания гребневая технология возделывания овощных культур, также предусматривающая ЛВГ [46–48].

## 1.2. Обзор известных технических решений в области применения гербицидов

### 1.2.1. Классификация методов и технических средств для применения гербицидов.

До настоящего времени комплекс машин для использования почвенных гербицидов представлен, в основном, универсальными ТС, предназначенными для применения различных видов пестицидов, включающих химические средства для борьбы с сорняками, вредителями и болезнями. Львиная доля из этого множества ТС приходится на разного рода опрыскиватели и только незначительная их часть — на машины, предназначенные, главным образом, для применения препаратов в виде специальных препаративных форм (гранул, пенящихся жидкостей, капсул и т.д.), а также другие специальные машины.

На рис. 1.2 представлена классификация технических средств для применения гербицидов (ТСПГ) по их назначению, способу агрегатирования и передвижения, а также по виду приводного механизма [17, 49–51]. Монтируемые ТС могут агрегатироваться как с тракторами, так и с автомобилями или летательными аппаратами (самолетами, вертолетами, дельтапланами и пр.) [52–56]. Навесные, полунавесные и прицепные — с тракторами. Тачечные, переносные и ранцевые [57] применяются силами человека без привлечения сторонней техники. Перемещаемые ТС работают стационарно, но предполагают смену рабочей позиции, причем для этого необходимо задействовать стороннюю технику.

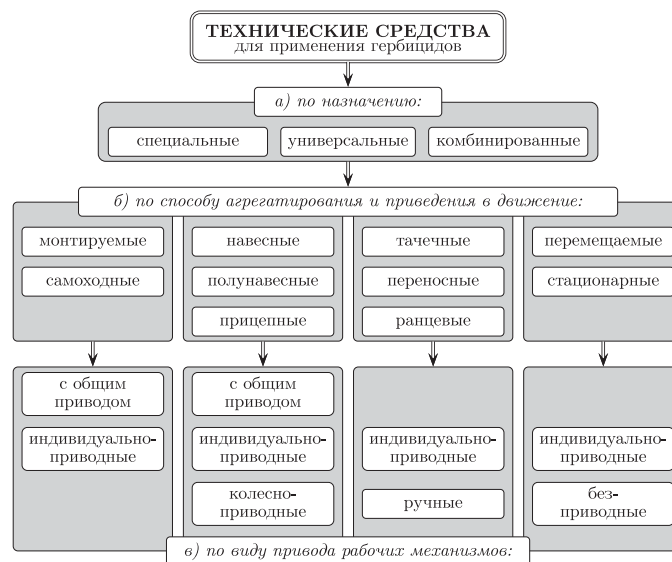


Рис. 1.2. Классификация технических средств для применения гербицидов

Само агрегатирование ТСПГ с каким-либо другим механизмом преследует две цели: первая — использование последнего для перемещения ТСПГ в пространстве; вторая — использование его энергетической установки для привода РО и/или иных устройств ТСПГ. Если решается только первая задача, то в таком случае ТСПГ имеет собственную энергетическую установку и классифицируется как индивидуально-приводное. Если достигаются обе цели, то в собственной энергетической установке нет смысла. Такое ТСПГ относят к ТС с общим приводом.

Колесно-приводные ТСПГ энергию для осуществления рабочего процесса также получают от энергетической установки трактора, с которым агрегируются, но опосредствованно через движетель. Особняком стоят безприводные ТСПГ. К ним относятся устройства для внесения гербицидов с поливной водой и другие подобные устройства. Оставаясь стационарны-



ми, они выполняют только дозирование и подмешивание гербицида к воде из системы орошения, а поэтому не требуют индивидуального привода ни для перемещения себя в пространстве, ни для распыления жидкости.

Для применения почвенных препаратов наибольший интерес представляют наземные ТС: самоходные, монтируемые, прицепные, навесные и полунавесные. ТС для внесения гербицидов с поливной водой [58] малоперспективны. Они очень требовательны к рельефу местности и непригодны для использования летучих и плохорастворимых в воде препаратов.

Совершенствование методов и устройств для химической защиты растений осуществляется путем создания принципиально новых и/или модернизации уже известных технологий и ТС. Основные задачи модернизации — повышение технико-экономических показателей машиноиспользования, эффективности химических обработок и целевого использования химпрепаратов, а также улучшение эргономических и экологических показателей.

Созданные для решения вышеупомянутых проблем гранулированные и капсулированные препараты, а также пенящиеся гербициды и устройства для их использования не находят пока широкого внедрения. Исключением является применение пенного маркера [59].

Следующая группа машин, которая занимает главенствующее положение среди других ТС для защиты растений, включает в себя устройства, рабочим веществом которых являются жидкие препараты. Далее рассмотрим только те из них, которые пригодны для внесения гербицидов (рис. 1.3).

*Первым* классификационным признаком (КП) этих ТС является место внесения гербицидов. В соответствии с ним различают устройства для внутрипочвенного и поверхностного применения гербицидов.

*Вторым* КП является деление по сплошности (полноте) обработки препаратом рабочей поверхности на ТС для сплошного, ленточного и выборочного внесения гербицидов.

Выборочную обработку отдельных высокорослых сорняков и их куртин могут выполнять: а) ТС, у которых распылительная головка или бранс-пойт оборудованы шланговым барабаном или без него [51] и перемещаются по обрабатываемой территории вручную; б) ТС, работающие по принципу намазывания; в) опрыскиватели, распылители которых оборудованы устройствами автоматического включения их по потребности. Например, подобным образом могут работать садовые опрыскиватели [60], которые оборудованы механизмом обнаружения кроны дерева. В классификационную таблицу они не попали, т.к. не нашли применения в полеводстве.

Намазывание, нагнетание и распыление — это группы *третьего* КП по способу распределения РЖ. Распыление предусматривает дробление жидкости на мелкие капли и последующее нанесение их на обрабатываемый объект. Если ТС для поверхностного внесения гербицидов работают по принципу распыления, то их называют опрыскивателями. Технологический процесс внесения почвенных гербицидов путем нагнетания, в основном, осуществляется при их внесении в одной баковой смеси с жидкими удобрениями, которые закачивают под слой почвы, где они распределяется

по ширине захвата растеканием [61]. Намазывание — это процесс увлажнения РЖ РО и, посредством последнего, находящегося с ним в контакте поверхностей листьев растений или почвы [62]. Чаще всего устройства, работающие по принципу намазывания, применяются для уничтожения высокорослых сорняков, возвышающихся над посевами.

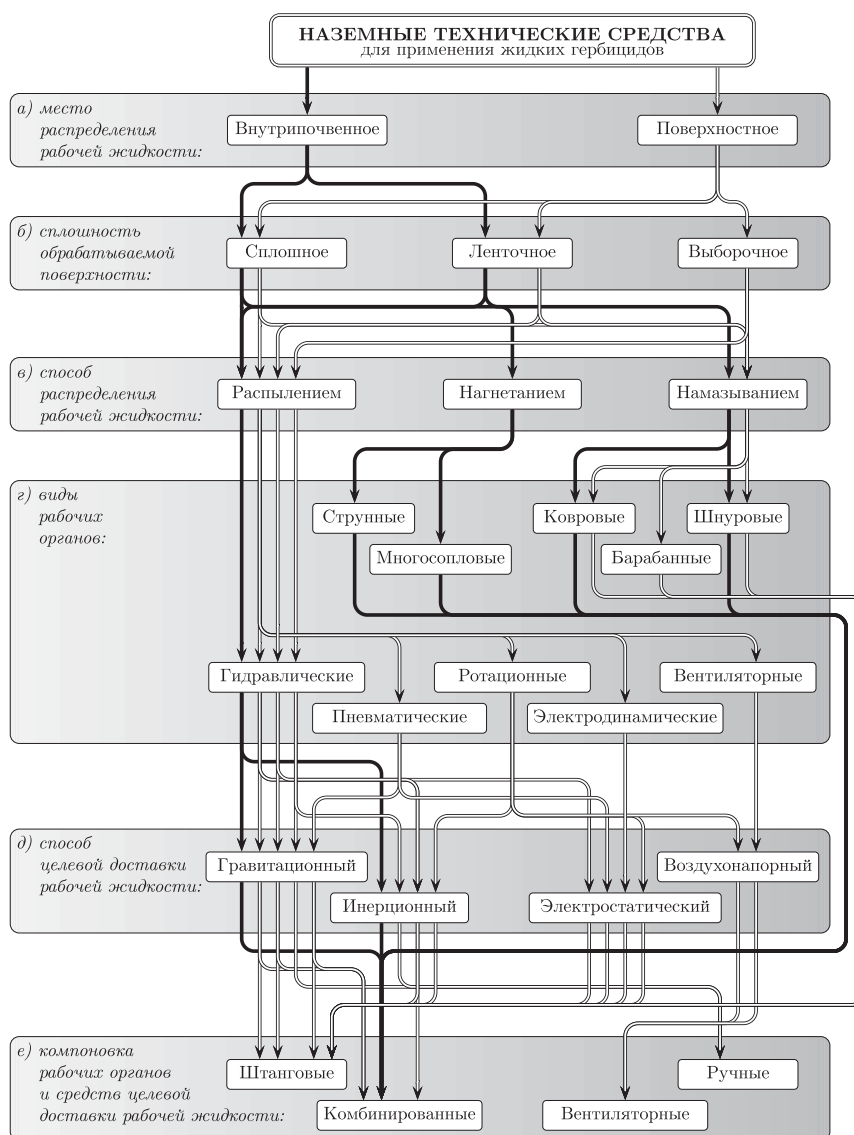


Рис. 1.3. Общая классификация наземных технических средств для применения жидких гербицидов

По виду РО (*пятый* КП) все ТС для применения жидких гербицидов подразделяют на десять групп. Три из них (барабанные, ковровые или фитильно-шнуровые [63]) относятся к ТС, работающим по принципу намазывания. Два других (струнные и многосошловые) — к ТС, работающим по принципу нагнетания, а остальные пять — к распылительным ТС.

В зависимости от способа диспергирования жидкости последние делятся: на ТС с гидравлическим, пневматическим, ротационным, электродинамическим и вентиляторным распылением. В гидравлических распылителях диспергирование жидкости происходит при истечении ее под давлением из отверстия [51], а в пневматических — при помощи сжатого воздуха или выхлопных газов [64, 65]. Известна разновидность индукционных пневмофорсунок, в которых используются сопла Вентури, подсасывающие воздух и дающие факел распыла с каплями РЖ, содержащими воздушные пузырьки [66]. Распылители, в которых формирование частиц РЖ происходит при использовании вращающегося с большой скоростью ротора, называются ротационными, а распылители, в которых этот же процесс происходит за счет использования только лишь электрического тока — электродинамическими [67]. Вентиляторные устройства объединяют в себе два вида диспергирования жидкости: предварительное (гидравлическое) и окончательное с помощью воздушного потока, создаваемого вентилятором [50, 51, 68].

Технологический процесс опрыскивания составляют два этапа: первый — это распыление РЖ до мелкодисперсного состояния, второй — целевая доставка распыла к обрабатываемому объекту [17, 68]. В зависимости от способа целевой доставки диспергированной РЖ (*шестой* КП) целесообразно классифицировать опрыскиватели на гравитационные, инерционные, электростатические и воздушно-напорные. У гравитационных опрыскивателей целевая доставка капель РЖ осуществляется за счет их собственного веса. К ним относятся, прежде всего, штанговые опрыскиватели [69] различных конструкций с гидравлическими и пневматическими распылителями. К инерционным относятся устройства, позволяющие использовать для целевой доставки распыла кинетическую энергию капель, которую они приобрели в момент диспергирования. Например бранспойты, широкозахватные головки или вращающиеся распылители без каких-либо дополнений к ним. Средства, оборудованные какими-либо дополнительными устройствами, позволяющими транспортировать распыл к обрабатываемому объекту под действием электрических сил [70–75], относятся к электростатическим опрыскивателям, а устройства, в которых для этих целей используется вентилятор [50, 51] — воздушно-напорным.

Компоновка РО и устройств целевой доставки РЖ в машинах для применения средств химзащиты растений, также может выполняться по-разному. Это *седьмой* КП. Различают штанговые [69, 76, 77], мачтовые, вентиляторные и ручные, т.е. оборудованные одной распылительной головкой или бранспойтом с штанговым барабаном или без него [51], которые предполагают ручной перенос и управление. Мачтовые устройства не включены в классификацию (рис. 1.3), т.к. для внесения гербицидов не применяются.

Кроме вышеприведенного, ТСПГ следует классифицировать (рис. 1.4) на полнопоточные, т.е. те, у которых вся жидкость, подведенная к распылителям или другим РО, расходуется при распылении, и рециркуляционные — у которых часть жидкости либо от распылителей, либо после распыления снова возвращается в систему ТС [78–80]. К рециркуляционным опрыскивателям следует относить и ТС, работающие по принципу гидроэкранирования [81], у которых капли-спутники размером менее 100 мкм, являющиеся потенциальными источниками сноса [82, 83], с помощью воздушного потока возвращают обратно в систему ТС.

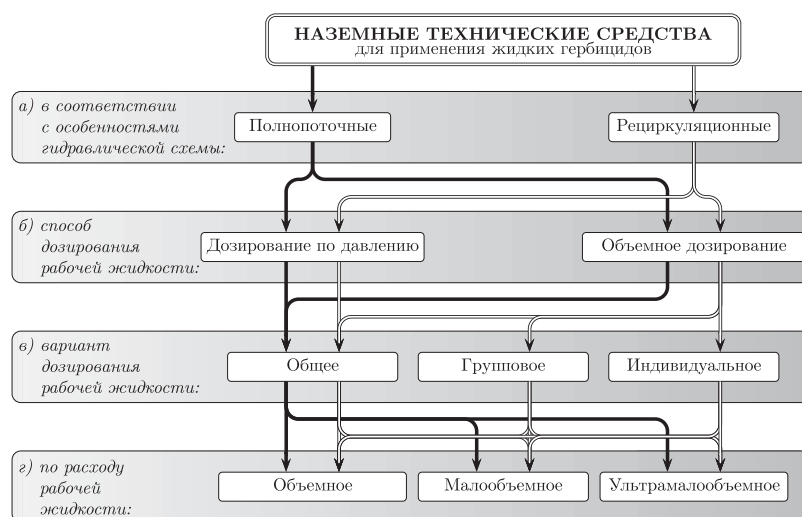


Рис. 1.4. Классификация наземных технических средств для применения жидких гербицидов в зависимости от конструктивных особенностей гидравлической схемы и расхода рабочей жидкости

Дозирование РЖ в ТСПГ может выполняться также различными способами. Наиболее распространенный — дозирование по давлению, в соответствии с которым в системе опрыскивателя поддерживается фиксированное давление и считается, что при этом временной расход жидкости через каждый РО (распылитель) или группу РО (распылителей) остается одинаковым [84–90]. Есть и более прогрессивный вариант объемного дозирования, когда вне зависимости от давления жидкости в системе, либо через каждый распылитель, либо через их группу, или же, самый худший вариант, суммарно через все распылители системы прокачивается стабильное по объему количество РЖ. При этом используются объемные насосы дозаторы с одним или несколькими независимыми каналами дозирования. Известны ТС с отдельной подачей воды и концентрированных препаратов, у которых пестицид находится в отдельной емкости и подается в поток воды к распылителям с помощью насоса во время опрыскивания [91].

Норма расхода РЖ (л/га), с которой может работать конкретное ТС является основным фактором для определения его технико-экономических показателей. По этому признаку, применительно к полеводству, их классифицируют на три группы: ТС для обычного (50–500 л/га), малообъемного (5–50 л/га) и ультрамалообъемного (УМО) (до 5 л/га) [93–95] внесения.

Для опрыскивателей (на рис. 1.4 не показано) важным показателем, определяющим эффективность обработок, является дисперсность распыла РЖ. По этому признаку опрыскивание подразделяют на четыре группы. Для обычного опрыскивания 80% капель по объему должны превышать 150 мкм, для мелкокапельного и высокодисперсного — попадать в интервалы 50–200 и 25–125 мкм, а для аэрозольного — не превышать 50 мкм. Особенно ценен монодисперсный распыл РЖ, при котором в идеале все капли имеют одинаковый размер 60–80 мкм. Этому условию отвечают только некоторые ТС для УМО опрыскивания, оборудованные ротационными распылителями и работающие со специальными маслянистыми препаратами.

Интересно, что большинство известных ТС для применения жидких гербицидов [84–90, 96] имеют практически одинаковую принципиальную гидравлическую схему (рис. 1.5). Отличаются они лишь рядом конструктивных особенностей отдельных узлов и наличием автоматики. Это обстоятельство облегчает изучение, проектирование, производство и эксплуатацию таких ТС. Тем не менее, прогрессивными являются ТС с индивидуальным, например, объемным, дозированием [80, 97–99].

1.2.2. Ультрамалообъемное опрыскивание. Опрыскивание концентрированными растворами со сверхмалыми нормами расхода РЖ, т.е. УМО опрыскивание, весьма перспективно, т.к. позволяет, до 100 раз, снизить норму расхода РЖ, а, следовательно, отказаться от ее пригото-

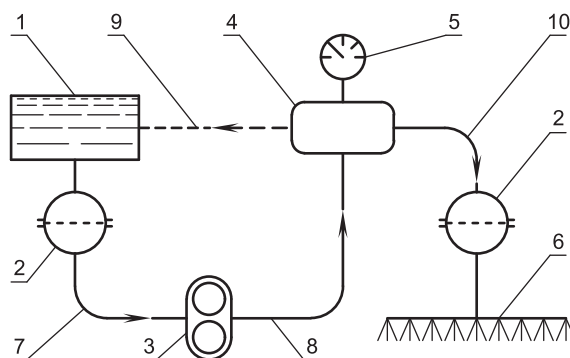


Рис. 1.5. Гидравлическая принципиальная схема машины для применения жидких гербицидов: 1 — емкость; 2 — фильтр; 3 — насос; 4 — пульт управления и регулирующее устройство; 5 — контрольные приборы; 6 — распределительное устройство; 7 и 8 — магистрали всасывания и нагнетания; 9 и 10 — обратная и рабочая магистрали

ления в поле и перейти на одноразовую заправку в начале смены. Реально использование РЖ фабричного производства в соответствующей таре [93]. Это важно как с точки зрения повышения качества рабочих веществ, так и с точки зрения снижения затрат на их приготовление. В целом применение УМО технологий позволяет снизить издержки в 1,5–5 раз [95]. Вследствие уменьшения объема емкостей, устанавливаемых на машинах для УМО технологий, существенно снижена их материалоемкость [100].

Теоретической основой УМО технологий является научный факт, суть которого в том, что для большинства препаратов, при прочих равных условиях, норма расхода и концентрация РЖ не оказывает прямого действия на их токсичность [101]. Наиболее важным является равномерность и плотность (по действующему веществу) распределения препарата по обрабатываемой поверхности [49]. Понятно, что, для равносильного по равномерности покрытия, при УМО опрыскивании дисперсность распыла должна быть выше. Хорошо, если размер капель составляет 50–150 мкм [102], и созданы условия для предотвращения их сноса.

УМО опрыскивание можно проводить различными машинами, например, вентиляторными, пневматическими или с помощью авиации, но машины с гидравлическими распылителями для этой цели непригодны [103].

Наибольшее распространение получают устройства, оборудованные ротационными распылителями, позволяющими сравнительно легко регулировать тонину распыла и получать монодисперсный аэрозоль [93]. Чаще всего ротационные РО представляют собой перфорированный вращающийся элемент, выполненный в виде диска, пакета дисков, цилиндрического барабана, сетчатого барабана, концентрично расположенных двух цилиндрических барабанов, усеченного конуса, чаши [92] и т.д. [93].

Процесс дробления жидкости в них аналогичен процессу капания жидкости из неподвижного капилляра, но наряду с силой тяжести на жидкость действует куда большая центробежная сила [49]. В странах СНГ изучение и применение УМО технологий стало возможным после того, как около 40 лет назад во Всесоюзном НИИ фитопатологии была создана серия опрыскивателей с вращающимися распылителями [81, 104, 105, 107–109].

Для образования мелких капель при умеренных размерах распыливающего ротора требуется очень большая скорость его вращения. Это обстоятельство до сих пор является основным препятствием на пути широкого производственного использования УМО опрыскивания. Сейчас в мире эксплуатируются такие устройства с электроприводом [81, 108–117], с гидростатическим приводом [94], с приводом от ветроколес [118, 119] и посредством гибкого вала [120] и даже с помощью двигателя системы Ванкеля [93].

Есть в УМО опрыскивания и другие недостатки. Большинство вращающихся распылителей в процессе диспергирования жидкости, кроме основных капель, образуют до 20% капель-спутников, диаметром меньше 50 мкм, которые способны витать в воздухе вследствие конвективной диффузии, и не осаждаются в зоне обработки [121]. Образуются они в результате быстрого разрушения перемычки между основной каплей и капилляром ротора

распылителя [49]. Но даже и при монодисперсном распылении высокодисперсный аэрозоль более подвержен старению, чем малодисперсный и обычный. При прочих равных условиях высыхание капель и потеря токсиканта находятся в обратной зависимости от размера капель [49].

На пути к преодолению этого недостатка были созданы устройства для УМО опрыскивания, сочетающие вращающийся распылитель с вентилятором [92, 108, 109, 116]. Воздушный поток способствовал скорейшей целевой доставке препарата. Созданы устройства, способные отделить мелкие капли от крупных и вернуть первых обратно в систему опрыскивателя [80, 81, 108, 109]. Применяется также метод электростатического осаждения аэрозоля. Все эти дополнительные устройства еще более усложняют и без того очень сложную аппаратуру для УМО технологий.

Наиболее рациональными являются нелетучие препараты на масляной основе. Они легче диспергируются, а их аэрозоли меньше подвержены старению. Такие препараты должны иметь плотность не менее 1,0 и пологую вязкостнотемпературную характеристику [93]. Кроме этого препараты для УМО опрыскивания должны быть либо растворами, либо устойчивыми суспензиями [103], которые не так подвержены оседанию в каналах опрыскивателя. В результате ассортимент препаратов для УМО технологий весьма ограничен, а стоимость — существенно выше обычных [122].

При УМО внесении особые требования предъявляются и к точности дозирования препаратов. Чем меньше его норма внесения, тем выше требования на точность дозирования. В устройствах для УМО опрыскивания часто используются объемные насосы-дозаторы, которыми снабжают каждый распылитель [93]. Это также усложняет ТС для УМО технологий.

Высокая агрессивность препаратов для УМО технологий исключает возможность использования в конструкциях опрыскивателей привычных для сельхозмашиностроения материалов [123] и отрицательно сказывается на эргономике. Есть трудности и с промывкой такой аппаратуры после завершения работ и при переходе на другой препарат. Поскольку препараты для УМО технологий вода не растворяет, то промывку осуществляют спецрастворами, например, этиленгликольмоноалкидами или более доступными жидкостями, такими как дизельное топливо или керосин [124].

**1.2.3. Гидравлические распылители.** Гидравлические распылители — это такие, у которых диспергирование жидкости происходит под действием гидродинамических сил в момент или после ее истечения из отверстия в результате взаимодействия с неподвижными деталями. Большая универсальность, малая материалоемкость и простота конструкции явились их основными преимуществами и обеспечили широкое применение в конструкциях самых разнообразных опрыскивателей.

На рис. 1.6 приведена классификационная схема гидравлических распылителей. По принципу работы они делятся на центробежные и струйные.

В центробежных распылителях жидкость перед выходным отверстием интенсивно вихрится и при выходе из него образует утончающуюся пленку

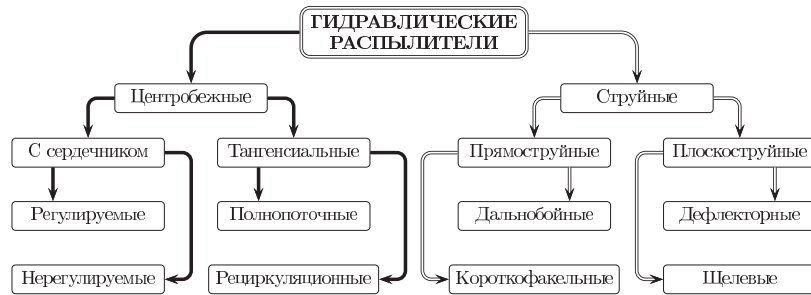


Рис. 1.6. Классификация гидравлических распылителей

в виде конуса, которая теряет устойчивость и распадается на капли [120]. В распылителях с сердечником (рис. 1.7,А; 1.7,В) используется специальный сердечник-завихритель, выполненный в виде тела вращения с наружными винтовыми канавками, а в тангенциальных распылителях (рис. 1.7,С) — камера завихрения с внутренней полостью, также представляющей собой тело вращения, с одним или несколькими подводными каналами, ориентированными по касательной к ее периферийной поверхности.

Распылители с сердечником могут быть выполнены регулируемыми (садовые брансποиты) и нерегулируемыми. В регулируемом варианте имеется возможность плавно изменять параметры распыла путем осевого перемещения сердечника внутри распылителя. Такие распылители обычно работают при большом рабочем давлении жидкости, порядка 2,0–2,5 МПа. Нерегулируемые, как правило, с небольшим — до 0,8 МПа [68].

Тангенциальные распылители также классифицируют на две группы: полнопоточные распылители, в конструкции которых предусмотрено распыление всей подводимой к ним РЖ, и на рециркуляционные распылители (рис. 1.7,Д), в которых распыляется лишь часть подводимой РЖ, а часть — посредством специального канала возвращается снова в систему. Рециркуляционные распылители позволяют: во-первых, получить более тонкий распыл при меньшем минутном расходе и лучшей равномерности распределения РЖ по ширине захвата [79] и, во-вторых, осуществлять распыл малоустойчивых суспензий, не опасаясь оседания химиката в подводных и рециркуляционных трубопроводах. Последнее обусловлено увеличенной скоростью течения РЖ в подводном и рециркуляционном каналах, причем независимо от величины расхода ее через распылитель.

Струйные распылители (рис. 1.8), к которым относятся прямоструйные и плоскоструйные, не имеют специальных устройств для закручивания потока РЖ. Прямоструйные распылители образуют факел распыла в виде тонкой струи или заполненного конуса, и представляют собой насадку с сужающимся к выходу, снабженным калиброванным отверстием, каналом. Насадки с факелом распыла в виде тонкой струи называют дальнобойными. Они имеют большую дальность действия, работают при больших давлениях



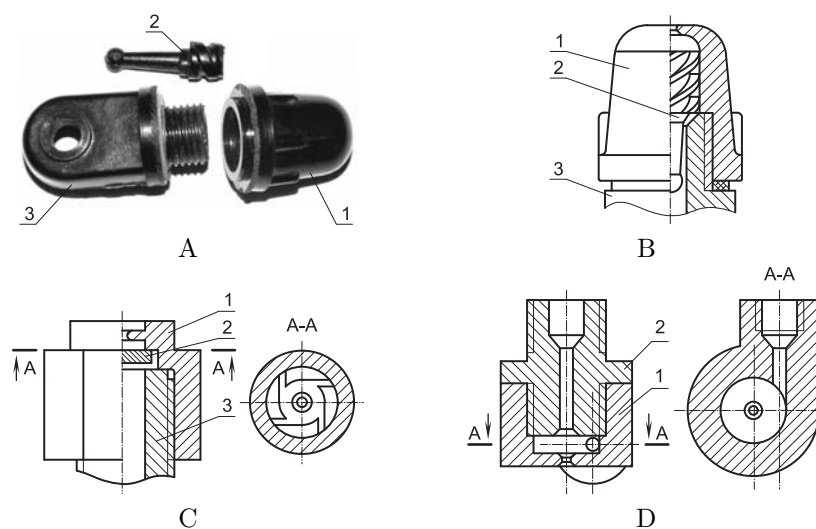


Рис. 1.7. Центробежные распылители: А, В — нерегулируемый с сердечником (А — внешний вид деталей; В — схема строения; 1 — корпус; 2 — сердечник; 3 — подводной патрубков); С — тангенциальный полнопоточный (1 — корпус; 2 — отражатель; 3 — подводной патрубков); D — тангенциальный рециркуляционный (1 — корпус; 2 — штуцер)

и расходах РЖ. Такими распылителями чаще всего оборудуют бранспойты. Распылители с факелом в виде заполненного конуса называют короткофакельными и применяют в полеводстве (рис. 1.8,А и 1.8,В).

Плоскоструйные распылители объединяют в себе также две группы. К первой группе относятся дефлекторные распылители (рис. 1.8,С; 1.8,Д), у которых на пути истекающей из калиброванного отверстия жидкости предусмотрен отражатель для распыления и дробления последней, а ко второй группе — щелевые (рис. 1.8,Е; 1.8,Ф), у которых диспергирование жидкости и формирование факела распыла происходит за счет прохода ее через щелевидное отверстие. Таких отверстий может быть несколько. По отношению к каналу, по которому подводится жидкость, они могут располагаться как симметрично, так и асимметрично.

По мнению специалистов щелевые распылители наиболее полно отвечают требованиям, предъявляемым к равномерности опрыскивания полевых культур. Однако качество работы распылителя зависит не только от его типа, но, в значительной степени, от точности изготовления. Надлежащую равномерность могут обеспечить и центробежные распылители, но изготовление их с высокой точностью очень дорого [120]. Чаще всего щелевые и струйные распылители применяются на штанговых машинах для опрыскивания с нормами расхода РЖ свыше 200 л/га. Наиболее широкое распространение получили щелевые [125].

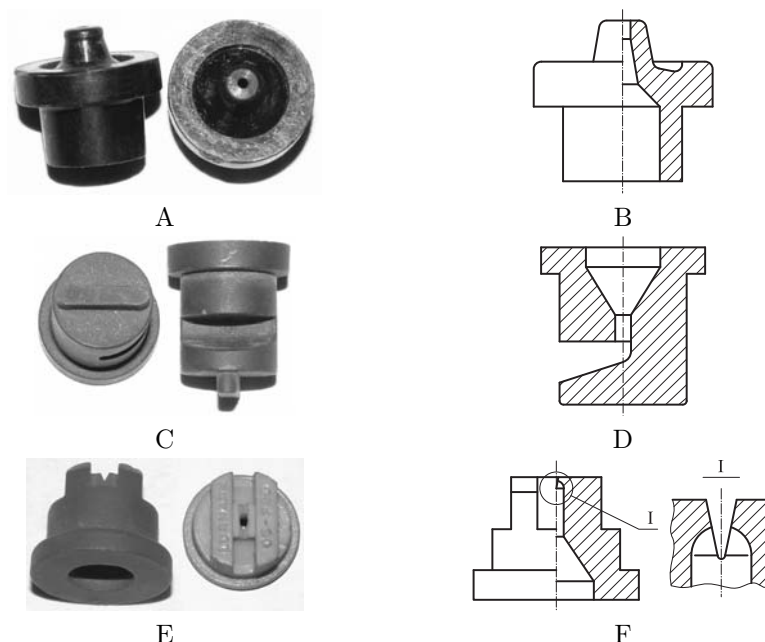


Рис. 1.8. Струйные распылители (А, С, Е — внешний вид; В, D, F — схема внутреннего строения): А, В — прямоструйный короткофакельный; С, D — плоскоструйный дефлекторный; Е, F — плоскоструйный щелевой

Несмотря на целый ряд перечисленных ранее преимуществ гидравлических распылителей в целом и щелевых, в частности, все они малоприменимы для использования при УМО опрыскивании [103, 120]. Главная причина состоит в невозможности распыла малых количеств РЖ [93]. Задача состоит в поиске других конструктивных решений гидравлических распылителей, обладающих способностью устойчиво работать при малых расходах РЖ.

1.2.4. Технические средства для внутрипочвенного внесения гербицидов. Несмотря на большие преимущества ВВ основных гербицидов, в настоящее время такой метод не получил широкого распространения. Более того, для его реализации до сих пор нет ни серийных машин, ни хороших конструктивных разработок.

РО для ВВГ, разработанные учеными постсоветских стран, в основном, представляют собой универсальную стрелчатую лапу, под поверхностью крыльев которой установлены один или несколько распылителей. При этом большинство их авторов, например, Юнаев А.А. и др. из Краснодарского НИИСХ им. П.П.Лукияненко, в своей конструкции использовали серийные стрелчатые лапы по ГОСТ 1343-82, расценивая это как одно из преимуществ их конструкции. На самом деле это не так. Серийные лапы с углом раствора  $65^\circ$  и углом крошения  $28^\circ$  даже при ширине захвата 220 мм [126]

могут устойчиво работать на глубине не менее 6 см [127], что выходит за пределы оптимальной глубины заделки гербицидного экрана. Необходимо разрабатывать РО, способные работать на глубинах менее 5 см.

В отношении равномерности распределения гербицида под слоем почвы, то РО Юнаева А.А. и Гниломедова В.П. [128], также представляющий собой стрелчатую лапу с несколькими жиклерами под крыльями, не лишены недостатков. Использование нескольких распылителей на одном РО, несмотря на предельное уменьшение проходных сечений жиклеров, приводит к существенному увеличению расхода РЖ, а, следовательно — к ухудшению ряда технико-экономических показателей. Уменьшение проходных сечений жиклеров неоправдано и с позиции надежности технологического процесса, поскольку увеличивает возможность их засорения.

С этой точки зрения более рациональным является РО Краснодарского НИИ сельского хозяйства имени П.П.Лукияненко, в конструкции которого предусмотрено использование одного распылителя.

Наиболее совершенным является РО, разработанный учеными США (рис. 1.9) [129], также представляющий собой плоскорежущую лапу 1, выполненную заодно со стойкой 2 и кожухом 3, внутри которого установлен двухжиклерный распылитель 4.

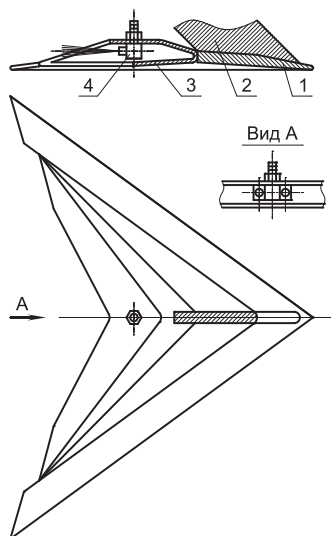


Рис. 1.9. Рабочий орган для внутрипочвенного внесения гербицидов:  
1 — плоскорежущая лапа; 2 — стойка; 3 — кожух; 4 — распылитель

Особенностями такой конструкции являются: во-первых, малые значения углов крошения плоскорежущей лапы 1, а, во-вторых, наличие защитного кожуха 3, предотвращающего попадание почвы на распылитель 4. Первое свойство обеспечивает устойчивую работу лапы на малой глубине и является положительным. Второе — нерационально. На самом деле наличие

защитного кожуха усугубляет склонность РО к залипанию. Причина заключается в том, что верхний козырек кожуха 3 сильно выступает назад за пределы распылителя 4 и при вынужденной остановке РО под слоем почвы смачивается раствором гербицидов. В результате на смоченный козырек кожуха 3 снизу прилипает почва. Наличие металлической плоскости под распылителями 4 также способствует закреплению налипшей почвы.

Нерациональным является и применение двухжиклерного распылителя, вместо щелевого с одной проточной частью. В целом удачная компоновочная схема этого РО могла бы послужить прототипом для разработки новых конструкций таких устройств.

1.2.5. Агротехнические требования к перспективным машинам и технологиям. В настоящее время использование почвенных гербицидов является одним из самых эффективных средств борьбы с сорняками в посевах пропашных культур. Большие преимущества почвенных препаратов можно реализовать только при комплексном их использовании, т.е. в случае применения интегрированного метода защиты растений, включающего комплекс различных агротехнических приемов.

Совершенствованию подлежат как технологии применения почвенных препаратов, так и устройства для их осуществления. Набор ТС для внесения почвенных гербицидов и технология возделывания культуры в целом должны предусматривать выполнение этой операции как в комплексе с другими, так и самостоятельно. Агротехнические требования, которым должны отвечать ТС для внесения почвенных гербицидов, следующие:

1. Распределение препарата в объеме почвы — в виде расположенного на заданной глубине горизонтального, токсичного для сорняков слоя [42];
2. Способ внесения препарата в почву — опрыскивание дна борозды открытым или подповерхностным способом;
3. Внесение гербицидов — ленточное, с шириной лент не менее 20 см, что соответствует ширине защитной зоны рядков [127];
4. Заделка гербицидного слоя — полная, при глубине внесения 3–10 см и стабильности хода РО по глубине до  $\pm 1$  см;
5. Норма расхода препарата — не более 50 л/га, т.е. в пределах малообъемного опрыскивания [17];
6. Рабочее вещество — препараты в виде летучих и нелетучих жидкостей, представляющих собой растворы, устойчивые эмульсии или суспензии различной концентрации, а также их баковые смеси;
7. Отклонение расхода РЖ по распылителям — не более  $\leq \pm 5$  % [17];
8. Отклонение расхода РЖ по длине гона — не более  $\pm 15$  % [17];
9. Адаптивность — возможность настройки на различные режимы работы в зависимости от нормы расхода РЖ, скорости передвижения, рабочего давления и числа задействованных распылителей, а также возможность быстрой очистки и освобождения системы от ядохимиката;
10. Экологичность — оснащение распылителей индивидуальными отсекающими выток РЖ после снятия рабочего давления;

11. Надежность — обеспечивается системой фильтрации, в частности, индивидуальными для каждого распылителя фильтрами, исключающими нарушения техпроцесса по причине засорения системы.

Повышение эффективности применения почвенных препаратов, путем создания отвечающих приведенным выше требованиям ТС для ВВГ, а также некоторые совершенствования технологий возделывания пропашных культур, является одной из целей настоящей работы.

### 1.3. Обзор методов математического моделирования почвообработки как теоретической основы проектирования рабочих органов для внутрпочвенного внесения гербицидов

Каким бы ни был РО для ВВГ, в любом случае он должен взаимодействовать с почвой, а, значит, понимание механизмов этого взаимодействия лежит в плоскости теории почвообработки. Основоположником этой теории, равно как и вообще земледельческой механики в постсоветских странах заслужено считается академик ВАСХНИЛ Василий Прохорович Горячкин (годы жизни 1868–1935; научные труды — около 300 печатных листов) [130]. Несколько позже в области земледельческой механики плодотворно работал Петр Мефодиевич Василенко (годы жизни 1900–1999, более 200 научных работ) [131]. Значительный вклад в теорию почвообработки внесли Зеленин А.Н. [132], Синеоков Г.Н., Панов И.М. [133], Ветехин В.И. [134, 135], Кушнарев А.С. [136–138], Дубровин В.А. [139], Панченко А.Н. [140], Пащенко В.Ф. [141, 142], Ковбаса В.П. [143], Сало В.М. [144] и др.. Состояние земледельческой механики за рубежом можно проследить по работе [145] и монографии А.Кулена и Х.Куиперса [146].

Общим в работах перечисленных выше ученых является то, что они построены на основе теорий сплошных сред, в частности пластичности, упругости и предельного равновесия. Но поскольку почва обладает сложным набором свойств, то все перечисленные ученые предприняли действия по развитию математических моделей почв в сторону их усложнения. Т.е., благодаря этим и другим работам теория почвообработки была наполнена рядом математических моделей, порой весьма сложных [143]. Такой подход не всегда оправдан, т.к. формально адекватная, но сложная математическая модель не всегда приводит к более точному решению практических задач, а порой бывает даже наоборот. Такой вывод можно сделать если проследить историю развития теории пластичности, которая начиналась примерно на 50 лет раньше с работ Сен-Венана (годы жизни 1797–1886), в частности, посвященных критерию пластичности [147] (1871 год). В последующем было разработано большое множество моделей пластичности, но тем не менее, на сегодняшний день, в подавляющем большинстве случаев ученые обращаются именно к модели Сен-Венана и на ее основе получают более точные, а, значит, адекватные модели. Извлекая урок из этого обстоятельства, обратимся к теориям пластичности и предельного равновесия, сосредоточившись на их развитии и приложении к почвообработке.

## ВЫВОДЫ

1. В системе интегрированной защиты растений применение почвенных гербицидов следует рассматривать как один из наиболее эффективных приемов борьбы с сорняками.

2. Внесение гербицидов ленточным внутрипочвенным методом можно относить к экологически щадящим приемам химобработок, т.к. этот прием позволяет существенно сократить поступление химпрепаратов в окружающую среду и одновременно повысить их хозяйственную эффективность.

3. Основными недостатками известных технических средств и технологий для ленточного внутрипочвенного внесения являются: а) малая производительность; б) повышенный расход рабочих жидкостей; в) низкое качество распределения препарата в пределах полосы внесения, в частности, недостаточная равномерность распределения препарата по ее длине и отклонения от заданного закона распределения препарата по ее ширине.

4. В основу конструкции рабочего органа для ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов рационально положить стрельчатую лапу.

5. Из всех известных конструкций распылителей для рабочих органов, вносящих гербицид внутрипочвенно, наиболее подходящими являются гидравлические одноструйные щелевые распылители. Тем не менее, подавляющее большинство таких распылителей предназначены для применения на штанговых орудиях и поэтому имеют неприемлемую для обозначенных выше целей характеристику распределения жидкости по ширине захвата.

6. Обоснование формы рабочего органа для внутрипочвенного внесения гербицидов следует выполнять, понимая почву как сплошную среду.

7. Анализ достижений современной теорий почвообработки, пластичности и предельного равновесия сплошных сред показывают, что усложнение математических моделей не всегда приводит к повышению точности решаемых задач. В этой связи развитие теоретической базы для обоснования конструкции взаимодействующего с почвой рабочего органа следует проводить, не прибегая к усложнению известных моделей, а совершенствуя методы их анализа и решения и устанавливая новые закономерности.

ГЛАВА 2  
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
ПОЧВЫ КАК СПЛОШНОЙ НЕУПРУГОЙ СРЕДЫ

2.1. Дифференциальные уравнения равновесия

Рассмотрим определенный в декартовой ортонормированной системе координат  $Oxyz$  ортогональный тензор напряжений  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z)$ , где  $i, j \in \{x, y, z\}$ , а  $x, y$  и  $z$  — декартовы координаты. Компоненты тензора  $\sigma_{ij}$

действуют на проходящих через точку  $O$  гранях элементарного параллелепипеда с размерами  $dx \times dy \times dz$  (рис. 2.1). Предполагая предельный переход, считаем, что на любой из этих граней компоненты  $\sigma_{ij}$  остаются постоянными.

В направлении любой из осей координат каждая из компонент  $\sigma_{ij}$  претерпевает прирост, определяемый через частные дифференциалы [148]:

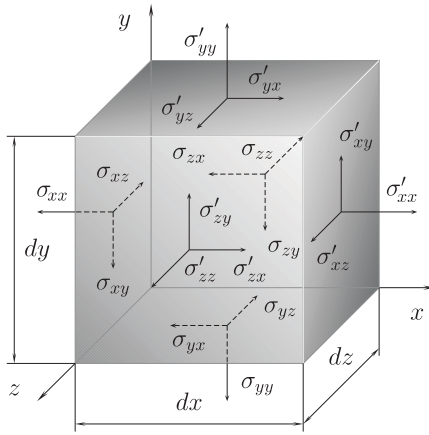


Рис. 2.1

$$\begin{aligned} d_x \sigma_{xi} &= \frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} dx, \\ d_y \sigma_{yi} &= \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial y} dy, \\ d_z \sigma_{zi} &= \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тогда компоненты тензора напряжений, относящиеся к граням, не содержащим начало системы координат, можно определить так:

$$\sigma'_{xi} = \sigma_{xi} + \frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} dx, \quad \sigma'_{yi} = \sigma_{yi} + \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial y} dy, \quad \sigma'_{zi} = \sigma_{zi} + \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial z} dz. \quad (2.2)$$

Условимся, что модуль  $\gamma$  вектора объемных (весовых) сил (на рис. 2.1 не показан) остается постоянным в пределах всего элементарного объема, а его проекции на оси координат  $x, y$  и  $z$  обозначим  $\gamma_x, \gamma_y$  и  $\gamma_z$ . В таком случае условия статического равновесия элементарного параллелепипеда представляют собою систему уравнений [149–152]:

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial z} + \gamma_i = 0, \quad (i = x, y, z), \quad (2.3)$$

которые в механике называют дифференциальными уравнениями Навье [151]. В двумерном случае система (2.3) упрощается к виду:

$$\frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yi}}{\partial y} + \gamma_i = 0, \quad (i = x, y). \quad (2.4)$$

Последнюю в случае, когда объемные силы равны нулю, связывают с именем Сен-Венана, [153, 154].

## 2.2. Предельные условия

Из [155] известно, что большинство веществ, похожих на металлы, в процессе одноосного растяжения по мере возрастания внешней нагрузки проходят три состояния: упругости, пластичности и разрушения. Такая последовательность смены механических состояний типична для материалов, именуемых пластическими.

Есть материалы, для которых состояние пластичности нехарактерно. Например, порошки окиси магния  $MgO$  и алюминия  $Al_2O_3$ , нашедшие применение в сцинтилляционной технике [156], называют идеально-сыпучими, а строительный бетон — идеально-связным. Почва занимает среднее положение, ибо в разной мере проявляет и сыпучие свойства, и связность.

Для идеально-сыпучих материалов испытание на растяжение не имеет смысла, а сжатие для них вполне возможно. Идеально-связные материалы, также лучше сопротивляются сжатию. Именно по этой причине в статике сыпучих и связных сред [157] положительными считаются именно сжимающие напряжения, а не растягивающие, как в теории пластичности [158].

Возвращаясь к рассматриваемым материалам, напомним, что в случае любой схемы нагружения, идеально-сыпучие, сыпучие и связные материалы пластического состояния не претерпевают, т.е. у них сразу после завершения фазы упругости наступает разрушение.

Таким образом, если для всех материалов разработать критерий конца фазы упругости, то для пластических материалов этот показатель будет одновременно обозначать начало фазы пластических деформаций, а для сыпучих — начало разрушения, т.е. перехода от статического состояния к динамическому. По этой причине для пластических материалов такой показатель называют критерием пластичности, а для сыпучих и связных материалов — критерием предельного равновесия.

Рассмотрим сыпучую среду в случае, изображенном на рис. 2.2. В зависимости от соотношения между распределенными нагрузками  $P_1$  и  $P_2$ , возможны два варианта событий: в первом случае предельное равновесие

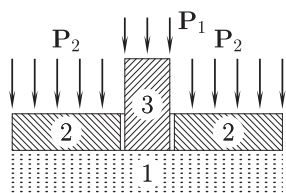


Рис. 2.2

среды 1 достигается по условию погружения пуансона 3, а, во-втором — по выдавливанию его вверх через отверстие в диске 2. Таким образом, критерий предельного равновесия, кроме интенсивности силового воздействия, должен учитывать и различия схем нагружения. То же можно сказать и по отношению к критерию пластичности.

Есть и другие факторы, влияющие на поведение материалов в ответ на внешнее силовое воздействие, например, фактор времени и фактор истории нагружения. Но, тем не менее, напряженное состояние в точке является главной причиной изменения механического состояния материала. Значит, необходимо установить меру напряженного состояния, по достижению которой происходит переход пластического материала от упругого состояния



к пластическому [155], а сыпучих и связных материалов — от упругого состояния к фазе разрушения, т.е. выбрать критерий пластичности для одних материалов и критерий предельного равновесия — для других.

По своей сути оба критерия очень сходны. Пренебрегая упругостью оба критерия можно понимать как условие перехода от статического состояния к динамическому, а, значит, пренебречь различиями между ними.

Первый критерий базируется на гипотезе, которую связывают с именами Треска [155, 158] и Сен-Венана [149, 155, 158, 159]. Суть ее состоит в предположении, что переход от упругого состояния материала к пластическому с достаточной точностью определяется величиной максимальных касательных напряжений. Т.е. пластические деформации в данной точке среды возникают тогда, когда максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$  достигают  $C_1$  — определенного предельного значения:

$$\tau_{\max} = C_1 = \tau_T, \quad (2.5)$$

где  $\tau_T$  — предел текучести при чистом сдвиге.

Фактическое значение  $\tau_{\max}$  определяется как полуразность наибольшего  $\sigma_3$  и наименьшего  $\sigma_1$  главных нормальных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1). \quad (2.6)$$

Воспользовавшись круговой диаграммой напряжений Мора, представим геометрическую интерпретацию условия пластичности (рис 2.3) по Треску–Сен-Венану. Тут  $\sigma_{\nu\nu}$  и  $\sigma_{\nu\tau}$  — нормальная и касательная составляющие полного напряжения, действующего на площадке общего положения, ориентацию которой задает единичный вектор-нормаль  $\vec{\nu}$ . Прямую  $|\sigma_{\nu\tau}| = C_1$

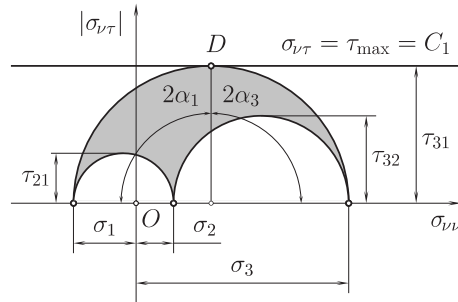


Рис. 2.3

$\sigma_1$  и  $\sigma_3$  показывают, что условие пластичности (2.5) достигается на площадках, равнонаклонных к векторам  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Площадки (поверхности), на которых выполняются предельные условия (2.5), называют предельными площадками (поверхностями) или площадками (поверхностями) пластичности.

называют предельной прямой. На рис. 2.3 отобразено ее крайнее верхнее положение, когда окружность Мора, построенная на наименьшем  $\sigma_1$  и наибольшем  $\sigma_3$  главных нормальных напряжениях, имеет с ней единственную общую точку  $D$ . Саму окружность Мора в этом случае также называют предельной окружностью.

Связанные зависимостью  $2\alpha_1 = 2\alpha_3 = \frac{1}{2}\pi$ , углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  между вектором-нормалью  $\vec{\nu}$  и векторами

Принимая во внимание октаэдрическое напряжение  $\sigma_{okt}$ , условие пластичности (2.5), (2.6) можно переписать в виде [158]:

$$\tau_{\max} = \max\left\{|\sigma_1 - \sigma_{okt}|, |\sigma_2 - \sigma_{okt}|, |\sigma_3 - \sigma_{okt}|\right\} = \frac{2}{3}\sigma_T, \quad (2.7)$$

где  $\sigma_T = |\sigma_3 - \sigma_1|$  — предел текучести при чистом растяжении. В таком виде условие пластичности впервые предложено А.Ю.Ишлинским [160], затем Р.Хиллом [161] и несколько позже Д.Д.Ивлевым [162].

Следующую гипотезу пластичности впервые сформулировал Хубер в 1904 году. По его утверждению, переход к пластическому состоянию связан с уровнем накопленной в единице объема потенциальной энергии деформации [155], и по этой причине такую гипотезу называют условием постоянства удельной энергии формоизменения [149] или энергетической гипотезой [152]. В рамках статики, когда величиной деформаций пренебрегают, привести стройные выкладки этого условия не представляется возможным. В общем итоге она сводится к выражению:

$$\sigma_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (2.8)$$

где принято, что  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ .

В условии Хубера (2.8) перестановка местами индексов 1, 2 и 3 не меняет величины  $\sigma_T$ , а, значит, нет необходимости следить за тем, какое из главных напряжений является наибольшим, а какое наименьшим [155].

Последнее обстоятельство заставило Мизеса (1913 г.), незнакомого с работами Хубера, в целях упрощения выполнить поиск аналитического выражения, близкого к теории Сен-Венана, но свободного от перестановки индексов. Так, было предложено в качестве критерия пластичности использовать касательные напряжения в октаэдрических площадках [155]:

$$\tau_{okt}^2 = \frac{1}{9} \left[ (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (2.9)$$

Для простого растяжения из (2.9) получаем  $\tau_{okt}^2 = \frac{2}{9}\sigma_T^2$ . Решив последнее относительно  $\sigma_T$  и подставив  $\tau_{okt}^2$  из (2.9), получаем критерий Хубера (2.8).

Можаровский М.С. [158], касательно критерия пластичности со ссылкой на работу [163], отмечает вклад Г.Генки в развитие теорий Хубера и Мизеса.

Сейчас гипотезу Хубера часто связывают с двумя Хубера-Мизеса [155] и реже с тремя именами Хубера-Мизеса-Генки [158].

Следующий критерий пластичности Мора [159], базируется на обобщении и упрощении экспериментальных зависимостей (рис. 2.4). Такой подход Мора Феодосьев В.И. называет феноменологическим [155].

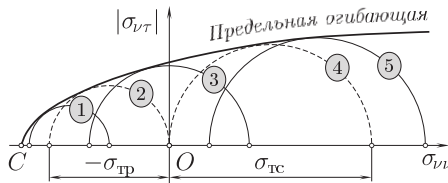


Рис. 2.4

Суть метода в следующем: 1) в начале материал подвергают некоторому механическому воздействию, не выходя за пределы упругости; 2) затем нагрузку пропорционально увеличивают до начала пластического течения; 3) для предельных значений в плоскости  $\sigma_{\nu\nu}, \sigma_{\nu\tau}$  строят наибольший из трех кругов Мора; 4) первые три пункта повторяют для как можно большего числа различных напряженных состояний; 5) на плоскости  $\sigma_{\nu\nu}, \sigma_{\nu\tau}$  строят предельную огибающую кривую.

Технически наиболее простым является получение экспериментальных данных для кругов 2, 4 и 3, которые относятся, соответственно, к одноосному растяжению ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 = -\sigma_{\text{тр}}$ ), сжатию ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_{\text{тс}}$ ) и чистому сдвигу ( $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$ ). Тут положительные постоянные  $\sigma_{\text{тр}}$  и  $\sigma_{\text{тс}}$  обозначают предел текучести при растяжении и сжатии.

На практике ограничиваются двумя испытаниями на одноосное растяжение и сжатие и, опираясь на них, строят предельную прямую (рис. 2.5).

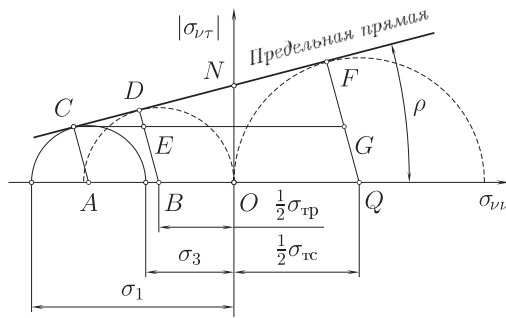


Рис. 2.5

предельной прямой (ее отрезком  $DF$ ) и направлением оси нормальных напряжений  $\sigma_{\nu\nu}$ , а через  $k$  длину отрезка  $NO$ . Таким образом, предельное условие Мора можно переписать в следующем виде:

$$|\sigma_{\nu\tau}| = \sigma_{\nu\nu} \operatorname{tg} \rho + k. \quad (2.10)$$

Далее, заметим, что касательное напряжение  $|\sigma_{\nu\tau}|$ , действующее на площадках скольжения, меньше максимального главного касательного напряжения  $\tau_{\text{max}}$  (2.6). Его величину теперь можно определить из графических построений на рис. 2.5 выражением:

$$|\sigma_{\nu\tau}| = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \cos \rho < \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (2.11)$$

Далее увидим, что условие пластичности Мора в представлении (2.10) и условие предельного равновесия для сыпучей среды [157, 181], несмотря на различия физической природы параметров, формально совпадают.

Рассмотрим мысленно эксперимент по разрушению монолитного кубического фрагмента почвы (рис. 2.6), который со всех сторон окружен жест-

Аналитическое представление предельного условия Мора получают на основании геометрических построений:  $\sigma_{\text{тр}} = K\sigma_3 - \sigma_1$ , где  $K = \sigma_{\text{тр}}/\sigma_{\text{тс}}$ . В случае, когда  $K = 1$  (если  $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}$ ), условие Мора переходит в условие Треска-Сен-Венана, поэтому, что чаще всего, критерий пластичности Мора применяется, когда  $\sigma_{\text{тр}}$  и  $\sigma_{\text{тс}}$  различны.

Возвращаясь к рис. 2.5, через  $\rho$  обозначим угол между

кой оболочкой, состоящей из двух невесомых частей 1 и 2. Плоскость разреза оболочки совпадает с плоскостью  $A-A$ , ориентацию которой задает угол  $\beta$ , равный углу трения “почвы о почву”. Плоскость  $A-A$  делит кубический фрагмент испытываемой среды на две части: 1 и 2.

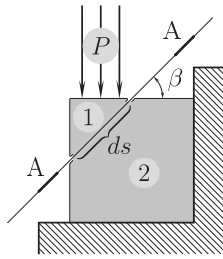


Рис. 2.6

Повторяя этот эксперимент с фрагментами среды разных размеров, а также варьируя величиной распределенной внешней нагрузки  $P$  можно установить величину сопротивления сдвигу части 1 по отношению части 2, или, что то же — касательной компоненты  $\sigma_{\nu\tau}$  полного напряжения  $\sigma_{\nu}$ , действующего на площадке  $ds$  в момент перед началом скалывания:

$$|\sigma_{\nu\tau}| = \sigma_{\nu\nu} \operatorname{tg} \rho + k, \quad (2.12)$$

где  $\rho$  — угол внутреннего трения;  $k$  — коэффициент сцепления [157]. Таким образом, видим, что сопротивление сдвигу  $\sigma_{\nu\tau}$  складывается из сопротивления от внутреннего трения и из сопротивления от сцепления.

Если среда характеризуется наличием внутреннего трения и сцепления, то ее условимся называть сыпучей средой.

Напряженное состояние среды в некоторой точке ее объема называется состоянием предельного равновесия, если для всего множества площадок, проходящих через эту точку, справедливо неравенство:

$$|\sigma_{\nu\tau}| \leq \sigma_{\nu\nu} \operatorname{tg} \rho + k, \quad (2.13)$$

а на некоторых элементарных площадках, именуемых площадками скольжения, к тому же обязательно достигается строгое равенство (2.12). Область (точка) в объеме среды, где достигается состояние предельного равновесия, называют областью (точкой) предельного равновесия или предельной областью (точкой).

Если в некоторой точке среды для всех возможных площадок справедливо неравенство

$$|\sigma_{\nu\tau}| < \sigma_{\nu\nu} \operatorname{tg} \rho + k, \quad (2.14)$$

то скалывание или скольжение среды вдоль таких площадок невозможно. В таком случае говорят, что в этой точке выполняется условие устойчивого равновесия, соответствующее напряженное состояние среды называют состоянием устойчивого равновесия, а области (точки) в объеме среды, на которые оно распространяется, — областями (точками) устойчивого равновесия. Области предельного и устойчивого равновесия обычно граничат друг с другом и одна может полностью или частично окружать другую.

Равенство (2.12) именуют условием предельного равновесия (предельным условием) для сыпучей среды. Формально оно повторяет условие пластичности Мора (2.10), а, значит, и его геометрический образ (рис. 2.7) можно построить, опираясь на относящийся к условию Мора рис. 2.5.



$V_x, V_y, V_z$ , — проекции вектора скорости перемещения);  $C_1$  — предел текучести при чистом сдвиге (сцепление) из условия Мизеса;  $C_2$  — коэффициент внутреннего трения, входящий в условие пластичности Мизеса–Шлейхера;  $C_3$  — динамический коэффициент вязкости из Ньютоновской модели вязкой среды [165];  $C_4$  — константа, имеющая размерность времени из выражения для обобщенного динамического коэффициента вязкости, соответствующего модели баровязкой среды [166].

В зависимости от того, какие из коэффициентов  $C_1, C_2, C_3$ , и  $C_4$  правой части уравнения (2.18) принимают ненулевые значения, Гениев классифицирует среды на шестнадцать видов (табл. 2.1) [164].

В случае статической задачи:  $V_x = 0, V_y = 0, V_z = 0$ , а, следовательно, также равны нулю и все компоненты тензора скоростей деформации и, наконец,  $H = 0$  — интенсивность скоростей деформации сдвига. Это обстоятельство существенно ограничивает многообразие математических моделей сред от шестнадцати (в динамике) до трех (в статике): пластическая среда, обладающая только сцеплением  $C_1 \neq 0$

$$\tau_{int} = C_1; \quad (2.19)$$

несвязная сыпучая среда, обладающая только внутренним трением  $C_2 \neq 0$

$$\tau_{int} = C_2; \quad (2.20)$$

сыпучая среда, обладающая и сцеплением  $C_1 \neq 0$ , и трением  $C_2 \neq 0$

$$\tau_{int} = C_1 + C_2 \sigma_{mid}. \quad (2.21)$$

Таблица 2.1

### Классификация несжимаемых сплошных сред

Название среды по Гениеву	Частная форма условия пластичности
1. Идеально-деформируемая	$\tau_{int} = 0$
2. Пластическая	$\tau_{int} = C_1$
3. Несвязная сыпучая	$\tau_{int} = C_2 \sigma_{mid}$
4. Сыпучая	$\tau_{int} = C_1 + C_2 \sigma_{mid}$
5. Вязкая	$\tau_{int} = C_3 H$
6. Вязко-пластическая	$\tau_{int} = C_1 + C_3 H$
7. Несвязная вязко-сыпучая	$\tau_{int} = C_2 \sigma_{mid} + C_3 H$
8. Вязко-сыпучая	$\tau_{int} = C_1 + C_2 \sigma_{mid} + C_3 H$
9. Идеальная баровязкая	$\tau_{int} = C_4 H \sigma_{mid}$
10. Идеальная баровязко-пластическая	$\tau_{int} = C_1 + C_4 H \sigma_{mid}$
11. Идеальная баровязкая несвязная сыпучая	$\tau_{int} = C_2 \sigma_{mid} + C_4 H \sigma_{mid}$
12. Идеальная баровязкая сыпучая	$\tau_{int} = C_1 + C_2 \sigma_{mid} + C_4 H \sigma_{mid}$
13. Баровязкая	$\tau_{int} = C_3 H + C_4 H \sigma_{mid}$
14. Баровязко-пластическая	$\tau_{int} = C_1 + C_3 H + C_4 H \sigma_{mid}$
15. Баровязкая несвязная сыпучая	$\tau_{int} = C_2 \sigma_{mid} + C_3 H + C_4 H \sigma_{mid}$
16. Баровязкая сыпучая	$\tau_{int} = C_1 + C_2 \sigma_{mid} + C_3 H + C_4 H \sigma_{mid}$

В работе [149] указывается на то, что переход нагруженной среды в пластическое состояние не зависит от величины гидростатического давления. В конечном итоге, такой подход позволяет обобщить условия пластичности Треска–Сен-Венана (2.5) и Хубера–Мизеса–Генки (2.8), понимая, что первое является приближением второго.

Возвращаясь к обобщенному условию Гениева (2.18) и его частному варианту (2.21), укажем, что последнее можно понимать как (2.18) в статике. Теперь, усматривая аналогию между (2.21) и (2.12), условие предельного равновесия сыпучей среды (2.12) также можно трактовать как обобщенное условие для статической задачи, объединяющее свойства двух сред: идеально-сыпучей [157], обладающей только внутренним трением  $\rho \neq 0$ , но не проявляющей связности  $k = 0$

$$|\sigma_{\nu\tau}| = \sigma_{\nu\nu} \operatorname{tg} \rho; \quad (2.22)$$

идеально-связной [157], обладающей только сцеплением  $k \neq 0$ , но не проявляющей внутреннее трение  $\rho = 0$

$$|\sigma_{\nu\tau}| = k. \quad (2.23)$$

Как видим, предельное условие (2.23) для идеально-связной среды полностью повторяет такое (2.5) для пластической среды (условие Треска–Сен-Венана). В этом можно также убедиться, посмотрев на рис. 2.7 и 2.3. В случае, когда внутреннее трение отсутствует ( $\rho = 0$ ), положение предельной прямой на обоих рисунках 2.7 и 2.3 одинаково горизонтальное.

Поскольку усложнение математической модели часто приводит к снижению результирующей точности решения конкретной задачи [167], то в дальнейшем моделируя свойства почвы ограничимся применением условия предельного равновесия (2.23) для идеально-связной среды.

### 2.3. Понятие плоской задачи

В механике сплошных сред можно выделить три вида задач (основных), которые могут рассматриваться в рамках двумерного базиса, так называемые плоские (двухосное) задачи, а именно: плоское напряженное состояние, плоское деформированное состояние (плоская деформация) и плоское предельное равновесное состояние (плоское предельное равновесие). Разумеется, они неэквивалентные.

- — плоское напряженное состояние.

В работе [158] дано определение: “Если напряженное состояние рассматривать в ортогональной декартовой системе координат, то при плоском напряженном состоянии компоненты тензора напряжений  $\sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  равны нулю, а остальные компоненты являются функциями координат  $x, y$  и не зависят от  $z$ ”. Главные нормальные напряжения в таком случае определяются из условия равенства нулю определителя [158]:

$$\det \begin{pmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_{\nu}) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_{yy} - \sigma_{\nu}) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_{zz} - \sigma_{\nu}) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.24)$$

Последнее, с учетом того, что  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ , дает [158]:

$$\begin{cases} \sigma_{1,2} = \sigma_{\nu\pm} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \right], \\ \sigma_3 = \sigma_{zz} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

В работе [155] приводится, что если третий инвариант напряженного состояния  $I_3$  равен нулю, то такое напряженное состояние среды называется плоским. По своей сути это определение не отличается от предыдущего. Ведь  $I_3 = 0$ , только в случае, когда  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ .

В работе [159] плоским напряженным состоянием называется такое, при котором все действующие на материальную точку напряжения параллельны одной плоскости и выполняется требование  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ .

Требование на равенство нулю одного из главных нормальных напряжений предполагает и формулировка плоского напряженного состояния среды, приведенная в работе [168].

- — плоское деформированное состояние.

Если напряженное состояние нагруженного тела таково, что перемещения всех его точек происходят в одной плоскости  $(x, y)$ , то такую деформацию называют плоской [158]. При этом напряжения, перемещения и деформации не зависят от координаты  $z$  и являются функциями двух других координат  $x, y$ . Сечения, перпендикулярные к оси  $z$ , при деформации не искривляются. Касательные напряжения в этих сечениях равны нулю, а, значит, плоскости, перпендикулярные к оси  $z$ , являются главными [158].

Напряженное состояние при плоской деформации в каждой точке нагруженного тела характеризуется тензором напряжений [158]:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

где, в случае несжимаемого материала, предполагается, что

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}. \quad (2.27)$$

Как видим, формулировки плоского напряженного и деформированного состояний, взятые из одного источника [158], по ограничениям, накладываемым на компоненты тензора напряжений, не совпадают. В первом случае предполагается  $\sigma_{zz} = 0$ , а во втором требуется (2.27). В работе [159] ситуация повторяется. В случае плоского деформированного состояния равенство нулю одного из главных нормальных напряжений не требуется.

В работе [149] сказано, что в случае плоской деформации или плоского напряженного состояния частные производные в дифференциальных уравнениях равновесия (2.3) от компонент тензора напряжений, содержащих индекс  $z$ , обращаются в нули. В таком случае, из (2.3) получаем (2.4). В этой работе в случае плоского напряженного состояния предполагается,



что  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ , в то время как в задачах плоской деформации  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ , а  $\sigma_{zz}$  определяется выражением (2.27). Такие же требования приводятся в работах [161, 169]. В работе [170] в формулировке понятия плоской деформации ограничение на значение  $\sigma_{zz}$  не выдвигается.

- — плоское предельное равновесие.

Плоским равновесием будем называть равновесие бесконечно длинного цилиндрического или призматического тела под действием сил, перпендикулярных к образующим и распределенных в их направлении равномерно [157]. Обычно при изучении плоского равновесия принято применять прямолинейную систему координат  $x, y, z$ , ось  $z$  которой направлена параллельно образующим [157]. Компоненты напряжений  $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ , а остальные компоненты  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}$  не зависят от координат  $z$  [157]. Такое определение нельзя назвать строгим, поэтому далее его уточним.

Плоским называется такое предельное равновесие (п. 2.2), при котором кроме какого-либо предельного условия, например, (2.12) и (2.13), выполняется следующие: а) тензор напряжений  $\sigma_{ik}$ , определенный в декартовом базисе, является функцией только двух координат, которые обозначаем  $x$  и  $y$ ; б) компоненты тензора напряжений  $\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$  — равны нулю; в) для ориентированного вдоль оси  $Oz$  нормального напряжения  $\sigma_{zz}$ , которое является главным  $\sigma_2$ , выполняется ограничение

$$\sigma_{zz} = \sigma_2 \in [\sigma_1, \sigma_3]. \quad (2.28)$$

С учетом объявленных ограничений заключаем, что ось  $Oz$  всегда совпадает с одним из главных нормальных напряжений, а плоскость  $Oxy$  — с одной из главных площадок. В этом случае наряду с отсутствием касательных напряжений на  $Oxy$  и параллельных к ней площадках, вследствие закона о парности касательных напряжений, отсутствуют и другие ориентированные перпендикулярно к плоскости  $Oxy$  касательные напряжения.

Если из интервала (2.28) исключить граничные значения:  $\sigma_{zz} \in ]\sigma_1, \sigma_3[$ , то положение площадок скольжения, на которых выполняются предельные условия (2.12) и (2.13), становится определенным (рис. 2.7): они всегда параллельны оси  $Oz$  или содержат ее. Бесконечные совокупности площадок скольжения образуют поверхности скольжения, которые в рассматриваемом случае остаются цилиндрическими и, пересекаясь с плоскостью  $Oxy$ , отображаются на ней в виде криволинейных линий скольжения.

Если же условие (2.28) выполняться не будет, то линии скольжения перейдут на другую, перпендикулярную к  $Oxy$  плоскость, и решение задачи в рамках координат  $x$  и  $y$  станет невозможным. В случае, когда  $\sigma_{zz} = (\sigma_3 \vee \sigma_1)$ , на самом деле положение площадок скольжения не определено, хотя решение может быть найдено в прежних координатах.

Таким образом, обозначенный класс задач — это плоское предельное равновесие идеально-сыпучей, идеально-вязкой и сыпучей сред. Главное их требование — выполнение предельных условий (2.12) и (2.13).

Как уже было показано выше, в работах [155, 158, 159, 168, 171] понятие плоской задачи формулируется иначе, во-первых ее называют “плоским на-

пряженным состоянием”, а во-вторых — полагают, что  $\sigma_{zz} = 0$ . В нашем случае такой подход неприемлем, поскольку, в зависимости от величины и знаков двух других главных нормальных напряжений, ориентация предельных площадок изменяется и, в конечном итоге, положение линий скольжения не ограничится координатной плоскостью  $Oxy$ .

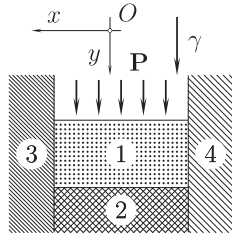


Рис. 2.8

Физически изучаемая ситуация реализуется, например (рис. 2.8), в объеме модельного вещества 1, покоящегося на основании 2 между двумя плоскими параллельными вертикальными неподвижными стенками 3 и 4 бесконечной длины. Длинная их сторона ориентирована по нормали к плоскости рисунка. Предполагается, что поверхность модельного вещества является цилиндрической или плоской, а их горизонтальная образующая ориентирована параллельно стенкам. Плоскость  $Oxy$  декартовой системы координат  $Oxyz$  совпадает с плоскостью рисунка, ось  $z$  (не показана),

а одна из осей  $x$  или  $y$  — перпендикулярна к обеим стенкам. Модельное вещество весомо ( $\gamma$  — параметр, определяющий его вес), а вдоль его поверхности возможно внешнее нагружение  $\mathbf{P}$ , величина и характер которого не зависят от координаты  $z$ . Такая задача нашла отражение в ряде теоретических и прикладных работ автора [172–179].

#### 2.4. Компоненты тензора напряжений

для случая плоского предельного равновесия

Все компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  (рис. 2.9) в случае плоского предельного равновесия идеально-вязкой среды (когда  $\rho = 0$ ,  $k \neq 0$  и выполняется (2.23)) можно вычислить через главные напряжения  $\sigma_1$  и

$\sigma_3$ , задавая их ориентацию по отношению к декартовой системы координат  $Oxy$  с помощью угла  $\varphi$  между вектором  $\sigma_3$  и осью  $Ox$ .

Введем обозначение:

$$s = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \quad (2.29)$$

— полусумма главных нормальных напряжений  $\sigma_3$  и  $\sigma_1$ .

Вначале перепишем выражения (2.17), определяющие величины  $\sigma_{\nu\nu}$  и  $\sigma_{\nu\tau}$ , с учетом обозначений  $s$  (2.29),  $\tau_{\max}$  (2.6). Затем полученные выражения для  $\sigma_{\nu\nu}$  и  $\sigma_{\nu\tau}$  подставляем в (2.23). В результате получаем:

$$\tau_{\max} = k. \quad (2.30)$$

Это выражение по сути эквивалентно предельному условию (2.23).

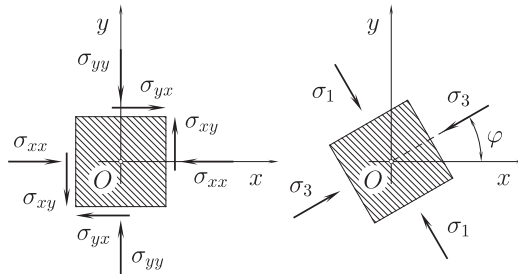


Рис. 2.9

Далее, воспользовавшись выражением (2.30) и методом Мора, получим выражения для компонентов тензора напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = s + k \cos 2\varphi, \\ \sigma_{yy} = s - k \cos 2\varphi, \\ \sigma_{xy} = k \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (2.31)$$

### 2.5. Условие предельного равновесия в компонентах тензора напряжений

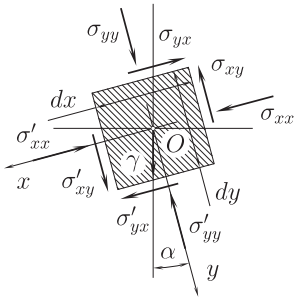
Обратившись к выражениям (2.31), путем ряда постановок и формальных преобразований получаем:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4k^2 \quad (2.32)$$

— условие плоского предельного равновесия в компонентах тензора напряжений для идеально-вязкой среды. Последнее совпадает с таковым для пластической среды [149, 153, 154, 158].

### 2.6. Дифференциальные уравнения плоского предельного равновесия

Обратимся к дифференциальным уравнениям равновесия (2.4), относящимся к плоской задаче и рассмотрим рис. 2.10 как частный случай рис. 2.1. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и  $\sigma'_{ij}$  определяются формулами (2.1) и (2.2). Положим, что модельное вещество весомо и  $\gamma$  — постоянная, характеризующая его удельный вес. Ориентацию осей  $x$  и  $y$  определим углом  $\alpha \geq 0$  между положительным направлением оси  $y$  и вектором силы тяжести. Тогда уравнения равновесия (2.4) примут следующий вид [157, 158, 171]:



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \gamma \sin \alpha, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \gamma \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.33)$$

Рис. 2.10

Эти уравнения, дополняются условием предельного равновесия (2.32), которое связывают функции  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}(x, y)$  и делают систему (2.33) определенной. Предельному условию (2.32) тождественно удовлетворяют выражения (2.31).

Дифференцируя последние и подставляя полученное в уравнения (2.33), получаем систему уравнений [158, 171]:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial x} - 2k \left( \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \gamma \sin \alpha, \\ \frac{\partial s}{\partial y} + 2k \left( \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \gamma \cos \alpha, \end{cases} \quad (2.34)$$

именуемую системой предельного равновесия идеально-связной среды и почти повторяющую такую-же — для пластической среды [158, 171].

Путем формальных преобразований [157, 167] система (2.34) приводится к симметричной форме [157]:

$$\begin{aligned} & \cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial s}{\partial x} + \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial s}{\partial y} \mp \\ & \mp 2k \left[ \cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = \quad (2.35) \\ & = \gamma \left[ \sin \alpha \cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) + \cos \alpha \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

Система (2.35) является определенной. В качестве независимых переменных выступают координаты  $x, y$ , а в качестве неизвестных — функции  $s = s(x, y)$  (2.29) и  $\varphi = \varphi(x, y)$ . Прежде чем приступить к решению, необходимо их исследовать, т.е. определить, к какому классу они относятся и какие методы решения известны для данного класса систем. Подробно такое исследование приведено в работе [167].

Обозначим через  $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$  евклидову плоскость, отнесенную к фиксированной декартовой прямоугольной системе координат  $Oxy$  и выделим в ней некоторую непустую односвязную область  $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}_{(x,y)}^2$ . Пусть  $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)$  — множество некоторых непрерывных функций, для которых  $D$  является областью определения. Введем векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1, u_2, \dots, u_n), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

и обозначим через  $\mathbb{R}_{(x,y,\mathbf{u})}^{n+2}$  некоторое евклидово пространство, также отнесенное к ортонормированному базису, и по отношению к которому ранее определенная евклидова плоскость  $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$  является подпространством. Положим  $G \subset \mathbb{R}_{(x,y,\mathbf{u})}^{n+2}$  — некоторая непустая область.

Далее рассмотрим некоторую систему уравнений, записанную в векторной (матричной) форме:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i \left( x, y, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) &= 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}_{(x,y)}^2, \quad \mathbf{u} : D \rightarrow G \subset \mathbb{R}_{(x,y,\mathbf{u})}^{n+2}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где  $D$  — область определения системы;  $G$  — область ее решений.

Система (2.37) называется системой квазилинейных уравнений, если функции  $\mathcal{F}_i$  линейны относительно производных  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ ; если же  $\mathcal{F}_i$  линейны по совокупности переменных  $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ , то система (2.37) называется линейной [183].

Имея ввиду двумерный случай предельного равновесия, далее остановимся на рассмотрении систем двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, приводимых к нормальной форме [183]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{b}, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (2.38)$$

где область  $D$  — односвязная;  $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^2$  — вектор-столбец искомым функций  $u_i = u_i(x, y)$ ;  $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^2$  — вектор-столбец правых частей уравнений  $b_i = b_i(x, y, \mathbf{u})$ ;  $\mathbf{A} = (a_{ij}(x, y, \mathbf{u}))_{i,j=1}^2$  — матрица системы.

В рамках рассматриваемого класса систем уравнений различают эллиптические [184–196], параболические [184, 185, 187–190, 192–196] и гиперболические [183–188, 190–197] уравнения и их системы. В теории предельного равновесия применение нашли только гиперболические системы. Поэтому далее будем рассматривать именно их.

Пусть  $\mathbf{l}^i = (l_1^i(x, y, \mathbf{u}), l_2^i(x, y, \mathbf{u}))$ ,  $i=1, 2$  — левые собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}$ , соответствующие ее собственным значениям  $\xi_i(x, y, \mathbf{u})$ , т.е.

$$\mathbf{l}^i \mathbf{A} = \xi_i \mathbf{l}^i, \quad i = 1, 2, \quad (2.39)$$

где суммирование по  $i$  не предполагается.

Система квазилинейных уравнений (2.38) называется гиперболической в области  $D$ , если для всех  $(x, y) \in D$ : во-первых, все собственные значения  $\xi_i(x, y, \mathbf{u})$ ,  $i = 1, 2$  матрицы  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, \mathbf{u})$  вещественны; во-вторых, существуют линейно независимые нормированные левые собственные векторы  $\mathbf{l}^i(x, y, \mathbf{u})$ ,  $i = 1, 2$  [183, 186, 195], т.е.

$$\det \begin{pmatrix} l_1^1 & l_2^1 \\ l_1^2 & l_2^2 \end{pmatrix} \neq 0. \quad (2.40)$$

Система квазилинейных уравнений (2.38) называется гиперболической в узком смысле в  $D$ , если для всех  $(x, y) \in D$  выполняются условия квазилинейности, а собственные значения  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$  матрицы  $\mathbf{A}$  различны [183].

### 2.7. Характеристический метод решения гиперболических систем уравнений

Если для системы (2.38) условия гиперболичности соблюдаются, то, домножив ее слева на собственные векторы  $\mathbf{l}^i$ ,  $i = 1, 2$  матрицы  $\mathbf{A}$  и выполнив замену  $\mathbf{l}^i \mathbf{A}$  согласно (2.39), приводим систему (2.38) к виду [186]:

$$\mathbf{l}^i \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \xi_{(i)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) = \mathbf{l}^i \mathbf{b}, \quad i = 1, 2. \quad (2.41)$$

Под характеристическими направлениями системы (2.38) условимся понимать определенные уравнениями

$$\frac{dy}{dx} = \xi_i(x, y, \mathbf{u}), \quad i = 1, 2 \quad (2.42)$$

направления дифференцирования искомой функции  $\mathbf{u}(x, y)$  в уравнениях (2.41) [183], а сами уравнения (2.42) условимся называть дифференциальными уравнениями характеристик [157].

Первые интегралы

$$\chi_i(x, y, \mathbf{u}) = \lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2 \quad (2.43)$$

дифференциальных уравнений характеристик (2.42) определяют два однопараметрических семейства характеристических кривых с параметрами  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , соответствующими собственным значениям  $\xi_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  [157].

Заметим, что направление (2.42) дифференцирования вектора  $\mathbf{u}$  зависит от самого  $\mathbf{u}$ , но, однако, определяется не в пространстве решений  $\mathbb{R}_{(x, y, u_1, u_2)}^4$ , а на евклидовой плоскости аргументов  $\mathbb{R}_{(x, y)}^2$  в пределах области определения  $D$ . По этой причине под характеристиками часто понимают их проекции на плоскость аргументов  $\mathbb{R}_{(x, y)}^2$  [157, 183]. Характеристики как проекции на  $\mathbb{R}_{(x, y)}^2$ , принадлежащие к разным семействам, пересекаются под углом  $2\varepsilon$ , который определяется из уравнений (2.42)

$$|2\varepsilon| = |\arctg(\xi_1) - \arctg(\xi_2)|. \quad (2.44)$$

Именно проекции характеристик имеют в виду, когда два семейства характеристик используют как семейства координатных кривых, т.е. предполагают замену  $x = x(\boldsymbol{\lambda})$ ,  $y = y(\boldsymbol{\lambda})$ , где  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ . Часто характеристиками называют линии  $\lambda_i = \text{const}$ , рассматривая их на плоскости  $\mathbb{R}_{(\lambda_1, \lambda_2)}^2$ .

Используем тоже такой подход, и поэтому рассмотрим замену  $x = x(\boldsymbol{\lambda})$ ,  $y = y(\boldsymbol{\lambda})$ . Учитывая выражения для полных дифференциалов

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} d\lambda_2, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 \quad (2.45)$$

и обстоятельство, что вдоль каждой характеристики  $i$ -го семейства  $\lambda_i = \text{const}$  и, соответственно,  $d\lambda_i = 0$ , уравнения (2.42) дают [157, 158]:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_j} = \xi_i \frac{\partial x}{\partial \lambda_j} \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (2.46)$$

Обозначим  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{u}(x(\boldsymbol{\lambda}), y(\boldsymbol{\lambda}))$  и запишем частные производные

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda_j}, \quad j = 1, 2. \quad (2.47)$$

Далее, выполнив подстановку  $\partial y / \partial \lambda_j$  из (2.46) в (2.47), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_j} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \xi_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial \lambda_j}. \quad (2.48)$$

Теперь, с учетом системы (2.41), приводим систему (2.48) к виду [186]:

$$\mathbf{l}^i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_j} = \mathbf{l}^i \mathbf{b} \frac{\partial x}{\partial \lambda_j} \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (2.49)$$

Уравнения (2.49), выполняющиеся вдоль линий характеристик  $\lambda_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$  и являющиеся следствиями уравнений исходной системы (2.38), условимся называть соотношениями, выполняющимися на характеристиках или соотношениями на характеристиках. Они одинаковы для любой из характеристик одного и того же семейства, равно как и сами уравнения (2.42) характеристик этого же семейства. Для некоторых систем соотношения на характеристиках (2.49) удается интегрировать [157, 158].

### 2.8. Определение и классификация краевых задач

Применительно к системе квазилинейных уравнений гиперболического типа (2.38) большинство авторов выделяет три [158] или четыре [157] типа задач с дополнительными условиями, которые обычно именуют краевыми, начальными или граничными.

Для системы двух уравнений в частных производных (2.38) такие задачи интерпретируются геометрически как задача построения в пространстве  $\mathbb{R}_{(x,y,u_1,u_2)}^{2+2}$  интегральной поверхности, соответствующей вектор-функции  $\mathbf{u}(x, y)$  и содержащей отрезок некоторой, необязательно гладкой, кривой  $\mathcal{L}$ , заданной, например, параметрически

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad \tau \in [a, b]. \quad (2.50)$$

Предполагается, что вдоль отрезка  $\mathcal{L}$ , который обязательно принадлежит области определения ( $\mathcal{L} \in D$ ), выполняется требование:

$$\mathbf{u}(x, y)|_{\mathcal{L}} = \mathbf{u}(x(\tau), y(\tau)) = \mathbf{u}^o(\tau), \quad \tau \in [a, b], \quad (2.51)$$

где  $\mathbf{u}^o(\tau)$  — некоторая известная функция.

Введем некоторые понятия и впредь условия (2.51) будем называть граничными условиями, вектор-функцию  $\mathbf{u}^o(\tau)$  — граничной функцией, а кривую  $\mathcal{L}$  (2.50) — граничной кривой. Термин “граничные” условия, функции и т.д. чаще применяется в задачах, когда в качестве независимых переменных выступают координаты геометрического пространства (как в нашем случае) [159]. В динамических задачах, когда одной из независимых переменных является время  $t$ , условия, касающиеся времени  $t = 0$ , часто называют “начальными”, а другие, не зависящие от  $t$  и связанные с координатами геометрического пространства, — “граничными” [193, 198]. Если дополнительные условия связывают между собой и время, и координаты пространства, то их называют “краевыми” [183]. Сами задачи условимся называть краевыми [157, 158], а условия, роль время в качестве независимой переменной в статике не фигурирует, — граничными.

Собственно классификация краевых задач строится на том, что представляет собой граничная кривая или составляющие ее отрезки.

*Первая краевая задача* [157] или *задача Коши* [158, 184, 185, 187]. Ее отличительная особенность состоит в том, что отрезок граничной кривой, вдоль которого задана граничная функция, единожды пересекает каждую из характеристик (2.42) системы (2.38) [158].

*Вторая краевая задача* [157] или *задача Римана* [158] предполагает, что граничная кривая состоит из двух сопряженных краями отрезков характеристик, принадлежащих различным семействам.

*Третья краевая задача* [157], *задача Гурса* [183] также подразумевает, что граничная кривая состоит из двух сопряженных концами отрезков, один из которых совпадает с одной из характеристик, а второй соответствует требованиям первой краевой задачи.

*Четвертая краевая* [157] или *смешанная задача* [183] по своей сути являет собою произвольную комбинацию первых трех задач и при их решении последовательно возникают условия задач Коши, Гурса и/или Римана.

- Численное решение задачи Коши.

Возвращаясь к задаче Коши (2.38), (2.50), (2.51), рассмотрим как систему уравнения характеристик (2.46) и соотношений на них (2.49)

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \lambda_j} = \xi_i \frac{\partial x}{\partial \lambda_j}, \\ \mathbf{l}^i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_j} = \mathbf{l}^i \mathbf{b} \frac{\partial x}{\partial \lambda_j}, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (2.52)$$

Далее домножим оба уравнения (2.52) на полный дифференциал  $d\lambda_j$ . И выполним замену развернутой записи частных дифференциалов

$$d_{\lambda_i} x = \frac{\partial x}{\partial \lambda_j} d\lambda_j, \quad d_{\lambda_i} y = \frac{\partial y}{\partial \lambda_j} d\lambda_j, \quad d_{\lambda_i} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_j}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \quad (2.53)$$

на их обозначения:  $d_{\lambda_i} x$ ,  $d_{\lambda_i} y$ ,  $d_{\lambda_i} \mathbf{u} = (d_{\lambda_i} u_1, d_{\lambda_i} u_1)^t$  — вектор столбец. Тут слева используется индекс  $i$  по той причине, что при дифференцировании по  $\partial/\partial \lambda_j$  в результате получаем производную по направлению характеристики семейства  $\lambda_i = \text{const}$ , которой соответствует собственное значение  $\xi_i$ . В конечном итоге получаем:

$$\begin{cases} d_{\lambda_i} y = \xi_i d_{\lambda_i} x, \\ \mathbf{l}^i d_{\lambda_i} \mathbf{u} = \mathbf{l}^i \mathbf{b} d_{\lambda_i} x, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (2.54)$$

Далее откажемся от векторной записи переменных

$$\begin{cases} d_{\lambda_i} y = \xi_i d_{\lambda_i} x, \\ l_1^i d_{\lambda_i} u_1 + l_2^i d_{\lambda_i} u_2 = (l_1^i b_1 + l_2^i b_2) d_{\lambda_i} x, \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (2.55)$$

и обратимся к графической интерпретации алгоритма решения рассматриваемой задачи Коши (рис. 2.11). На рисунке  $AB$  обозначает отрезок граничной кривой  $\mathcal{L}$ . Семейство характеристик  $\lambda_1 = \text{const}$  ориентировано слева направо, а семейство  $\lambda_2 = \text{const}$  снизу вверх. Частные дифференциалы  $d_{\lambda_i} x$ ,  $d_{\lambda_i} y$ ,  $i = 1, 2$  изображены для случая перехода от узлов характеристик под номерами 1 и 2 в безымянную точку пересечения разноименных характеристик, исходящих из указанных узлов.



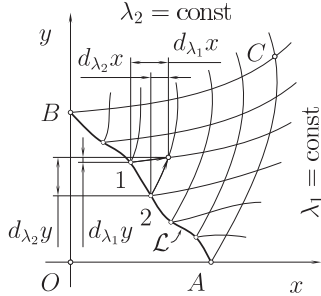


Рис. 2.11

Обозначим конкретные значения независимых координат  $x_1, y_1$  и значений функций  $u_{i1}, i = 1, 2$  в узле номер 1;  $x_2, y_2, u_{i2}, i = 1, 2$  — в узле номер 2; а также величинами без индексов  $x, y, u_i, i = 1, 2$  — те же параметры, относящиеся к безымянному узлу. В таком случае частные дифференциалы  $d_{\lambda_i} x, d_{\lambda_i} y, d_{\lambda_i} u_1, d_{\lambda_i} u_2, i = 1, 2$  можем записать в виде конечных разностей:

$$\begin{aligned} d_{\lambda_i} x &= x - x_i, & d_{\lambda_i} y &= y - y_i, \\ d_{\lambda_i} u_1 &= u_1 - u_{1i}, & d_{\lambda_i} u_2 &= u_2 - u_{2i}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Перепишем систему (2.55) с учетом конечных разностей (2.56):

$$\begin{cases} y - y_i = \xi_i (x - x_i), \\ l_1^i (u_1 - u_{1i}) + l_2^i (u_2 - u_{2i}) = (l_1^i b_1 + l_2^i b_2) (x - x_i), \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (2.57)$$

где собственные значения  $\xi_i$ , собственные векторы  $l_1^i, l_2^i$ , и правые части уравнений  $b_1, b_2$  следует понимать как функции  $x_i, y_i, u_{1i}, u_{2i}, i = 1, 2$ .

Как видим, в конечном итоге получили систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $x, y, u_1, u_2$ . Решение этой системы дает значения перечисленных величин в безымянном узле характеристической сетки.

Последовательно повторяя решения системы (2.56) сначала для всех пар узлов на  $\mathcal{L}$ , а затем вдоль прежде просчитанных узлов, для задачи Коши (2.38), (2.50), (2.51), можно получить решение  $\mathbf{u}(x, y)$  для всей площади опирающегося на  $\mathcal{L}$  характеристического треугольника  $ABC$ .

Продлить решение за пределы огибающих характеристик  $AC$  и  $BC$  рассматриваемым методом невозможно. И более того, коль раньше характеристика определена как линия, через которую решение распространяется неоднозначно, то для продления решения через характеристики  $AC$  и  $BC$ , очевидно, потребуются дополнительные условия [183].

Предложенный выше метод решения задачи Коши рассматривается в работе [157]. Известны также иные численные методы [200–203], в частности, предполагающие последовательное приближение решения [183].

- Задача Римана и ее численное решение.

Построим решение  $\mathbf{u}(x, y)$  системы (2.38), когда граничная кривая  $\mathcal{L}$  состоит из двух отрезков  $\mathcal{L}_{AB}$  и  $\mathcal{L}_{AC}$  линий характеристик различных семейств  $\lambda_2 = \text{const}$  и  $\lambda_1 = \text{const}$ , соответственно, выходящих из одной точки (рис. 2.12). Оба отрезка заданы параметрически

$$\begin{aligned} x &= X_{AB}(\tau), & y &= Y_{AB}(\tau), & \tau &\in [a, b]; \\ x &= X_{AC}(\tau), & y &= Y_{AC}(\tau), & \tau &\in [a, c]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$X_{AB}(\tau)|_{\tau=a} = X_{AC}(\tau)|_{\tau=a}, \quad Y_{AB}(\tau)|_{\tau=a} = Y_{AC}(\tau)|_{\tau=a}.$$

Предполагается, что вдоль  $(\mathcal{L}_{AB}, \mathcal{L}_{AC}) \in D$ , выполняются требования:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y)|_{\mathcal{L}_{AB}} &= \mathbf{u}(X_{AB}(\tau), Y_{AB}(\tau)) = \mathbf{u}_{AB}^o(\tau), \quad \tau \in [a, b], \\ \mathbf{u}(x, y)|_{\mathcal{L}_{AC}} &= \mathbf{u}(X_{AC}(\tau), Y_{AC}(\tau)) = \mathbf{u}_{AC}^o(\tau), \quad \tau \in [a, c], \\ \mathbf{u}_{AB}^o(\tau)|_{\tau=a} &= \mathbf{u}_{AC}^o(\tau)|_{\tau=a}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

где  $\mathbf{u}_{AB}^o(\tau)$  и  $\mathbf{u}_{AC}^o(\tau)$  — некоторые известные непрерывные, по меньшей мере один раз дифференцируемые функции. Как минимум, такое же требование гладкости распространяется и на функции параметра  $\tau$  (2.58).

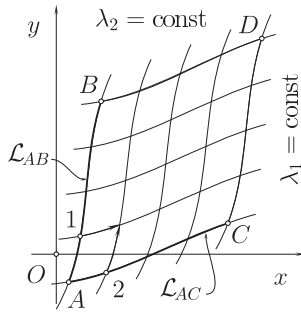


Рис. 2.12

Пояснение процесса решения краевой задачи Римана (2.38), (2.58), (2.59) выполним, как и ранее, на примере метода конечных разностей. При этом, непосредственно применим систему (2.57). Сначала расчет ведется вдоль отрезка одной известной характеристики ( $AC$ ), затем вдоль известного отрезка другой ( $AB$ ). Далее процесс повторяется снова, начиная с пары внутренних узлов. Таким образом строится решение  $\mathbf{u}(x, y)$  в пределах характеристического четырехугольника  $ABDC$ .

• Простейший алгоритм решения задачи Гурса

Сформулируем применительно к системе (2.38) граничные условия для краевой задачи Гурса. Положим,  $\mathcal{L}$ , как и в задаче Римана, состоит из двух сопряженных в точке  $A$  отрезков  $\mathcal{L}_{AB}$  и  $\mathcal{L}_{AC}$  (рис. 2.13), первый из которых совпадает с характеристикой  $\lambda_2 = \text{const}$  и задан параметрически

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad \tau \in [a, b], \quad (2.60)$$

и вдоль него известна граничная функция

$$\mathbf{u}(x, y)|_{\mathcal{L}_{AB}} = \mathbf{u}(x(\tau), y(\tau)) = \mathbf{u}^o(\tau), \quad \tau \in [a, b], \quad (2.61)$$

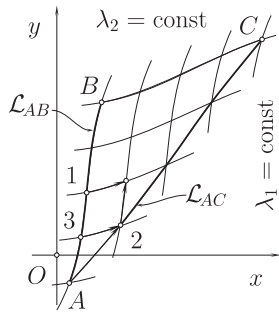


Рис. 2.13

а второй  $\mathcal{L}_{AC}$  отвечает требованиям задачи Коши в том смысле, что каждую из характеристик пересекает только один раз. Вдоль  $\mathcal{L}_{AC}$  известны два конечных или дифференциальных соотношения

$$\mathcal{F}_i \left( x, y, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.62)$$

Решение задачи Гурса (2.38), (2.60)–(2.62) начинается с приведения дифференциальных соотношений (2.62) к конечно разностному виду:

$$\tilde{\mathcal{F}}_i(x_A, y_A, \mathbf{u}_A, x_2, y_2, \mathbf{u}_2) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.63)$$

где индексы при  $x, y, \mathbf{u}$  соответствуют узлам на рис. 2.13. Значения  $x_A, y_A, \mathbf{u}_A$  известны из (2.60), (2.61). Поэтому перепишем (2.63) с пониманием, что неизвестными являются только  $x_2, y_2, \mathbf{u}_2$

$$\tilde{\mathcal{F}}_i(x_2, y_2, \mathbf{u}_2) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.64)$$

Если же вдоль  $\mathcal{L}_{AC}$  изначально заданы именно конечные соотношения, то их следует понимать как форму (2.64). Система (2.64) не является определенной: неизвестных четыре, а уравнений два. Дополним ее двумя уравнениями в конечных разностях (2.57), соответствующих характеристике  $\lambda_1 = \text{const}$ , т.е. когда  $i = 1$ . Но при этом, имея в виду пару узлов 3 и 2, в уравнениях (2.57) величинам  $x, y, u_1$  и  $u_2$ , относящимся к безымянному узлу на рис. 2.12, присвоим индекс 2, а величинам  $x_1, y_1, u_{11}$  и  $u_{21}$ , относящимся к узлу номер 1, присвоим индекс 3. В итоге имеем

$$\begin{cases} y_2 - y_3 = \xi_i(x_2 - x_3), \\ l_1^i(u_{12} - u_{13}) + l_2^i(u_{22} - u_{23}) = (l_1^i b_1 + l_2^i b_2)(x_2 - x_3), \\ \tilde{\mathcal{F}}_j(x_2, y_2, \mathbf{u}_2) = 0, \quad j = 1, 2, \end{cases} \quad (2.65)$$

где  $i = 1$  — в соответствии с номером семейства характеристики, которая рассматривается;  $x_3, y_3, u_{13}$  и  $u_{23}$  — известные из граничных условий (2.60), (2.61) величины. Таким образом, получили систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных  $x_2, y_2, u_{12}$  и  $u_{22}$ . Решив ее, находим неизвестные величины для узла номер 2.

Дальше, имея в виду узлы 1 и 2, выполняются вычисления в точности с алгоритмом решения задачи Римана. Ведь известные параметры принадлежат двум характеристикам из различных семейств, а безымянный узел, на который указывают стрелки на рис. 2.13, расположен на их пересечении.

После выполнения этого шага выполняется предыдущий, но уже со смещением на один узел вдоль граничного отрезка  $\mathcal{L}_{AC}$ . Затем снова выполняется алгоритм решения задачи Римана, но уже дважды и т.д. пока не будет построено решение  $\mathbf{u}(x, y)$  для всей области  $ABC$ .

Как видим, поиск решения  $\mathbf{u}(x, y)$  для задачи Гурса предполагает использование алгоритма, который ранее применялся при решении задачи Римана. По этой причине задачу Гурса иногда называют смешанной.

- Конечно-разностный алгоритм решения смешанной задачи.

Постановку смешанной задачи для гиперболической системы (2.38) выполним в соответствии с работой [183]. Следует найти решение  $\mathbf{u}(x, y)$  системы (2.38), принимающее при  $y = 0$  заданные значения

$$\mathbf{u}(x, y)|_{y=0} = \mathbf{u}^o(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.66)$$

и удовлетворяющее некоторым дополнительным граничным условиям

$$\mathcal{F}_i(x, y, \mathbf{u}(x, y))|_{\mathcal{L}_1} = 0, \quad \mathcal{G}_i(x, y, \mathbf{u}(x, y))|_{\mathcal{L}_2} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (2.67)$$

которые задаются на некоторых линиях  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , выходящих соответственно из концов  $x = a$  и  $x = b$  отрезка  $[a, b]$  оси  $y = 0$  (рис. 2.14).

Будем считать, что кривые  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  обладают непрерывно изменяющейся касательной, и условия (2.66) на концах отрезка  $x \in [a, b]$  тождественно удовлетворяют соотношениям (2.67):

$$\mathcal{F}_i(a, 0, \mathbf{u}^o(a)) = 0, \quad \mathcal{G}_i(b, 0, \mathbf{u}^o(b)) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (2.68)$$

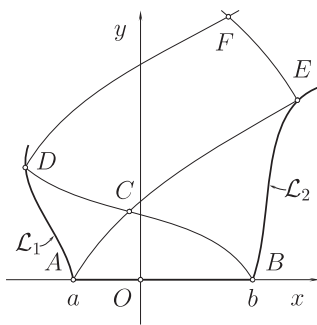


Рис. 2.14

Алгоритм решения смешанной задачи (2.38), (2.66)–(2.68) вытекает из анализа рис. 2.14. Задача решается в три этапа: первый — в границах характеристического треугольника  $ABC$  решается задача Коши (строится отрезки характеристик  $AC$  и  $BC$ ); второй — в границах характеристических треугольников  $ACD$  и  $CBE$  решается задача Гурса (строится недостающие отрезки характеристик  $CD$  и  $CE$ ); третий — в рамках характеристического четырехугольника  $CEFD$  решается задача Римана (строится отрезки характеристик  $DF$  и  $FE$ ).

Как видим, текущая задача потому и называется смешанной, поскольку алгоритм поиска ее решения предполагает “смешивание” алгоритмов решения трех ранее рассматриваемых задач Коши, Гурса и Римана.

В работе [157] также рассматривается смешанная задача, но в случае, когда отрезок  $AB$  равен нулю, т.е.  $a = b$ .

### 2.9. Характеристическое решение систем уравнений предельного равновесия

Рассмотрим систему уравнений предельного равновесия идеально-вязкой среды (2.35). Введем ряд обозначений

$$\mathbf{u} = (s, \varphi)^t, \quad (2.69)$$

где  $s = s(x, y)$  полусумма главных нормальных напряжений  $s = (\sigma_3 + \sigma_1)/2$  (2.29), а  $\varphi = \varphi(x, y)$  — угол между направлением максимального главного нормального напряжения  $\sigma_3$  и осью абсцисс (рис. 2.9). Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \left( \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^t, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \left( \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^t. \quad (2.70)$$

Далее определим матрицы

$$B = \left( \cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \quad \mp 2k \cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \right), \quad (2.71)$$

$$C = \left( \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \quad \mp 2k \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \right), \quad (2.72)$$

вектор-столбец правых частей (2.35)

$$\mathbf{d} = \left( \gamma \left[ \sin \alpha \cos \left( \varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) + \cos \alpha \sin \left( \varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) \right] \right) \quad (2.73)$$

и перепишем систему (2.35) в матричной форме:

$$\mathbf{B} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{d}. \quad (2.74)$$

В пространстве  $(x, y)$  области определения систем (2.35), (2.74) выберем односвязную область  $D$ , такую, что для всех  $(x, y) \in D$  справедливо:

$$\varphi \mp \frac{\pi}{4} \neq (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.75)$$

где  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел. Тогда можно утверждать, что  $\det(\mathbf{B})|_D \neq 0$  и, ограничившись  $(x, y) \in D$ , привести систему (2.74) к виду:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{b}, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}_{(x,y)}^2, \quad (2.76)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$  — матрица системы;  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$  — вектор-столбец ее свободных членов.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[ \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] & k \left[ \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ \frac{1}{4k} \left[ \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] & \frac{1}{2} \left[ \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma \left\{ \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{2} \left[ \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}, \\ b_2 &= \gamma \frac{\cos \alpha}{4k} \left[ \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Собственные значения  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$  и соответствующие левые собственные векторы  $\mathbf{l}^i$  матрицы  $\mathbf{A}$  (2.77) следующие:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \operatorname{tg} \left( \varphi \mp \frac{\pi}{4} \right), \\ \mathbf{l}^i &= \begin{pmatrix} \mp 1 & 2k \\ \sqrt{4k^2 + 1} & \sqrt{4k^2 + 1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

где  $i = 1$  — соответствует верхним знакам, а  $i = 2$  — нижним.

Прибегнув к анализу формы записи (2.76) системы (2.35), собственных значений  $\xi_i$  и собственных векторов  $\mathbf{l}^i$  (2.79) матрицы  $\mathbf{A}$ , заключаем, что система уравнений предельного равновесия идеально-вязной среды для плоской задачи (2.35) квазилинейна и гиперболична в узком смысле на всей евклидовой плоскости  $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$ , исключая геометрические места, где не выполняются условия требования (2.75), а значит квазилинейна и гиперболична в узком смысле и во всей односвязной области  $D$ .

- Характеристики. Соотношения на характеристиках.

Поскольку гиперболичность интересующих систем уравнений плоского предельного равновесия идеально-вязкой среды (2.35) уже установлена, то, значит, известно: а) представление этих системы по форме (2.76); б) собственные значения  $\xi_i$ , ( $i = 1, 2$ ) (2.79); в) левые собственные векторы (2.79). В таком случае уравнения характеристик можно записать сразу, воспользовавшись выражениями (2.42). Соответствующие характеристикам соотношения (2.49) можно получить путем подстановки уравнений характеристик в уравнения исходной системы (2.35).

Уравнения характеристик системы (2.35) следующие:

$$\cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) dy - \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) dx = 0. \quad (2.80)$$

На плоскости  $(x, y) \in D$  характеристики (2.80) образуют криволинейную ортогональную сетку. На них выполняются соотношения

$$ds \mp 2kd\varphi = \gamma [\sin \alpha dx + \cos \alpha dy], \quad (2.81)$$

которые могут быть интегрированы

$$s \mp 2k\varphi = \gamma [x \sin \alpha + y \cos \alpha] + f_i(\lambda_i), \quad \text{при } \lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2. \quad (2.82)$$

где  $i = 1$  — соответствует верхним знакам, а  $i = 2$  — нижним;  $f_i(\lambda_i)$  — постоянные интегрирования, представленные как функции от параметров характеристик  $\lambda$ ,  $i = 1, 2$ .  $f_i(\lambda_i)$ , могут быть уточнены по граничным данным. Когда  $f_i = \lambda_i$ , из (2.82) имеем

$$s = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} + \gamma (x \sin \alpha + y \cos \alpha), \quad \varphi = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4k}. \quad (2.83)$$

Уравнения характеристик (2.80) и соотношения на них (2.81), (2.82) являются собою искомым характеристическое решение системы уравнений плоского предельного равновесия идеально-вязкой среды (2.35). Известны другие методы поиска такого решения [153, 157, 158, 171].

- Характеристики как линии скольжения.

Метод линий скольжения зародился в теории пластичности [149] и уже потом был привнесен в теорию предельного равновесия [157, 180, 209–215].

Поскольку основные уравнения теорий пластичности и предельного равновесия идеально-вязкой среды совпадают, то значит, с учетом специфики терминологии, все известное из первой теории может быть почти полностью распространено и на вторую. Различия проявляются: во-первых, в формулировке краевых условий и трактовке результатов и, во-вторых, в некоторых традициях записи основных уравнений и систем. Дальнейшее изложение, строго говоря, относится к теории пластичности [149].

Первые исследования линий скольжения относятся к описанию фигур деформации пластичных материалов, которое было дано В.Людерсом [216],

Д.К.Черновым [217], Л.Гартманом [218]. Последующие теоретические исследования показали, что такие линии совпадают с характеристиками систем дифференциальных уравнений для плоской задачи. Если используется условие пластичности Треска–Сен-Венана, то линии скольжения совпадают с траекториями максимальных касательных напряжений. Г.Генки [219] и Л.Прандталь [220], опираясь на более ранние исследования Б.Сен-Венана [221] и М.Леви [222], сформулировали основные положения теории линий скольжения. Дальнейшее развитие теории линий скольжения получила в работах А.Надаи [223, 224], Х.Гейрингер [225], В.Прагера [226, 227] и С.Г.Михлина [228]. Общее решение задачи о пластическом распределении напряжений в плоском сечении было дано С.А.Христиановичем [153].

В 1940 г. была опубликована работа В.В.Соколовского о давлении пластической среды на плоский штамп [229]. В этой и других вскоре последовавших статьях В.В.Соколовский предложил методы построения полей напряжений для пластического напряженного состояния при различных граничных условиях. В 1946 году результаты этих исследований были обобщены и систематизированы в монографии [230].

В.В.Соколовский разработал метод решения задач пластического течения металлов с учетом статических и кинематических граничных условий [231, 232]. Б.А.Друянов предложил иной метод решения таких задач [233, 234]. Вопросы пластического течения рассматривали: А.А.Ильюшин [235–237], А.Ю.Ишлинский [238], Ю.Н.Работнов [239, 240]. Д.Д.Ивлевым [168] даны обобщения теории линий скольжения на пространственные задачи и более сложные условия пластичности.

Методу линий скольжения уделено значительное внимание в монографиях Л.М.Качанова [241] и в работе И.А.Кийко [242].

В работах А.Надаи [223, 224], Р.Хилла [161, 243, 244] В.Прагера [226, 227, 245], Х.Гейрингер [225], Дж.Александера [246, 247], В.Джонсона [248–250], А.Грина [251], Х.Кудо [249, 252, 253], П.Меллора [248], Х.Такахаша [252], Р.Шилда [254], Д.Бишопа [255] теория линий скольжения получила дальнейшее развитие. Значительным вкладом в развитие теории линий скольжения явились работы Р.Зауэра [256, 257] и Х.Нейбера [258], предложивших метод линеаризации основных уравнений.

Метод характеристик следует понимать как чисто математический метод, который является неотъемлемой частью теории дифференциальных уравнений в частных производных и их систем. Поэтому метод линий скольжения — это приложение метода характеристик в механике.

Быстрое развитие метода линий скольжения или метода характеристик объясняется тем, что он позволяет полностью определять поля напряжений в сечениях нагруженного материала и анализировать локальные явления, обычно важные для решения технологических задач [149].

Свойства линий скольжения подробно изложены в работах [149, 157, 158, 163, 167, 183, 183, 219, 259, 260]..

## ВЫВОДЫ

1. Рассматривая почву, как сплошную среду ее равновесное состояние можно описать, используя дифференциальные уравнения Навье (в объемном случае) или Сен-Венана (в двумерном случае), которые связывают компоненты тензора напряжений и параметры веса среды. Они образуют две системы, которые не являются определенными и при решении предполагают применение дополнительных уравнений. В качестве последних используем критерии пластичности и/или предельного равновесия, которые, собственно, и являются основой выбранной математической модели среды.

2. Наиболее известными условиями пластичности и предельного равновесия являются: а) критерий максимальных касательных напряжений Треска–Сен-Венана; б) условие постоянства удельной энергии формоизменения Хубера–Мизеса–Генки; в) критерий пластичности Мора; г) условие предельного равновесия Соколовского; д) обобщенное условие пластичности несжимаемых сплошных сред Гениева.

3. Из анализа обобщенного условия пластичности Гениева вытекает, что наиболее важными параметрами среды, которые проявляются как в статике так и в динамике, являются ее связность и внутреннее трение. Вязкостные свойства проявляются только в динамике.

4. Поскольку теории пластичности и предельного равновесия по своей сути совпадают и различаются только принятыми соглашениями в отношении ранжирования и знаков главных напряжений, то в дальнейшем, приняв единые соглашения, когда положительными считаются сжимающие главные нормальные напряжения, и большему из них присваивается больший индекс, в рамках одной теории корректно использовать критерии как пластичности, так и предельного равновесия.

5. С учетом изложенного выше, рационально рассматривать почву как идеально-вязкую (по Соколовскому) неупругую весомую сплошную среду, обладающую внешним трением. Ее состояние предельного равновесия описывается квазилинейной системой уравнений гиперболического типа. Для таких систем известны характеристические методы решения, предполагающие поиск уравнений характеристик и соотношений, которые выполняются вдоль них и связывают параметры напряженного состояния среды и независимые координаты.

6. В конечном итоге большинство рассматриваемых практических задач, используя характеристическое решение исходной системы уравнений, могут быть сведены, к известным краевым задачам Коши, Римана, Гурса или к смешанной задаче, являющейся собою комбинацией первых трех. В любом случае в рамках классических теорий пластичности и предельного равновесия сплошных сред для решения перечисленных задач в качестве граничных условий необходимо знать все компоненты тензора напряжений действующих вдоль граничной кривой. Поскольку в техническом смысле это почти нерешаемая практическая проблема, то в дальнейшем следует сосредоточиться на разработке частных методов решения интересующих задач, минимизирующих количество необходимых начальных данных.



ГЛАВА 3  
РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
ПОЧВЫ КАК СПЛОШНОЙ НЕУПРУГОЙ СРЕДЫ  
В СОСТОЯНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

3.1. Система уравнений плоского предельного равновесия  
идеально-связной среды. Замена переменных  
по характеристическому решению

Как показано выше, переход от исходной системы (2.38) к ее характеристическому виду (2.46), (2.49) предусматривает неявную замену переменных, при которой функциональные зависимости  $x = x(\boldsymbol{\lambda})$ ,  $y = y(\boldsymbol{\lambda})$  остаются неизвестными. Предложим явную замену переменных, когда связь между старыми координатами  $x$ ,  $y$  и новыми (параметрами характеристик)  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  изначально представлена аналитически [204].

Напомним, что переход от  $(x, y)$  к  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , в процессе которого система (2.41) преобразуется в систему (2.49), возможен в случае, если такая замена переменных является невырожденной, т.е. когда

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda_1, \lambda_2)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} x & \frac{\partial}{\partial \lambda_2} x \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} y & \frac{\partial}{\partial \lambda_2} y \end{pmatrix} \neq 0. \quad (3.1)$$

В известном случае частные производные  $\frac{\partial}{\partial \lambda_j} x$ , и  $\frac{\partial}{\partial \lambda_j} y$ ,  $j = 1, 2$ , равно как и якобиан (3.1), остаются неопределенными.

Заметим, что работа [204] — не первая попытка решения такой задачи [157, 158]. Первым обозначил эту задачу Христианович [153] в 1936 году.

- Переход на сетку характеристик. Явная замена переменных

Из газовой динамики известно преобразование координат (независимых переменных) по решению [183], когда новые координаты записывают в виде выражений для полных дифференциалов. Этот метод предусматривает введение четырех новых неизвестных функций  $\eta_i = \eta_i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}(\boldsymbol{\lambda}))$ ,  $\theta_i = \theta_i(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}(\boldsymbol{\lambda}))$ ,  $i = 1, 2$ , таких, что

$$\begin{cases} dy = \eta_1 d\lambda_1 + \theta_1 d\lambda_2, \\ dx = \eta_2 d\lambda_1 + \theta_2 d\lambda_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Законность замены (3.2) предполагает выполнение двух условий [183]:

$$\Delta = \eta_1 \theta_2 - \eta_2 \theta_1 \neq 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \lambda_1}, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Справедливость (3.3) вытекает из соображений существования решения системы (3.2) относительно дифференциалов  $d\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , а (3.4) — из равенства смешанных производных:

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} x = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} x, \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} y = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} y. \quad (3.5)$$

Поставленная выше цель достигается, если  $\eta_i, \theta_i, i = 1, 2$  — найдены и обеспечивается выполнение требования (3.1). Известный [183] алгоритм поиска функций  $\eta_i, \theta_i, i = 1, 2$  не всегда дает положительный результат (особенно в случае двух уравнений) и совсем не гарантирует переход к системе (2.49). В работе [183] преследовались иные цели, поэтому далее модифицируем известное преобразование координат по решению.

Поскольку вдоль характеристик  $\lambda_i = \text{const}$  дифференциал  $d\lambda_i = 0, i = 1, 2$ , то из замены переменных (3.2) имеем

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \xi_1, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \xi_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Собственные значения  $\xi_i, i = 1, 2$  определяют направления дифференцирования (2.42) и, следовательно, могут быть записаны как тангенс некоторого угла. Имея ввиду это обстоятельство, используя замену

$$\sin \alpha_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{1 + \xi_i^2}}, \quad \cos \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_i^2}}, \quad i = 1, 2, \quad (3.7)$$

представим их в виде отношений:

$$\xi_i = \frac{\sin \alpha_i}{\cos \alpha_i}, \quad i = 1, 2. \quad (3.8)$$

С учетом (3.6) и (3.8) можно утверждать, что функции  $\eta_i$  и  $\theta_i, i = 1, 2$  имеют общие, отличные от единицы множители. Условимся называть их масштабирующими и обозначим соответственно:

$$v = v(x, y, \mathbf{u}(x, y)) = v(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}), \quad \text{и} \quad \omega = \omega(x, y, \mathbf{u}(x, y)) = \omega(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}). \quad (3.9)$$

Тогда, учитывая (3.6)–(3.9), из (3.2) получим

$$\begin{cases} dy = v \sin \alpha_2 d\lambda_1 + \omega \sin \alpha_1 d\lambda_2, \\ dx = v \cos \alpha_2 d\lambda_1 + \omega \cos \alpha_1 d\lambda_2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Запишем для (3.10) аналогичные (3.3), (3.4) уравнения ограничений

$$\Delta = v \omega \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0, \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (v \sin \alpha_2) - \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\omega \sin \alpha_1) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (v \cos \alpha_2) - \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\omega \cos \alpha_1) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

При условии, когда выполняются требования гиперболичности в узком смысле<sup>1</sup>, т.е. когда  $\xi_1 \neq \xi_2$ , выражение (3.11) трансформируется к виду

$$v\omega \neq 0. \quad (3.13)$$

<sup>1</sup>Для рассматриваемого класса систем уравнений, нашедших применение в теориях пластичности [158, 186] и предельного равновесия [157], условия гиперболичности в узком смысле — соблюдаются.

Система (3.12) путем формальных преобразований и замены  $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$  приводится к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} \sin \delta = v \cos \delta \frac{\partial \alpha_2}{\partial \lambda_2} - \omega \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_1}, \\ \frac{\omega}{\partial \lambda_1} \sin \delta = v \frac{\partial \alpha_2}{\partial \lambda_2} - \omega \cos \delta \frac{\partial \alpha_1}{\partial \lambda_1}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Далее систему уравнений (3.14) условимся называть системой-следствием замены независимых переменных по характеристическому решению исходной гиперболической системы (2.38).

Если  $\sin \delta$ ,  $\cos \delta$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \alpha_1$  и  $\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \alpha_2$  рассматривать как некоторые известные функции  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , то в общем случае систему (3.14) следует классифицировать как линейную гиперболическую. После приведения ее уравнений к каноническому виду [190] их можно интегрировать, например, с применением метода разделения переменных (метода Фурье) [185, 195].

В работе [204] приводится доказательство теоремы: “Применительно к системе двух квазилинейных гиперболических в узком смысле дифференциальных уравнений первого порядка (2.38), любое ненулевое решение  $v = v(\boldsymbol{\lambda})$  и  $\omega = \omega(\boldsymbol{\lambda})$  системы равенств смешанных производных (3.12) удовлетворяет требованию (3.1) невырожденности преобразований независимых координат  $x = x(\boldsymbol{\lambda})$ ,  $y = y(\boldsymbol{\lambda})$ , выполняемых с использованием предлагаемой явной замены (3.10) в процессе перехода на сетку характеристик  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , т.е. к системе соотношений на характеристиках (2.49)”.

Таким образом, применительно к системе (2.38), можно осуществить переход на сетку характеристик  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  (к системе (2.49)), не заботясь о поиске масштабирующих функций  $v$  и  $\omega$ .

### 3.2. Соотношения на декартовых координатах для системы уравнений плоского предельного равновесия идеально-вязкой среды

Вывод соотношений на декартовых координатах для системы уравнений плоского предельного равновесия идеально-вязкой среды подробно рассматривается в работах [204, 261, 262].

3.2.1. Постановка задачи. Обратимся к системе уравнений (2.35) плоского предельного равновесия весомой идеально-вязкой среды.

В п.г. 2.9 показано, как, применив обозначения

$$\mathbf{u} = (s, \varphi)^t, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \left( \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^t, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \left( \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^t, \quad (3.15)$$

а также (2.77) и (2.78), она приводится к нормальной форме (2.76)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{b}, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}_{(x,y)}^2. \quad (3.16)$$

Собственные значения  $\xi_i$  (2.79) матрицы  $A$  (2.77), учитывая обозначения (3.15), следующие:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\} = \operatorname{tg} \left( \varphi \mp \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.17)$$

В п.г. 2.9 приводится характеристическое решение системы (2.35) или, что то же, — (3.16).

Перепишем уравнения характеристик (2.80) системы (2.35), (3.16) с учетом обозначений (3.15):

$$\cos \left( \varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) dy - \sin \left( \varphi \mp \frac{\pi}{4} \right) dx = 0. \quad (3.18)$$

Соотношения на характеристиках (2.81) получим непосредственно из исходной системы (2.35), учитывая обозначения (3.15), воспользовавшись приведенным в п.г. 3.1 методом замены переменных по характеристическому решению, т.е. применяя замену (3.10):

$$\begin{cases} dy = v \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) d\lambda_1 + \omega \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) d\lambda_2, \\ dx = v \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) d\lambda_1 + \omega \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) d\lambda_2, \end{cases} \quad (3.19)$$

где  $v = v(x, y, \mathbf{u}(x, y))$  и  $\omega = \omega(x, y, \mathbf{u}(x, y))$  — предложенные ранее, масштабирующие функции-множители (3.9).

Частные производные старых координат  $x, y$ , по новым  $\lambda_i, i = 1, 2$  получаем из выражений полных дифференциалов (3.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} &= v \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right), & \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} &= \omega \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} &= v \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right), & \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} &= \omega \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Домножая уравнение (2.35) с верхними и нижними знаками соответственно на  $\omega$  и  $v$ , учитывая (3.15) и (3.20), получаем форму (2.49) соотношений на характеристиках  $\lambda_i, i = 1, 2$ . После интегрирования они дают:

$$s \mp 2k\varphi = \gamma [x \sin \alpha + y \cos \alpha] + \lambda_i, \quad \text{при } i = 1, 2. \quad (3.21)$$

Из (3.21) имеем:

$$s = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \gamma [x \sin \alpha + y \cos \alpha], \quad \varphi = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4k}. \quad (3.22)$$

Частные производные (3.20) с учетом условия (3.13) удовлетворяют требованию (3.1), а, значит, проведенные выше преобразования независимых переменных являются невырожденными. Таким образом, получено характеристическое решение системы уравнений (2.35) плоского предельного равновесия весомой идеально-связной среды. Его недостаток состоит в том,

что соотношения (3.21) выполняются на характеристиках (3.18), положение и форма которых неизвестна. Поставим задачу получить соотношения, подобные (3.21), но выполняющиеся вдоль ортогональных прямых, параллельных осям системы координат. В дальнейшем такие соотношения будем называть соотношениями на декартовых координатах.

**3.2.2. Масштабирующие функции-множители.** Описанный переход на сетку характеристик  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  с применением явной замены переменных (3.10) или (3.19), предполагает существование решения системы равенств смешанных производных (3.12) или полученной от нее системы (3.14), но не требует нахождения этого решения. В таком случае производные (3.20), равно как и уравнения (3.10) или (3.19) связи старых и новых координат  $x = x(\boldsymbol{\lambda})$ ,  $y = y(\boldsymbol{\lambda})$ , где  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ , остаются неизвестными.

• Система-следствие замены независимых переменных по характеристическому решению. Постановка задачи для поиска аналитического представления масштабирующих функций-множителей

В рассматриваемом случае условия ортогональности сетки характеристик (3.18) соблюдаются  $\operatorname{tg}(\varphi - \pi/4) = -\operatorname{ctg}(\varphi + \pi/4)$ , следовательно  $\alpha_1 = \varphi - \pi/4$ ,  $\alpha_2 = \varphi + \pi/4$ ,  $\delta = \pi/2$ ,  $\sin \delta = 1$ , а  $\cos \delta = 0$ . Частные производные  $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \alpha_j$  ( $i, j = 1, 2$ ;  $i \neq j$ ) находим с учетом (3.22) дифференцированием:

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i} = \mp \frac{1}{4k} = \operatorname{const}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (3.23)$$

Система (3.14) в этом случае дает:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} = -\frac{\omega}{4k}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} = -\frac{v}{4k}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Сформулируем задачу Коши. Положим, в некоторой окрестности дуги  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\tau)$  кривой  $\mathcal{L}$ , т.е.

$$\lambda_1 = \lambda_1^o(\tau), \quad \lambda_2 = \lambda_2^o(\tau), \quad \tau_a \leq \tau \leq \tau_b \quad (3.25)$$

требуется найти решение  $v(\boldsymbol{\lambda})$ ,  $\omega(\boldsymbol{\lambda})$  системы (3.24), принимающие на  $\mathcal{L}$  заданные значения:

$$v(\boldsymbol{\lambda}(\tau))|_{\mathcal{L}} = v^o(\tau), \quad (3.26)$$

$$\omega(\boldsymbol{\lambda}(\tau))|_{\mathcal{L}} = \omega^o(\tau), \quad (3.27)$$

В отношении граничной кривой  $\mathcal{L}$  полагаем, что  $\mathcal{L}$  пересекает любую из координатных прямых  $\lambda_j = \operatorname{const}$ ,  $j = 1, 2$  только один раз. Последнее ограничение обеспечивает однозначность: любому значению одной из независимых переменных  $\lambda_i$  в пределах всего отрезка граничной кривой  $\mathcal{L}$  соответствует только одно значение другой переменной  $\lambda_j$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ .

Гладкость искомого решения не оговариваем. Понятно, при этом предполагается, что граничные функции (3.26) и (3.27), по меньшей мере, вдоль кривой  $\mathcal{L}$  удовлетворяют системе (3.24):

$$\begin{cases} v^{o'} = -\frac{\omega^o}{4k} \lambda_2^{o'}, \\ \omega^{o'} = -\frac{v^o}{4k} \lambda_1^{o'}, \end{cases} \quad (3.28)$$

где

$$v^{o'} = \frac{dv^o}{d\tau}, \quad \omega^{o'} = \frac{d\omega^o}{d\tau}, \quad \lambda_1^{o'} = \frac{d\lambda_1^o}{d\tau}, \quad \lambda_2^{o'} = \frac{d\lambda_2^o}{d\tau}. \quad (3.29)$$

• Интегралы системы-следствия замены независимых переменных по характеристическому решению.

После дифференцирования уравнений (3.24) (первого по  $\lambda_1$ , второго по  $\lambda_2$ ) и последующей подстановки в правые части первых производных  $\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda_2} v$  из них же, получаем два независимых однородных линейных уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами гиперболического типа, записанные в канонической форме [190]:

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} = \frac{v}{8k^2}, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = \frac{\omega}{8k^2}. \quad (3.31)$$

Таким образом, поставленная задача Коши (3.24)–(3.27) распадается на две аналогичные подзадачи (3.30), (3.26) и (3.31), (3.27).

Уравнения (3.30), (3.31) удовлетворяют обобщенному принципу суперпозиции [190], а значит искомое решение каждой подзадачи (3.30), (3.26) и (3.31), (3.27) можно получить путем поиска множества частных решений с их последующим, возможно, выборочным суммированием.

Решением общей задачи (3.24)–(3.27) является пересечение решений подзадач (3.30), (3.26) и (3.31), (3.27), т.к. уравнения (3.30) и (3.31) не в полном смысле независимы и должны удовлетворять исходной системе (3.24).

Первая подзадача (3.30), (3.26).

Для ее решения воспользуемся методом разделения переменных (методом Фурье) [185, 190, 195, 263] и найдем нетривиальные решения уравнения (3.30) в виде произведения двух функций:

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = \Lambda_1(\lambda_1)\Lambda_2(\lambda_2), \quad (3.32)$$

где  $\Lambda_1$  зависит только от  $\lambda_1$ , а  $\Lambda_2$  — только от  $\lambda_2$ . Подставив (3.32) в уравнение (3.30), получим  $4k\Lambda_1'\Lambda_2' = \Lambda_1\Lambda_2/4k$ , или после деления на  $\Lambda_1\Lambda_2'$

$$\frac{4k\Lambda_1'(\lambda_1)}{\Lambda_1(\lambda_1)} = \frac{\Lambda_2(\lambda_2)}{4k\Lambda_2'(\lambda_2)}. \quad (3.33)$$

Левая часть равенства (3.33) не зависит от  $\lambda_2$ , а правая не зависит от  $\lambda_1$ , что возможно в случае, когда  $4k\Lambda'_1/\Lambda_1 = \Lambda_2/4k\Lambda'_2 = \text{const}$ . Обозначим эту постоянную через  $\mu^v$ , т.е.

$$\frac{4k\Lambda'_1(\lambda_1)}{\Lambda_1(\lambda_1)} = \frac{\Lambda_2(\lambda_2)}{4k\Lambda'_2(\lambda_2)} = \mu^v. \quad (3.34)$$

Из последнего соотношения получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\Lambda'_1(\lambda_1) - \Lambda_1(\lambda_1)\frac{\mu^v}{4k} = 0, \quad (3.35)$$

$$\Lambda'_2(\lambda_2) - \Lambda_2(\lambda_2)\frac{1}{4k\mu^v} = 0, \quad (3.36)$$

из которых далее определим функции  $\Lambda_i(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Так образом, пришли к задаче о собственных значениях [195, 264–267]: требуется изучить, какими должны быть  $\mu^v$ , именуемые собственными значениями, чтобы интегралы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  уравнений (3.35) и (3.36) дали нетривиальные решения рассматриваемой подзадачи (3.30), (3.26).

Тут возможно два варианта. Во-первых,  $\mu^v$  могут представлять собой ряд дискретных собственных значений, а, во-вторых, непрерывный спектр. Кроме того, в общем случае  $\mu^v$  — комплексная величина, в то время как возможны частные варианты, когда  $\mu^v$  являются действительными или чисто мнимыми. Причем не исключено, что мнимые или комплексные собственные значения  $\mu^v$  приведут к действительным решениям рассматриваемой подзадачи (3.30), (3.26).

Начнем с комплексных дискретных значений  $\mu^v$ .  $k > 0$  — по условию. Случай  $\mu^v = 0$  из рассмотрения исключаем, поскольку из (3.34) вытекает, что  $\Lambda'_1(\lambda_1) = 0$ ,  $\Lambda_1(\lambda_1) = \text{const}$  и  $\Lambda_2(\lambda_2) = 0$ , а (3.30), с учетом (3.32), дает тривиальное решение  $v(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ .

Приняв теперь  $\mu^v \neq 0$  уравнения (3.35), (3.36) можно интегрировать. Искомые  $\Lambda_1(\lambda_1)$  и  $\Lambda_2(\lambda_2)$  имеют комплексные коэффициенты, но, тем не менее, являются функциями действительного переменного, а значит при их интегрировании и дифференцировании требования условия Коши-Римана [268] к ним предъявлять не следует [269]. С учетом сказанного выше, интегрирование уравнений (3.35), (3.36) дает:

$$\ln(\Lambda_1) = \frac{\mu^v}{4k}\lambda_1 + \ln(C_1), \quad \ln(\Lambda_2) = \frac{1}{4k\mu^v}\lambda_2 + \ln(C_2), \quad (3.37)$$

где  $\ln(C_1)$  и  $\ln(C_2)$  — записанные в виде логарифмов постоянные интегрирования. Сами  $C_1$ ,  $C_2$  и производные от них постоянные величины в дальнейшем условимся также называть постоянными интегрирования.  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 \neq 0$ . Заметим, что в выражениях (3.37) под знаками натурального логарифма не применяем операции взятия модуля ибо рассматриваем общий случай комплексных решений уравнений (3.35) и (3.36). Несмотря на то, что

функция-множитель  $v(\lambda_1, \lambda_2)$  предполагается действительной, комплексные  $\Lambda_i$ , ( $i = 1, 2$ ) — не исключаются. Ведь если комплексные  $\Lambda_i$ , ( $i = 1, 2$ ), например, являются сопряженными, то их произведение всегда будет действительным [269].

Потенцируя уравнения (3.37), получаем:

$$\Lambda_1 = C_1 \exp\left(\frac{\mu^v}{4k} \lambda_1\right), \quad \Lambda_2 = C_2 \exp\left(\frac{1}{4k\mu^v} \lambda_2\right). \quad (3.38)$$

Подставив выражения функций  $\Lambda_i$ , ( $i = 1, 2$ ) (3.38) в (3.32) и применив замену  $C^v = C_1 C_2$ , окончательно имеем:

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = C^v \exp\left(\frac{\mu^v}{4k} \lambda_1 + \frac{1}{4k\mu^v} \lambda_2\right), \quad C^v \neq 0, \quad \mu^v \neq 0 \quad (3.39)$$

или, с учетом принципа суперпозиции,

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^{N^v} C_n^v \exp(\eta_n^v), \quad \eta_n^v = \frac{1}{4k} \left( \mu_n^v \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\mu_n^v} \right), \quad (3.40)$$

$$N^v \in \{1, 2, \dots, \infty\}, \quad C_n^v \neq 0, \quad \mu_n^v \neq 0,$$

где  $C_n^v$  и  $\mu_n^v$  — частные аналоги  $C^v$  и  $\mu^v$ . Граничные данные (3.26) пока не рассматриваем и на определении постоянных  $C_n^v$  и  $\mu_n^v$  не останавливаемся.

Вторая подзадача (3.31), (3.27).

Поступая аналогично процедуре поиска общего решения первой подзадачи (3.30), (3.26), методом разделения переменных получаем:

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^{N^\omega} C_n^\omega \exp(\eta_n^\omega), \quad \eta_n^\omega = \frac{1}{4k} \left( \mu_n^\omega \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\mu_n^\omega} \right), \quad (3.41)$$

$$N^\omega \in \{1, 2, \dots, \infty\}, \quad C_n^\omega \neq 0, \quad \mu_n^\omega \neq 0.$$

Общая задача (3.24)–(3.27).

В отношении выражений  $v(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  из (3.40), (3.41) можно заключить, что они не являются в полном смысле независимыми. Во-первых, они оба должны удовлетворять системе (3.24), а, во-вторых, — краевым условиям (3.25)–(3.27). В общем случае применительно к одной и той же системе (3.24), краевые условия (3.25)–(3.27) могут быть различными, а поэтому интересно изучить, какие ограничения на выражения (3.40), (3.41) накладывает сама система (3.24) вне зависимости от краевых условий (3.25)–(3.27). По сути следует ответить на вопрос, должны-ли каким-то образом согласовываться между собой собственные значения  $\mu_n^v$ ,  $\mu_n^\omega$  и постоянные интегрирования  $C_n^v$ ,  $C_n^\omega$ . И те, и другие могут быть комплексными.

В работах [167, 261] доказано утверждение о том, что при любых краевых условиях (3.25)–(3.27), система линейных гиперболических в узком смысле двух дифференциальных уравнений первого порядка (3.24), тождественно



удовлетворяется выражениями (3.40) и (3.41), полученными методом разделения переменных (методом Фурье) для случая дискретных комплексных собственных значений  $\mu_n^v \in \{\mu_1^v, \mu_2^v, \dots, \mu_{N^v}^v\}$ ,  $\mu_n^\omega \in \{\mu_1^\omega, \mu_2^\omega, \dots, \mu_{N^\omega}^\omega\}$ , где  $N^v, N^\omega \in \{1, 2, \dots, \infty\}$  и соответствующих им также комплексных постоянных интегрирования  $C_n^v \in \{C_1^v, C_2^v, \dots, C_{N^v}^v\}$ ,  $C_n^\omega \in \{C_1^\omega, C_2^\omega, \dots, C_{N^\omega}^\omega\}$ , тогда и только тогда, когда  $N^v = N^\omega = N \in \{1, 2, \dots, \infty\}$  и для всех  $n = 1, 2, \dots, N$  выполняется следующее:

- а) все собственные значения попарно совпадают, т.е.  $\mu_n^v = \mu_n^\omega = \mu_n$ ;
- б) постоянные интегрирования  $C_n^v, C_n^\omega$  и собственные значения  $\mu_n$  удовлетворяют условию  $\mu_n = -C_n^v/C_n^\omega$ .

Применив это утверждение, на основании выражений (3.40) и (3.41), отложив пока рассмотрение граничных условий (3.25)–(3.27), запишем общее решение (интегралы) системы (3.24) для случая дискретного спектра комплексных собственных значений  $\mu_n = \mu_n^v = \mu_n^\omega$  и соответствующих им также комплексных постоянных интегрирования  $C_n^v$  и  $C_n^\omega$ :

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^N C_n^v \exp(\eta_n), \quad \omega(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^N C_n^\omega \exp(\eta_n),$$

$$\eta_n = \frac{-1}{4k} \left( \frac{C_n^v}{C_n^\omega} \lambda_1 + \frac{C_n^\omega}{C_n^v} \lambda_2 \right), \quad (3.42)$$

$$N \in \{1, 2, \dots, \infty\}, \quad C_n^v \neq 0, \quad C_n^\omega \neq 0.$$

Возвращаясь опять к граничным условиям (3.25)–(3.27) общей задачи (3.24)–(3.27), заметим, что они действительные. Значит в дальнейшем необходимо проанализировать: возможно ли, чтобы общее решение (3.42) перешло в действительную форму и какие дополнительные условия или ограничения для этого необходимы.

- Анализ интегралов системы-следствия замены независимых переменных по характеристическому решению с позиций возможности их преобразования в чисто действительную форму [167].

Для такого анализа форма представления решения (3.42) не совсем удобна. Преобразуем его. Для этого обозначим действительную  $R(z)$  и мнимую  $iI(z)$  части (с учетом знака) [269] произвольного числа  $z$ . Т.е., для всякого комплексного  $z$  справедлива запись  $z = R(z) + iI(z)$ , а для сопряженного  $\bar{z} = R(z) - iI(z)$ . Сами же  $R(z)$  и  $I(z)$  — действительные величины. Перепишем (3.39), явно обозначив действительные и чисто мнимые части собственных значений  $\mu^v$ . Затем в полученном выражении числитель и знаменатель при  $\lambda_2$  домножаем на комплексно сопряженное число  $\bar{\mu}^v = R(\mu^v) - iI(\mu^v)$ . После ряда формальных преобразований имеем:

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = C^v \exp \left[ \frac{R(\mu^v)}{4k} \left( \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{|\mu^v|^2} \right) \right] \exp \left[ \frac{iI(\mu^v)}{4k} \left( \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{|\mu^v|^2} \right) \right], \quad (3.43)$$

$$C^v \neq 0, \quad \mu^v \neq 0.$$

Также перепишем частное комплексное решение рассмотренной выше вто-

рой подзадачи (3.31), (3.27):

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) = C^\omega \exp \left[ \frac{R(\mu^\omega)}{4k} \left( \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{|\mu^\omega|^2} \right) \right] \exp \left[ \frac{iI(\mu^\omega)}{4k} \left( \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{|\mu^\omega|^2} \right) \right], \quad (3.44)$$

$$C^\omega \neq 0, \quad \mu^\omega \neq 0.$$

Дальше, по типу выражений (3.43) и (3.44), перепишем общее решение (3.42) системы (3.24):

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^N C_n^v \exp(\eta_n) \exp(i\theta_n),$$

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^N C_n^\omega \exp(\eta_n) \exp(i\theta_n), \quad (3.45)$$

$$\eta_n = \frac{R(\mu_n)}{4k} \left( \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{|\mu_n|^2} \right), \quad \theta_n = \frac{I(\mu_n)}{4k} \left( \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{|\mu_n|^2} \right),$$

$$N \in \{1, 2, \dots, \infty\}, \quad C_n^v \neq 0, \quad C_n^\omega \neq 0, \quad \mu_n \neq 0.$$

*Первый частный случай.* Собственные значения  $\mu_n$  — суть действительные числа. В этом случае, по утверждению (п. 3.2.2), постоянные интегрирования  $C_n^v$  и  $C_n^\omega$  являются или также действительными, или чисто мнимыми. Вне зависимости от последнего обстоятельства  $iI(\mu_n) = 0$ ,  $\theta_n = 0$ ,  $\mu_n = R(\mu_n)$ , и (3.45) преобразуется к виду:

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^N C_n^v \exp(\eta_n), \quad \omega(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^N C_n^\omega \exp(\eta_n),$$

$$\eta_n = \frac{1}{4k} \left( \mu_n \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\mu_n} \right) = \frac{-1}{4k} \left( \frac{C_n^v}{C_n^\omega} \lambda_1 + \frac{C_n^\omega}{C_n^v} \lambda_2 \right), \quad (3.46)$$

$$N \in \{1, 2, \dots, \infty\}, \quad C_n^v \neq 0, \quad C_n^\omega \neq 0, \quad \mu_n \neq 0.$$

Выражения (3.46) можно несколько упростить, если отношение постоянных интегрирования  $C_n^v/C_n^\omega$  представить в виде тангенса  $C_n^v/C_n^\omega = \operatorname{tg} \chi_n$  от некоторого вещественного параметра  $\chi_n$ , где  $C_n^v = F_n \sin \chi_n$ ,  $C_n^\omega = F_n \cos \chi_n$ ,  $(\chi_n \mp \frac{1}{2}\pi l_n) \in ]-\frac{1}{2}\pi, 0[ \cup ]0, \frac{1}{2}\pi[$ ,  $l_n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ . Множитель  $F_n$  также вещественный и сам может быть представлен в виде произвольной функции от  $\chi_n$ , но условимся  $F_n$  считать константой. Смещение интервала возможных значений  $\chi_n$  посредством применения углового множителя  $l_n$  обуславливается совокупностью возможных вариаций знаков исходных величин  $C_n^v$  и  $C_n^\omega$ . В конечном итоге имеем:

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^N F_n \sin \chi_n \exp \left( \frac{\lambda_1 \operatorname{tg} \chi_n + \lambda_2 \operatorname{ctg} \chi_n}{-4k} \right),$$

$$\omega(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{n=1}^N F_n \cos \chi_n \exp \left( \frac{\lambda_1 \operatorname{tg} \chi_n + \lambda_2 \operatorname{ctg} \chi_n}{-4k} \right), \quad (3.47)$$

$$N \in \{1, 2, \dots, \infty\}, \quad (\chi_n \mp \frac{1}{2}\pi l_n) \in ]-\frac{1}{2}\pi, 0[ \cup ]0, \frac{1}{2}\pi[ ,$$

$$F_n \neq 0, \quad l_n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}.$$

Таким образом, в текущем случае (выражения (3.46) и (3.47)) функции-множители  $v(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  от действительных аргументов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  также являются действительными.

*Второй частный случай.* Собственные значения  $\mu_n$  — чисто мнимые. Применив утверждение (п. 3.2.2), заключаем, что возможны два варианта: а)  $C_n^v$  — действительное,  $C_n^\omega$  — чисто мнимое; б)  $C_n^v$  — чисто мнимое,  $C_n^\omega$  — действительное. Оба эти варианта дают  $R(\mu_n) = 0$ ,  $\eta_n = 0$ ,  $\mu_n = iI(\mu_n)$ , и (3.45) с применением тождества Эйлера [269] преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} v(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{n=1}^N C_n^v (\cos \theta_n + i \sin \theta_n), \\ \omega(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{n=1}^N C_n^\omega (\cos \theta_n + i \sin \theta_n), \\ \theta_n &= \frac{1}{4k} \left( I(\mu_n) \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{I(\mu_n)} \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$N \in \{1, 2, \dots, \infty\}, \quad C_n^v \neq 0, \quad C_n^\omega \neq 0, \quad \mu_n \neq 0.$$

Полученный вариант решения (3.48) системы (3.24) в явном виде содержит чисто мнимые компоненты, а, значит, функции-множители  $v(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  в рассматриваемом случае считать действительными не представляется возможным. Но, тем не менее, возможны такие комбинации собственных значений  $\mu_n \in \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$  и постоянных интегрирования  $C_n^v \in \{C_1^v, C_2^v, \dots, C_N^v\}$ ,  $C_n^\omega \in \{C_1^\omega, C_2^\omega, \dots, C_N^\omega\}$ , при которых в выражениях  $v(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  (3.48) после суммирования мнимые части полностью пропадают и остаются только действительные.

В работе [167] доказано, что решение (3.48) системы линейных гиперболических в узком смысле двух дифференциальных уравнений первого порядка (3.24) преобразуется в действительную форму:

$$\begin{aligned} v(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{m=1}^{M_1} S_m^{v1} \sin \theta_m^1 + \sum_{m=1}^{M_2} S_m^{v2} \cos \theta_m^2, \\ \omega(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{m=1}^{M_1} S_m^{\omega1} \cos \theta_m^1 - \sum_{m=1}^{M_2} S_m^{\omega2} \sin \theta_m^2, \\ \theta_m^j &= \frac{1}{4k} \left( \frac{S_m^{vj}}{S_m^{\omega j}} \lambda_1 - \frac{S_m^{\omega j}}{S_m^{vj}} \lambda_2 \right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$M_j \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}, \quad S_m^{vj} \neq 0, \quad S_m^{\omega j} \neq 0, \quad j \in \{1, 2\},$$

где  $S_m^{vj}$  и  $S_m^{\omega j}$ ,  $j \in \{1, 2\}$  понимаем как произвольные постоянные, значения которых задаются краевыми условиями задачи (3.25)–(3.27).

Далее путем ряда замен и формальных преобразований приведем аналитическое представление решения (3.49) в подобную выражениям (3.47)

форму:

$$\begin{aligned}
v(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{m=1}^{M_1} K_m^1 \sin \xi_m^1 \sin \theta_m^1 + \sum_{m=1}^{M_2} K_m^2 \sin \xi_m^2 \cos \theta_m^2, \\
\omega(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{m=1}^{M_1} K_m^1 \cos \xi_m^1 \cos \theta_m^1 - \sum_{m=1}^{M_2} K_m^2 \cos \xi_m^2 \sin \theta_m^2, \\
M_j &\in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}, \quad \theta_m^j = \frac{1}{4k} (\lambda_1 \operatorname{tg} \xi_m^j - \lambda_2 \operatorname{ctg} \xi_m^j), \\
(\xi_m^j \mp \frac{1}{2}\pi l_m^j) &\in ] -\frac{1}{2}\pi, 0 [ \cup ] 0, \frac{1}{2}\pi [ , \quad l_m^j \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}, \\
K_m^j &\neq 0, \quad j \in \{1, 2\},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

где для всех  $m = 1, 2, \dots, M_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$  параметры  $\xi_m^j$ , коэффициенты  $K_m^j$  и угловые множители  $l_m^j$  определяются краевыми условиями (3.25)–(3.27) рассматриваемой задачи.

В частном случае может оказаться удобным представить коэффициенты  $K_m^j$  в виде функций  $K_m^j = K_m^j(t_m^j)$  от произвольного параметра  $t_m^j$ , которые также определяются, исходя из краевых условий. Для различных  $j$ ,  $m$  параметры  $t_m^j$  могут совпадать, а, значит, соответствующие индексы возле  $t_m^j$  могут быть упущены. В некоторых случаях (покажем ниже) использование такой возможности является продуктивным.

При определении величины  $\theta_m^j$  из (3.49) или (3.50) можно ввести смещение  $\varphi_m^j$ , представив:

$$\begin{aligned}
\theta_m^j &= \frac{1}{4k} \left( \frac{S_m^{vj}}{S_m^{\omega j}} \lambda_1 - \frac{S_m^{\omega j}}{S_m^{vj}} \lambda_2 \right) + \varphi_m^j = \\
&= \frac{1}{4k} (\lambda_1 \operatorname{tg} \xi_m^j - \lambda_2 \operatorname{ctg} \xi_m^j) + \varphi_m^j, \quad j \in \{1, 2\}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

В правомерности такого действия всегда можно убедиться, подставив (3.51) в выражения для  $v(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  (3.49) или (3.50). Далее в полученных выражениях следует разложить члены этих рядов по формулам для синуса и косинуса суммы, затем перегруппировать члены и переопределить значения постоянных, а также углов  $\theta_m^j$ . В результате придем к старому представлению выражений для  $v(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  (3.49), не содержащих смещений  $\varphi_m^j$ , но с удвоенным количеством слагаемых.

Можно убедиться также, что  $v(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  из (3.49) удовлетворяют системе (3.24) в том числе и в случае, когда  $\theta_m^j$  определяются с учетом смещений  $\varphi_m^j$  по (3.51).

В выражения  $\theta_m^j$  (3.51) смещения  $\varphi_m^j$  введены из соображений удобства анализа простейших решений, например, применительно к системе (2.35), когда требуется положить  $\varphi_m^j = \pm\pi/4$ ,  $j = 1, 2$ .

*Третий частный случай:* функции-множители  $v(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $\omega(\lambda_1, \lambda_2)$  являются действительными, собственные значения  $\mu_n$  — комплексные. Для такого случая в работе [167] была получена следующая форма решения

(3.48) системы уравнений (3.24):

$$\begin{aligned}
v(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{n=1}^N \exp(\eta_n) \left[ Q_n^v \cos \theta_n - G_n^v \sin \theta_n \right], \\
\omega(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{n=1}^N \exp(\eta_n) \left[ Q_n^\omega \cos \theta_n - G_n^\omega \sin \theta_n \right], \\
\eta_n &= \frac{Q_n^v Q_n^\omega + G_n^v G_n^\omega}{-4k} \left[ \frac{\lambda_1}{(Q_n^\omega)^2 + (G_n^\omega)^2} + \frac{\lambda_2}{(Q_n^v)^2 + (G_n^v)^2} \right], \\
\theta_n &= \frac{Q_n^v G_n^\omega - G_n^v Q_n^\omega}{4k} \left[ \frac{\lambda_1}{(Q_n^\omega)^2 + (G_n^\omega)^2} - \frac{\lambda_2}{(Q_n^v)^2 + (G_n^v)^2} \right], \\
N &\in \{1, 2, \dots, \infty\}, \quad Q_n^v \neq 0, \quad G_n^v \neq 0, \quad Q_n^\omega \neq 0, \quad G_n^\omega \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Выполнив формальные преобразования текущего представления (3.52) решения (3.48) переходим к его следующей форме:

$$\begin{aligned}
v(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{n=1}^N \exp(\eta_n) R_n \sin \psi_n \cos(\zeta_n^v + \theta_n), \\
\omega(\lambda_1, \lambda_2) &= \sum_{n=1}^N \exp(\eta_n) R_n \cos \psi_n \cos(\zeta_n^\omega + \theta_n), \\
\eta_n &= \frac{\cos(\zeta_n^v - \zeta_n^\omega)}{-4k} (\lambda_1 \operatorname{tg} \psi_n + \lambda_2 \operatorname{ctg} \psi_n), \\
\theta_n &= \frac{\sin(\zeta_n^v - \zeta_n^\omega)}{-4k} (\lambda_1 \operatorname{tg} \psi_n - \lambda_2 \operatorname{ctg} \psi_n), \\
(\psi_n \mp \frac{1}{2}\pi l_n) &\in ] -\frac{1}{2}\pi, 0 [ \cup ] 0, \frac{1}{2}\pi [ , \quad l_n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}, \\
N &\in \{1, 2, \dots, \infty\}, \quad P_n \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Последние выражения (3.53) также предполагают уточнение параметров  $\psi_n$ ,  $\zeta_n^v$ ,  $\zeta_n^\omega$ , значений постоянных  $P_n$  и угловых коэффициентов  $l_n$  в соответствии с краевыми условиями (3.25)–(3.27).

Можно показать, что последний случай с комплексными собственными значениями  $\mu$ , не единственный. Возможны иные комбинации собственных значений  $\mu$  и постоянных интегрирования  $C^v$ ,  $C^\omega$ , приводящие к действительному решению задачи (3.24)–(3.27). Но по отношению к независимым переменным  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , такие решения всегда будут состоять из тригонометрических функций и экспонент.

В заключение текущего параграфа можно сделать вывод, что для задачи (3.24)–(3.27) методом разделения переменных (методом Фурье) можно получить три класса простейших решений: 1) экспоненциальный (3.46) или (3.47) — когда независимые переменные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  располагаются под знаком экспоненты; 2) тригонометрический (3.49) или (3.50), когда те же независимые переменные входят в аргументы тригонометрических функций; 3) смешанный класс решений (3.52) или (3.53), содержащий как экспоненциальную, так и тригонометрическую компоненты.

• Анализ краевых условий (3.26), (3.27) задачи Коши (3.24)–(3.27) предполагает следующее: во-первых, оценку корректности постановки рассматриваемой задачи Коши; во-вторых, поиск ответа на вопрос, какой из полученных классов действительных решений наиболее приемлем с точки зрения процедуры согласования постоянных коэффициентов в них и, наконец, в-третьих, обоснование математического аппарата согласования постоянных коэффициентов выбранного класса решения.

На первый вопрос можно дать ответ исходя из анализа любого из найденных классов решений (3.47), (3.50) или (3.53). Если удалось согласовать все коэффициенты (включая те, которые с нулевыми индексами) одного из выражений, например, для  $v(\lambda)$  так, чтобы удовлетворить краевым условиям (3.25), (3.26), то коэффициенты другого выражения (для  $\omega(\lambda)$ ) вытекают автоматически непосредственно из (3.47), (3.50) или (3.53), и тогда нет необходимости знать краевую функцию  $\omega^o(\tau)$ . Отсюда следует, что произвольно заданными  $v^o(\tau)$  (3.26) и  $\omega^o(\tau)$  (3.27) быть не могут. Или они должны быть определенным образом согласованы между собой, или необходимо исключить избыточность краевых условий. В представленном виде задача (3.24)–(3.27) содержит переизбыток граничных данных и по этой причине со значительной вероятностью является неразрешимой.

Ответ на второй вопрос вытекает из следующего. Чаще всего решение подобной задачи представляется в виде разложения в ряды Фурье [195, 270–272, 274], и с этих позиций наиболее подходящим является тригонометрический класс полученных действительных решений (3.49) или (3.50).

Третий вопрос о математических методах согласования коэффициентов выражений (3.49) или (3.50), подробно рассматривался в работе [167]. Для решения конкретных прикладных задач почвообработки он применения пока не нашел. Поэтому далее приведем только общие подходы.

Используя краевую функцию  $v^o(\tau)$ , и, возможно, некоторые дополнительные краевые условия, а также компоненты рядов тригонометрического класса решения (3.49) или (3.50), необходимо определить вошедшие в них постоянные коэффициенты и, в конечном итоге, представить искомые функции  $v(\lambda)$  и  $\omega(\lambda)$  в виде двух бесконечных равномерно и абсолютно сходящихся, а также дважды дифференцируемых по обоим переменным  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  рядов Фурье [190, 195, 274]. Для этого необходимо, чтобы граничная функция  $v^o(\tau)$  в пределах промежутка  $\tau \in [\tau_a, \tau_b]$  была интегрируема в собственном или несобственном смысле. В последнем случае она должна быть абсолютно интегрируема [273]. Сходимость полученных рядов также зависит от характера граничной функции  $v^o(\tau)$ . Соблюдение всех этих условий будет означать, что полученные таким образом выражения удовлетворят как граничным условиям (3.26), так и системе уравнений (3.24), а значит составят классическое решение задачи Коши (3.24)–(3.27).

3.2.3. Выбор простейших представлений масштабирующих функций-множителей. В п. 3.2.2 приведена система-следствие (3.24) замены независимых переменных (3.19) по характеристическому ре-

шению исходной квазилинейной гиперболической системы (2.35) плоского предельного равновесия весомой идеально-связной среды, для которой далее были получены интегралы (3.42), названные ее общим решением. Затем был проведен анализ тех условий, при которых общее решение (3.42) приводится к действительной форме частных решений. Таких частных представлений общего решения (3.42) было найдено три: а) (3.46) или (3.47); б) (3.49) или (3.50); в) (3.52) или (3.53). Все эти частные варианты предполагают как конечные, так и бесконечные суммы (ряды). В дальнейшем остановимся на простейших частных решениях.

**Первый вариант** дают (3.46) и (3.47), когда  $N = 1$ . В таком случае нижний индекс суммирования  $n$  упускаем и соответствующим образом переписываем решение (3.46):

$$\begin{aligned} v(\lambda_1, \lambda_2) &= C^v \exp(\eta), & \omega(\lambda_1, \lambda_2) &= C^\omega \exp(\eta), \\ \eta &= \frac{1}{4k} \left( \mu \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\mu} \right) = \frac{-1}{4k} \left( \frac{C^v}{C^\omega} \lambda_1 + \frac{C^\omega}{C^v} \lambda_2 \right), \\ C^v &\neq 0, & C^\omega &\neq 0, & \mu &\neq 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где, в соответствии с (3.47), вещественные постоянные  $C^v$ ,  $C^\omega$  могут быть представлены в виде произведений:

$$\begin{aligned} C^v &= F \sin \chi, & C^\omega &= F \cos \chi, \\ (\chi \mp \frac{1}{2}\pi l) &\in ] -\frac{1}{2}\pi, 0 [ \cup ] 0, \frac{1}{2}\pi [ , & l &\in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}, & F &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

**Второй вариант** дают (3.49) и (3.50) с учетом (3.51), когда  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 0$ . В таком случае в выражениях для  $v$  и  $\omega$  (3.49) вторые суммы пропадают полностью, а от первых остается только по одному слагаемому. Индексы суммирования  $m$  упускаем за ненадобностью. В итоге имеем:

$$\begin{aligned} v(\lambda_1, \lambda_2) &= S^{v1} \sin \theta^1, & \omega(\lambda_1, \lambda_2) &= S^{\omega1} \cos \theta^1, \\ \theta^1 &= \frac{1}{4k} \left( \frac{S^{v1}}{S^{\omega1}} \lambda_1 - \frac{S^{\omega1}}{S^{v1}} \lambda_2 \right) + \varphi^1, \\ S^{v1} &\neq 0, & S^{\omega1} &\neq 0, & \varphi^1 &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Кроме того, положим, что

$$S^{v1} = S^{\omega1} = S, \quad \varphi^1 = \frac{\pi}{4} \quad (3.57)$$

и, наконец, перепишем (3.56) с учетом (3.22) и (3.57):

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = -S \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), \quad \omega(\lambda_1, \lambda_2) = S \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.58)$$

**Третий вариант** дают также решения (3.49) и (3.50) с учетом (3.51), но в случае, когда  $M_1 = 0$ , в то время как  $M_2 = 1$ . Теперь в выражениях для  $v$  и  $\omega$  (3.49) полностью пропадают первые суммы, а вместо вторых сумм

остается по одному слагаемому. Индексы суммирования  $m$  также упускаем. В конечном итоге записываем:

$$\begin{aligned} v(\lambda_1, \lambda_2) &= S^{v^2} \cos \theta^2, & \omega(\lambda_1, \lambda_2) &= -S^{\omega^2} \sin \theta^2, \\ \theta^2 &= \frac{1}{4k} \left( \frac{S^{v^2}}{S^{\omega^2}} \lambda_1 - \frac{S^{\omega^2}}{S^{v^2}} \lambda_2 \right) + \varphi^2, \\ S^{v^2} &\neq 0, & S^{\omega^2} &\neq 0, & \varphi^2 &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Кроме того, введем дополнительные, подобные (3.57) ограничения:

$$S^{v^2} = S^{\omega^2} = S, \quad \varphi^2 = \frac{\pi}{4}. \quad (3.60)$$

В заключение из (3.59) с учетом (3.22) и (3.60), получаем:

$$v(\lambda_1, \lambda_2) = S \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), \quad \omega(\lambda_1, \lambda_2) = S \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.61)$$

3.2.4. Общая дифференциальная форма соотношений на декартовых координатах. Решим систему уравнений замены независимых переменных (3.19) относительно  $d\lambda_1$  и  $d\lambda_2$ :

$$\begin{cases} d\lambda_1 = -\frac{1}{v} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) dx + \frac{1}{v} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) dy, \\ d\lambda_2 = \frac{1}{\omega} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) dx - \frac{1}{\omega} \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) dy. \end{cases} \quad (3.62)$$

Из полученных выражений (3.62) непосредственно следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} &= -\frac{1}{v} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), & \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} &= \frac{1}{v} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} &= \frac{1}{\omega} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right), & \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} &= -\frac{1}{\omega} \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Далее, применив характеристическое решение (3.22) системы (2.35), а также выражения (3.63), запишем частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= -\frac{1}{2v} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2\omega} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \gamma \sin \alpha, \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{1}{2v} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2\omega} \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \gamma \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{4k\omega} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{4kv} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{1}{4k\omega} \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{4kv} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Частные производные  $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} x$  и  $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} y$ , ( $i = 1, 2$ ) были получены ранее (3.20) и в дальнейшем также могут использоваться.



• Соотношения, удовлетворяющие системе (2.35) и выполняющиеся вдоль прямых, параллельных оси абсцисс декартовой системы координат (соотношения на абсциссе), т.е. когда  $dy = 0$  и  $y = \text{const}$ .

Полагая, что  $\lambda_1 = \lambda_1(x, y)$  и  $\lambda_2 = \lambda_2(x, y)$ , запишем частные дифференциалы [148]:

$$d_x \lambda_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} dx, \quad d_x \lambda_2 = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} dx. \quad (3.66)$$

Из характеристического решения (3.22) системы (2.35) следует:

$$4k d_x \varphi = d_x \lambda_2 - d_x \lambda_1, \quad (3.67)$$

$$2 d_x s = d_x \lambda_2 + d_x \lambda_1 + 2\gamma \sin \alpha dx, \quad (3.68)$$

где  $d_x \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \varphi dx$  и  $d_x s = \frac{\partial}{\partial x} s dx$  — аналогичные (3.66) частные дифференциалы, соответственно, функций  $\varphi = \varphi(x, y)$  и  $s = s(x, y)$ .

Далее, выполнив подстановку частных производных (3.63) в уравнения частных дифференциалов (3.66), а затем полученных выражений в (3.67) и (3.68), соответственно, имеем:

$$4k d_x \varphi = \left[ \frac{1}{\omega} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{\nu} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] dx, \quad (3.69)$$

$$2 d_x s = \left[ \frac{1}{\omega} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\nu} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] dx + 2\gamma \sin \alpha dx. \quad (3.70)$$

Полученные выражения (3.69) и (3.70) представляют собою искомую дифференциальную общую форму соотношений на абсциссе для квазилинейной гиперболической системы (2.35) плоского предельного равновесия весомой идеально-связной среды.

• Соотношения, удовлетворяющие системе (2.35) и выполняющиеся вдоль прямых, параллельных оси ординат (соотношения на ординате), т.е. когда  $dx = 0$  и  $x = \text{const}$ . Их вывод аналогичен выкладкам (3.66)–(3.70).

Записываем частные дифференциалы:

$$d_y \lambda_2 = \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} dy, \quad d_y \lambda_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} dy, \quad (3.71)$$

$$4k d_y \varphi = d_y \lambda_2 - d_y \lambda_1. \quad (3.72)$$

$$2 d_y s = d_y \lambda_2 + d_y \lambda_1 + 2\gamma \cos \alpha dy. \quad (3.73)$$

Два последних выражения (3.72) и (3.73), с учетом производных (3.63) и дифференциалов (3.71), дают:

$$4k d_y \varphi = - \left[ \frac{1}{\omega} \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{\nu} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] dy, \quad (3.74)$$

$$2 d_y s = - \left[ \frac{1}{\omega} \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\nu} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] dy + 2\gamma \cos \alpha dy. \quad (3.75)$$

Полученная пара выражений (3.74) и (3.75) представляет собою искомую общую дифференциальную форму соотношений на ординате для той же квазилинейной гиперболической системы (2.35).

Тут и выше в определениях дифференциальных форм понятие “общая” употребляется по той причине, что все они содержат неопределенные функции-множители  $v$  и  $\omega$ . Частные дифференциальные формы можно получить, если определиться с  $v$  и  $\omega$ , например, в соответствии с п. 3.2.3.

3.2.5. Интегралы соотношений на декартовых координатах. Далее рассмотрим три частных случая по числу простейших частных решений системы-следствия (3.24), приведенных в п. 3.2.3.

**Первый частный случай.** Функции-множители  $v$  и  $\omega$  определены в соответствии с частным решением (3.54) системы-следствия (3.24).

- Соотношения на абсциссе. Таких будет получено три.

1) *Вывод соотношения*  $s|_{y=\text{const}} = s(\varphi, x)$ .

Выполним подстановку  $v$  и  $\omega$  из (3.54) в (3.69) и (3.70). После формальных преобразований имеем:

$$4k d_x \varphi = \left[ \frac{1}{C^\omega} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{C^v} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \exp(-\eta) dx, \quad (3.76)$$

$$2 d_x s = \left[ \frac{1}{C^\omega} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{C^v} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \exp(-\eta) dx + 2\gamma \sin \alpha dx. \quad (3.77)$$

Полученные соотношения (3.76) и (3.77) содержат как старые независимые переменные ( $x$  и  $y$ ), так и новые ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ). Чтобы избавиться от последних, решим соотношение (3.76) относительно  $\exp(-\eta) dx$  и выполним подстановку полученного в соотношение (3.77). В результате получаем:

$$d_x s = 2k \frac{C^v \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - C^\omega \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{C^v \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + C^\omega \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} d_x \varphi + \gamma \sin \alpha dx \quad (3.78)$$

— частную дифференциальную форму соотношения на абсциссе. Для интегрирования (3.78) выполняем замену:

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.79)$$

и затем, воспользовавшись работой [275], непосредственно записываем:

$$\begin{aligned} s|_{y=\text{const}} &= 2k \frac{C^v C^\omega}{(C^v)^2 + (C^\omega)^2} \times \\ &\times \ln \left\{ \left[ C^v \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + C^\omega \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right]^2 \right\} + \\ &+ 2k \frac{(C^v)^2 - (C^\omega)^2}{(C^v)^2 + (C^\omega)^2} \left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \gamma x \sin \alpha + \tilde{C}_y, \end{aligned} \quad (3.80)$$

где  $\tilde{C}_y$  — постоянная интегрирования.

Введем обозначения:

$$K^{\pm} = \frac{C^{\omega}}{C^v} \pm \frac{C^v}{C^{\omega}} = \frac{(C^{\omega})^2 \pm (C^v)^2}{C^v C^{\omega}}, \quad (3.81)$$

$$F_1 = F_1(\varphi) = C^v \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + C^{\omega} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.82)$$

С их помощью соотношение (3.80) удается упростить:

$$s|_{y=\text{const}} = \frac{2k}{K^+} \left\{ \ln \left[ (F_1)^2 \right] - \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) K^- \right\} + \gamma x \sin \alpha + \tilde{C}_y. \quad (3.83)$$

Выражения (3.80) и (3.83) — это две эквивалентные формы искомого интеграла первого соотношения на абсциссе, соответствующего одному из частных решений (3.54) системы-следствия (3.24). Определяются они через  $k$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $C^v$ ,  $C^{\omega}$  и  $\tilde{C}_y$  — ранее объявленные действительные постоянные величины и связывают выражения (3.80) и (3.83) функций  $s(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$ , а также независимую переменную  $x$ .

2) *Вывод соотношения*  $x|_{y=\text{const}} = x(\varphi)$ .

Возвращаемся к соотношениям (3.76) и (3.77). В них  $\eta$ , в соответствии с (3.54), представляется как функция  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , т.е.  $\eta = \eta(\lambda_1, \lambda_2)$ . Выразим  $\exp(\eta)$  в виде  $\exp(\eta) = \exp(f(s, \varphi, x, y))$ , где  $f(s, \varphi, x, y)$  — некоторая функция, которую определим далее.

Для этого домножаем (3.21) с верхними знаками на  $C^v/C^{\omega}$ , а (3.21) с нижними знаками на  $C^{\omega}/C^v$ , затем складываем полученное и результат делим на  $4k$ . В конечном итоге, применив замену (3.81), получаем:

$$-\eta = s \frac{K^+}{4k} + \varphi \frac{K^-}{2} - \gamma \frac{K^+}{4k} (x \sin \alpha + y \cos \alpha). \quad (3.84)$$

Теперь, с учетом (3.84), записываем:

$$\exp(-\eta) = \frac{\exp\left(s \frac{K^+}{4k}\right) \exp\left(\varphi \frac{K^-}{2}\right)}{\exp\left(\gamma \frac{K^+}{4k} x \sin \alpha\right) \exp\left(\gamma \frac{K^+}{4k} y \cos \alpha\right)}. \quad (3.85)$$

В свою очередь, из (3.83) вытекает:

$$\exp\left(s \frac{K^+}{4k}\right) = \frac{\exp\left(\gamma \frac{K^+}{4k} x \sin \alpha\right) \exp\left(\tilde{C}_y \frac{K^+}{4k}\right) \exp\left(\pi \frac{K^-}{8}\right)}{\exp\left(\varphi \frac{K^-}{2}\right)} |F_1|. \quad (3.86)$$

Выполнив подстановку (3.86) в (3.85), имеем:

$$\exp(-\eta) = \frac{\exp\left(\tilde{C}_y \frac{K^+}{4k}\right) \exp\left(\pi \frac{K^-}{8}\right)}{\exp\left(\gamma \frac{K^+}{4k} y \cos \alpha\right)} |F_1|. \quad (3.87)$$

Теперь, с учетом (3.87), равенство (3.76) дает:

$$4k \frac{C^\omega C^v}{F_1 |F_1|} d_x \varphi = C_{ye} dx, \quad (3.88)$$

где

$$C_{ye} = C_{ye}(y) = \exp \left[ \left( \tilde{C}_y - \gamma y \cos \alpha \right) \frac{K^+}{4k} + \pi \frac{K^-}{8} \right]. \quad (3.89)$$

Переменные в (3.88) разделены. Можно приступить к интегрированию, но прежде следует избавиться от знака модуля. Для этого исследуем вошедшую в (3.88) функцию  $F_1(\varphi)$  (3.82). Обозначим:

$$\begin{aligned} \varphi_{yr} &= \frac{\pi}{4} - \arctg \left( \frac{C^v}{C^\omega} \right) \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}), \\ \iota &= \text{sign}(C^v C^\omega) \text{sign}(C^v). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &< 0 \quad \text{при} \quad \varphi \in ]\varphi_{yr} - \iota\pi, \varphi_{yr}[ , \\ F_1(\varphi) &= 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_{yr}, \\ F_1(\varphi) &> 0 \quad \text{при} \quad \varphi \in ]\varphi_{yr}, \varphi_{yr} + \iota\pi[ , \end{aligned} \quad (3.91)$$

и в отношении  $|F_1(\varphi)|$  справедливо следующее:

$$|F_1(\varphi)| = (-1)^r F_1(\varphi), \quad r = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \varphi \in ]\varphi_{yr} - \iota\pi, \varphi_{yr}[ , \\ 2 & \text{при} \quad \varphi \in ]\varphi_{yr}, \varphi_{yr} + \iota\pi[ . \end{cases} \quad (3.92)$$

Учитывая последнее, записываем равенство (3.88) без знака модуля:

$$(-1)^r 4k C^\omega C^v (F_1)^{-2} d_x \varphi = C_{ye} dx. \quad (3.93)$$

Так получили дифференциальную форму второго соотношения на абсциссе (3.93). Далее интегрируем (3.93) [275, 276] и, учитывая, что

$$\sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.94)$$

после формальных преобразований записываем:

$$x|_{y=\text{const}} = (-1)^r \frac{4k F_2}{C_{ye} K^+ F_1} + C_y^*, \quad (3.95)$$

где

$$F_2 = F_2(\varphi) = C^v \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + C^\omega \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right), \quad (3.96)$$

$C_y^*$  — постоянная интегрирования.

Выражение  $x|_{y=\text{const}} = x(\varphi)$  (3.95) — искомый интеграл дифференциальной формы (3.93) второго соотношения на абсциссе.

3) *Вывод соотношения*  $s|_{y=\text{const}} = s(\varphi)$ .

Для того, чтобы избавиться от независимой переменной  $x$  в соотношении (3.83), выполним подстановку в него выражения (3.95):

$$s|_{y=\text{const}} = \frac{2k}{K^+} \left\{ \ln \left[ (F_1)^2 \right] - \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) K^- \right\} + \\ + (-1)^r \gamma \sin \alpha \frac{4kF_2}{C_{ye}K^+F_1} + C_y, \quad (3.97)$$

$$C_y = \gamma \sin \alpha C_y^* + \tilde{C}_y. \quad (3.98)$$

Выражение (3.97) имеет вид  $s|_{y=\text{const}} = s(\varphi)$ , т.е. не зависит от  $x$  и является окончательным вариантом соотношения (3.80).

• Соотношения на ординате. Дальнейшие выкладки во многом аналогичны предыдущим (3.76)–(3.98), только в текущем случае  $dx = 0$  и, следовательно,  $x = \text{const}$ .

1) *Вывод соотношения*  $s|_{x=\text{const}} = s(\varphi, y)$ .

Выполним подстановку  $v$  и  $\omega$  из (3.54) в (3.74) и (3.75). После формальных преобразований, соответственно, имеем:

$$4k d_y \varphi = - \left[ \frac{1}{C^\omega} \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{C^v} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \exp(-\eta) dy, \quad (3.99)$$

$$2 d_y s = - \left[ \frac{1}{C^\omega} \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{C^v} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \exp(-\eta) dy + \\ + 2\gamma \cos \alpha dy. \quad (3.100)$$

Как и ранее, используя (3.99), исключаем  $\exp(-\eta) dy$  из (3.100). В итоге получаем частную дифференциальную форму первого соотношения на ординате:

$$d_y s = 2k \frac{C^v \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) - C^\omega \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right)}{C^v \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + C^\omega \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right)} d_x \varphi + \gamma \cos \alpha dy. \quad (3.101)$$

Далее, имея в виду (3.79), интегрируем (3.101) [275, 276]

$$s|_{x=\text{const}} = 2k \frac{C^v C^\omega}{(C^v)^2 + (C^\omega)^2} \times \\ \times \ln \left\{ \left[ C^v \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + C^\omega \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2 \right\} + \\ + 2k \frac{(C^v)^2 - (C^\omega)^2}{(C^v)^2 + (C^\omega)^2} \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \gamma y \cos \alpha + \tilde{C}_x, \quad (3.102)$$

где  $\tilde{C}_x$  — постоянная интегрирования.

Применив замену (3.81) и (3.96), упрощаем соотношение (3.102):

$$s|_{x=\text{const}} = \frac{2k}{K^+} \left\{ \ln \left[ (F_2)^2 \right] - \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) K^- \right\} + \gamma y \cos \alpha + \tilde{C}_x. \quad (3.103)$$

Выражения (3.102) и (3.103) — это две эквивалентные формы искомого интеграла первого соотношения на ординате, соответствующего одному из частных решений (3.54) системы-следствия (3.24). Аналогично (3.80), (3.83), выражения (3.102), (3.103) связывают не только функции  $s$  и  $\varphi$ , а также независимую переменную  $y$ . Далее, выразив  $y$  через  $\varphi$ , получим сначала второе соотношение  $y|_{x=\text{const}} = x(\varphi)$ , а затем третье —  $s|_{x=\text{const}} = s(\varphi)$ .

2) *Вывод соотношения*  $y|_{x=\text{const}} = x(\varphi)$ .

Чтобы интегрировать (3.99), необходимо исключить из него  $\exp(-\eta)$ . Из (3.103) имеем:

$$\exp\left(s\frac{K^+}{4k}\right) = \frac{\exp\left(\gamma\frac{K^+}{4k}y\cos\alpha\right)\exp\left(\tilde{C}_x\frac{K^+}{4k}\right)}{\exp\left(\varphi\frac{K^-}{2}\right)\exp\left(\pi\frac{K^-}{8}\right)}|F_2|. \quad (3.104)$$

С учетом последнего, выражение (3.85) дает:

$$\exp(-\eta) = \frac{\exp\left(\tilde{C}_x\frac{K^+}{4k}\right)}{\exp\left(\gamma\frac{K^+}{4k}x\sin\alpha\right)\exp\left(\pi\frac{K^-}{8}\right)}|F_2|. \quad (3.105)$$

Подставляем (3.105) в (3.99)

$$4k\frac{C^\omega C^v}{F_2|F_2|}d_y\varphi = -C_{xe}dy, \quad (3.106)$$

где

$$C_{xe} = C_{xe}(x) = \exp\left[\left(\tilde{C}_x - \gamma x\sin\alpha\right)\frac{K^+}{4k} - \pi\frac{K^-}{8}\right]. \quad (3.107)$$

Как и в случае вывода соотношений на абсциссе, избавляясь от модуля в выражении (3.106), исследуем функцию  $F_2 = F_2(\varphi)$  из (3.96). Обозначим

$$\varphi_{xr} = -\frac{\pi}{4} - \text{arctg}\left(\frac{C^v}{C^\omega}\right) \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}), \quad (3.108)$$

$$\iota = \text{sign}(C^v C^\omega) \text{sign}(C^v).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_2(\varphi) < 0 & \quad \text{при} \quad \varphi \in ]\varphi_{xr} - \iota\pi, \varphi_{xr}[ , \\ F_2(\varphi) = 0 & \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_{xr}, \\ F_2(\varphi) > 0 & \quad \text{при} \quad \varphi \in ]\varphi_{xr}, \varphi_{xr} + \iota\pi[ , \end{aligned} \quad (3.109)$$

и в отношении  $|F_2(\varphi)|$  справедливо следующее:

$$|F_2(\varphi)| = (-1)^r F_2(\varphi), \quad r = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \varphi \in ]\varphi_{xr} - \iota\pi, \varphi_{xr}[ , \\ 2 & \text{при} \quad \varphi \in ]\varphi_{xr}, \varphi_{xr} + \iota\pi[ . \end{cases} \quad (3.110)$$

Учитывая (3.109), (3.110), записываем (3.106), исключив знак модуля

$$(-1)^r 4k C^\omega C^v (F_2)^{-2} d_y \varphi = -C_{xe} dy. \quad (3.111)$$

Таким образом получили дифференциальную форму второго соотношения на ординате (3.111). Далее интегрируем (3.111) [275, 276]. В итоге, учитывая (3.79), (3.82), (3.94) и (3.96), получаем

$$y|_{x=\text{const}} = (-1)^r \frac{4kF_1}{C_{xe}K+F_2} + C_x^*, \quad (3.112)$$

где  $C_x^*$  — постоянная интегрирования.

Выражение (3.112) — искомый интеграл дифференциальной формы (3.111) второго соотношения на ординате.

3) *Вывод соотношения*  $s|_{x=\text{const}} = s(\varphi)$ .

Избавляемся от  $y$  в соотношении (3.103), используя (3.112):

$$s|_{x=\text{const}} = \frac{2k}{K^+} \left\{ \ln \left[ (F_2)^2 \right] - \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) K^- \right\} + \\ + (-1)^r \gamma \cos \alpha \frac{4kF_1}{C_{xe}K+F_2} + C_x, \quad (3.113)$$

$$C_x = \gamma \cos \alpha C_x^* + \tilde{C}_x. \quad (3.114)$$

Выражение (3.113), имеющее вид  $s|_{x=\text{const}} = s(\varphi)$ , является окончательным (третьим) вариантом соотношения на ординате (3.102). В отличие от (3.102), ординату  $y$  (3.113) не содержит.

**Второй частный случай.** Функции-множители  $v$  и  $\omega$  определены в соответствии с частным решением (3.58) системы-следствия (3.24).

• Соотношения на абсциссе, т.е. когда  $dy = 0$ ,  $y = \text{const}$ .

Выполняем подстановку частного решения (3.58) системы-следствия (3.24) в соотношение (3.69). В итоге получаем:

$$4k d_x \varphi = 0. \quad (3.115)$$

Проинтегрировав, имеем:

$$\varphi|_{y=\text{const}} = C_y^*/4k, \quad (3.116)$$

где  $C_y^*$  — постоянная интегрирования.

Из последнего следует, что вдоль абсциссы ориентация главных нормальных напряжений (задается углом  $\varphi$ ) остается неизменной.

При выводе соотношения на абсциссе для  $s$  снова используем соотношение (3.70). Подставляем в (3.70) выражения (3.58):

$$d_x s = (S^{-1} + \gamma \sin \alpha) dx. \quad (3.117)$$

Интегрируя последнее, имеем:

$$s|_{y=\text{const}} = (S^{-1} + \gamma \sin \alpha) x + \tilde{C}_y, \quad (3.118)$$

где  $\tilde{C}_y$  — постоянная интегрирования. Т.е. получили линейную зависимость полусуммы главных нормальных напряжений  $s$  от абсциссы  $x$ .

Полученные выражения (3.116) и (3.118) — соответствующие текущему частному случаю искомые соотношения на абсциссе.

- Соотношения на ординате, т.е. когда  $dx = 0$ ,  $x = \text{const}$ .

Этот случай похож на предыдущие выкладки (3.115)–(3.118). Выражение (3.74) остается законным. Подставляем (3.58) в (3.74), получаем

$$2kS \cos(2\varphi) d_y \varphi = dy. \quad (3.119)$$

Интегрируем (3.119):

$$y|_{x=\text{const}} = kS \sin(2\varphi) + C_x^*, \quad (3.120)$$

где  $C_x^*$  — постоянная интегрирования.

Чтобы получить соотношение на ординате для  $s$ , используем (3.75) и подставляем в него (3.58). В итоге получаем:

$$d_y s = [S^{-1} \text{tg}(2\varphi) + \gamma \cos \alpha] d_y \varphi. \quad (3.121)$$

С учетом (3.119) из (3.121), имеем:

$$d_y s = 2k [\sin(2\varphi) + S\gamma \cos \alpha \cos(2\varphi)] d_y \varphi. \quad (3.122)$$

Интегрируем (3.122):

$$s|_{x=\text{const}} = k [S\gamma \cos \alpha \sin(2\varphi) - \cos(2\varphi)] + C_x, \quad (3.123)$$

где  $C_x$  — постоянная интегрирования.

Выражения (3.120) и (3.123) — искомые соотношения на ординате.

**Третий частный случай.** Функции-множители  $v$  и  $\omega$  определены в соответствии с частным решением (3.61) системы-следствия (3.24). Дальнейшие выкладки, в значительной мере повторили бы предыдущий случай (3.115)–(3.123), поэтому результаты приводим без вывода.

- Соотношения на абсциссе, т.е. когда  $dy = 0$ ,  $y = \text{const}$ .

$$x|_{y=\text{const}} = -kS \sin(2\varphi) + C_y^*, \quad (3.124)$$

где  $C_y^*$  — постоянная интегрирования.

$$s|_{y=\text{const}} = -k [\cos(2\varphi) + S\gamma \sin \alpha \sin(2\varphi)] + C_y. \quad (3.125)$$

где  $C_y$  — постоянная интегрирования.

Выражения (3.124) и (3.125) — искомые соотношения на абсциссе.

- соотношения на ординате, т.е. когда  $dx = 0$ ,  $x = \text{const}$ .

$$\varphi|_{x=\text{const}} = C^*/4k, \quad (3.126)$$

где  $C_x^*$  — постоянная интегрирования.

$$s|_{x=\text{const}} = (S^{-1} + \gamma \cos \alpha) y + \tilde{C}_x, \quad (3.127)$$

где  $\tilde{C}_x$  — постоянная интегрирования.

Выражения (3.126) и (3.127) — искомые соотношения на ординате.



### 3.3. Анализ физической осмысленности полученных соотношений на декартовых координатах

Поливариантность решения системы уравнений (3.24), определяющей связь между старыми  $(x, y)$  и новыми  $(\lambda_1, \lambda_2)$  координатами, которая, собственно, и позволила найти соотношения на декартовых осях, наталкивает на мысль, что не все ее решения имеют физический смысл.

Чтобы выяснить, какие из полученных ранее соотношений (3.80), (3.95), (3.97), (3.102), (3.112), (3.113) (I-ый частный случай), (3.116), (3.118), (3.120), (3.123) (II-ой частный случай) или (3.124)–(3.127) (III-ий частный случай) в должной мере адекватно отражают состояние предельного равновесия моделируемой идеально-связной среды, есть два пути: экспериментальный и теоретический.

Выберем теоретический путь: во-первых потому, что изучаемая математическая модель (2.35) идеально-связной среды [157], находящейся в состоянии предельного равновесия не совершенствовалась (предложен только новый способ решения системы (2.35)), а ее адекватность давно доказана; во-вторых потому, что такой путь менее затратный; в-третьих, возможно более точный. Ведь очень трудно подобрать реальную среду, полностью адекватную поставленной задаче. К тому же, полностью исключить погрешности измерений и методики экспериментов, очевидно, нельзя.

Будем отвергать те из соотношений, которые входят в противоречие с уже известными частными закономерностями. Понятно, что для отрицания справедливости какого-либо из соотношений достаточно обнаружить одно такое противоречие. Далее сформулируем условие тестовой задачи и набор известных тестовых закономерностей.

**3.3.1. Условия тестовых задач и тестовые закономерности.** Первая задача, на которой будем проверять полученные в п. 3.2.5 соотношения, уже сформулирована в п.г. 2.3 (рис. 2.8). Уточним ее условие (рис. 3.1). Речь идет об уплотнении идеально-связной среды 1 в вертикальном зазоре между двумя стенками 3 и 4 бесконечных размеров. Геометрически область симметрична относительно вертикальной оси  $Oy$ . Снизу уплотняемый объем 1 закрыт жестким горизонтальным элементом (дном) 2. При таких условиях в (2.35)  $\alpha = 0$  (рис. 2.10). В дополнение примем, что условия трения на всех упомянутых поверхностях одинаковы, а внешняя нагрузка  $\mathbf{P}$  имеет плоскую горизонтальную поверхность приложения и симметрична относительно  $Oy$ .

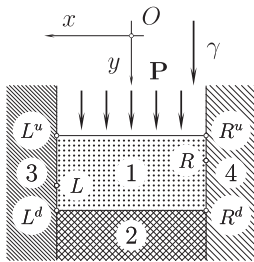


Рис. 3.1

С учетом таких ограничений есть основания утверждать, что рассматриваемая тестовая задача является осесимметричной относительно оси ординат  $Oy$ . В этом случае, в пределах границ области предельного равновесия  $(x \in ]x_l, x_r[$ , где  $x_l$  и  $x_r$  — абсциссы точек на внутренних поверхностях

стенок 3 и 4 соответственно) для равноудаленных от оси ординат точек должны выполняться следующие (тестовые) закономерности:

1) равенство модулей всех компонентов тензора напряжений —

$$|\sigma_{ij}(-x, y)| = |\sigma_{ij}(+x, y)|, \quad \text{где } i, j = x, y; \quad (3.128)$$

2) равенство знаков нормальных компонентов  $\sigma_{xx}(x, y)$  и  $\sigma_{yy}(x, y)$  —

$$\text{sign}(\sigma_{ii}(-x, y)) = \text{sign}(\sigma_{ii}(+x, y)); \quad (3.129)$$

3) противоположность знаков касательной компоненты —

$$\text{sign}(\sigma_{xy}(-x, y)) = -\text{sign}(\sigma_{xy}(+x, y)). \quad (3.130)$$

Все эти требования диктуются условиями равновесия в макросмысле, т.е. гарантирующего равновесие любого, имеющего конечные размеры, фрагмента среды из рассматриваемой области, взятого отдельно.

Итак, в центральной точке поверхности воздействия внешней нагрузки  $\mathbf{P}$  координата  $x = 0$ . Касательное напряжение, ориентированное вдоль оси абсцисс, т.е. действующее параллельно поверхности воздействия внешней нагрузки и совпадающее с плоскостью рисунка, определяется выражением (2.31) для  $\sigma_{xy}$ . Из (2.31) вытекает, что поле векторов касательных напряжений  $\sigma_{xy}$  будет симметричным относительно оси  $Oy$ , если для соотношений вида  $x|_{y=\text{const}} = x(\varphi)$  при любых  $y \in ]-\infty, +\infty[$  выполняются условия:

$$x(\varphi) = 0, \quad \text{если } \varphi = \varphi_n = \pm \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \{0, 1, \dots, \infty\}, \quad (3.131)$$

$$x(\varphi_n) - x(\varphi_n - \Delta\varphi) = -[x(\varphi_n) - x(\varphi_n + \Delta\varphi)], \quad (3.132)$$

где  $\Delta\varphi$  — произвольное конечное приращение угла  $\varphi$ .

Кроме уже приведенного, чтобы соотношения на декартовых координатах (3.80), (3.95), (3.97), (3.102), (3.112), (3.113) (первый частный случай), (3.116), (3.118), (3.120), (3.123) (второй частный случай) или (3.124)–(3.80) (третий частный случай) — имели физический смысл, они должны:

а) демонстрировать согласованность с ориентацией системы координат с учетом возможности поворота последней на произвольный угол ( $\alpha$ );

б) обеспечивать объяснение очевидных закономерностей, если среда весома ( $\gamma > 0$ ), и если удельный вес среды равен нулю ( $\gamma = 0$ ).

В случае весома среды и неограниченного роста ее удельного веса ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), можно предположить, что по мере удаления вниз от поверхности воздействия внешней нагрузки  $\mathbf{P}$  (по мере роста  $y$ ), т.е. пропорционально увеличению высоты слоя среды, также неограниченно растет полусумма главных нормальных напряжений  $s$ .

Такое предположение строится на следующем:

1) исходя из (2.31), касательные напряжения  $\sigma_{xy}$  на боковых поверхностях уплотняемой среды всегда ограничены величиной сцепления  $k$  и,

следовательно, их суммарное воздействие на эти поверхности при ограниченной высоте слоя также всегда ограничено;

2) внешняя нагрузка  $\mathbf{P}$  ограничена по условию задачи;

3) поскольку условия равновесия в макросмысле должны соблюдаться (задача статическая), то неограниченный рост весовых сил должен чем-то компенсироваться, а это возможно только лишь за счет ответного роста нормальных напряжений внутри среды по мере удаления вниз от поверхности уплотнения, т.е. по мере роста  $y$ .

В случае, когда среда невесомая ( $\gamma = 0$ ), то, по меньшей мере, в пределах некоторого ограниченного удаления от поверхности уплотнения должно наблюдаться падение величины полусуммы главных нормальных напряжений  $s$ . Это связано с тем, что внешняя нагрузка  $\mathbf{P}$  частично уравнивается силами трения на поверхностях вдоль боковых стенок 3 и 4. Чем выше слой среды, тем больше поверхность боковых стенок, а, следовательно, тем сильнее компенсирующее действие сил трения и тем меньше реактивные нормальные напряжения внутри среды.

Вторая тестовая задача (рис. 3.2) отличается от предыдущей тем, что внешняя нагрузка  $\mathbf{P}$  ориентирована по нормали к силе земного тяготения, а система декартовых координат имеет иную точку приложения. Теперь ось абсцисс делит область уплотнения 1 на две равные части, а, значит, ордината  $y$  может быть как положительной, так и отрицательной. Абсцисса  $x$  — всегда положительная.

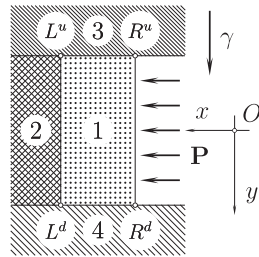


Рис. 3.2

Кроме того, несмотря на сохранившуюся симметричность области уплотнения (теперь относительно оси  $Ox$ ), симметрия напряженного состояния будет достигаться только для случая невесомой среды.

В таком случае, полагая, что  $\gamma = 0$ , выражения (3.128)–(3.132) следует переписать так:

$$|\sigma_{ij}(x, -y)| = |\sigma_{ij}(x, +y)|, \quad \text{где } i, j = x, y; \quad (3.133)$$

$$\text{sign}(\sigma_{ii}(x, -y)) = \text{sign}(\sigma_{ii}(x, +y)); \quad (3.134)$$

$$\text{sign}(\sigma_{xy}(x, -y)) = -\text{sign}(\sigma_{xy}(x, +y)). \quad (3.135)$$

$$y(\varphi) = 0, \quad \text{если } \varphi = \varphi_n = \pm \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \{0, 1, \dots, \infty\}, \quad (3.136)$$

$$y(\varphi_n) - y(\varphi_n - \Delta\varphi) = -[y(\varphi_n) - y(\varphi_n + \Delta\varphi)], \quad (3.137)$$

где  $\Delta\varphi$  — произвольное конечное приращение угла  $\varphi$ .

3.3.2. Предварительный анализ тестовых закономерностей. Полный анализ приведенных выше (п. 3.3.1) тестовых закономерностей приведен в работе [167]. Там, в частности, показано, что II-ой и III-ий частные случаи (п. 3.2.5) не удовлетворяют условиям тестовых задач.

В той же работе [167], в процессе анализа соотношений на абсциссе (3.95) и (3.97), относящихся к первому частному случаю (п. 3.2.5) обосновано требование

$$|C^v| = |C^\omega|. \quad (3.138)$$

Если оно выполняется, то функция  $s(\varphi)$  (3.97) остается симметричной относительно точки  $\varphi = \varphi_n$ , где  $\varphi_n$  вычисляется в соответствии с

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2} \pm \pi n_1, \quad (n_1 \in \{0, 1, \dots, \infty\}), \quad (3.139)$$

когда

$$\text{sign}(C^v) = \text{sign}(C^\omega), \quad (3.140)$$

или в соответствии с

$$\varphi_n = \pm n_2 \pi, \quad (n_2 \in \{0, 1, \dots, \infty\}), \quad (3.141)$$

когда

$$\text{sign}(C^v) \neq \text{sign}(C^\omega). \quad (3.142)$$

В таком случае, с учетом выражений (2.31), соотношение (3.97) одновременно удовлетворяет требованиям (3.128) и (3.129).

3.3.3. Адаптированный вариант соотношений на декартовых координатах. Применение требования (3.139) и двух условий (3.140) и (3.142) к соотношениям на абсциссе (3.83), (3.95), (3.97) и ординате (3.103), (3.112), (3.113) порождает два комплекта соотношений. Это подробно изложено в работе [167].

- Соотношения на абсциссе: (3.83), (3.95) и (3.97).

*Первый комплект* соответствует условию (3.140).

$$s|_{y=\text{const}} = k \ln(2(C^v)^2 \sin^2 \varphi) + \gamma x \sin \alpha + \tilde{C}_y, \quad (3.143)$$

где физический смысл и номинальное значение постоянной интегрирования  $\tilde{C}_y$  остается прежним и соответствует ее определению в (3.80) или (3.83).

$$x|_{y=\text{const}} = \pm (-1)^r 2k \exp \frac{\gamma y \cos \alpha - \tilde{C}_y}{2k} \text{ctg} \varphi + C_y^*, \quad (3.144)$$

где

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{yr} - \pi, \varphi_{yr}], \\ 2 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{yr}, \varphi_{yr} + \pi[, \end{cases} \quad (3.145)$$

$$\varphi_{yr} = \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}). \quad (3.146)$$

$$s|_{y=\text{const}} = k \ln(\sin^2 \varphi) \pm \pm (-1)^r 2k \gamma \sin \alpha \exp \frac{\gamma y \cos \alpha - \tilde{C}_y}{2k} \text{ctg} \varphi + C_y^+, \quad (3.147)$$

где  $r$  определяется выражениями (3.145) и (3.146), а

$$C_y^+ = \gamma \sin \alpha C_y^* + \tilde{C}_y + k \ln(2(C^v)^2). \quad (3.148)$$

Появление знаков “±” в (3.144) и (3.147) обусловлено исключением знаковой переменной  $\iota$  из (3.92) в процессе вывода (3.145).  $\iota$  — определена ранее выражением (3.90) в соответствии со знаками  $C^v$  и  $C^\omega$ . Поскольку сейчас рассматривается вариант, когда  $\text{sign}(C^v) = \text{sign}(C^\omega)$ , то  $\iota = +1$  если  $C^v = C^\omega > 0$ . В этом случае в (3.144) и (3.147) следует применять верхний знак. В противном случае, когда  $C^v = C^\omega < 0$  и  $\iota = -1$  в (3.144) и (3.147) следует применять нижний знак. Заметим, если среда невесомая ( $\gamma = 0$ ), или система координат ориентирована таким образом, что  $\alpha = 0$  (рис. 3.1), в соотношении (3.147) изменяющая знак компонента пропадает.

*Второй комплект* соответствует условию (3.142).

$$s|_{y=\text{const}} = -k \ln(2(C^v)^2 \cos^2 \varphi) + \gamma x \sin \alpha + \tilde{C}_y, \quad (3.149)$$

где постоянная  $\tilde{C}_y$  соответствует ее определению в (3.80) или (3.83).

$$x|_{y=\text{const}} = \pm(-1)^r 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y \cos \alpha}{2k} \text{tg} \varphi + C_y^*, \quad (3.150)$$

где

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{yr} - \pi, \varphi_{yr}], \\ 2 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{yr}, \varphi_{yr} + \pi[, \end{cases} \quad (3.151)$$

$$\varphi_{yr} = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}). \quad (3.152)$$

$$\begin{aligned} s|_{y=\text{const}} &= -k \ln(\cos^2 \varphi) \pm \\ &\pm (-1)^r 2k \gamma \sin \alpha \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y \cos \alpha}{2k} \text{tg} \varphi + C_y^-, \end{aligned} \quad (3.153)$$

где показатель степени  $r$  определяется выражениями (3.151) и (3.152), а постоянная  $C_y^-$  — выражением:

$$C_y^- = \gamma \sin \alpha C_y^* + \tilde{C}_y - k \ln(2(C^v)^2). \quad (3.154)$$

Верхний знак в соотношении (3.150) и (3.153) получается в случае отрицательного значения  $C^v$  и положительного  $C^\omega$ , а нижний, в обратном случае, когда  $C^v > 0$  и  $C^\omega < 0$ .

• Соотношения на ординате.

*Первый комплект* образуется из (3.112), (3.103) и (3.113) в случае, когда достигается условие (3.140) равенства знаков постоянных  $C^v$  и  $C^\omega$ :

$$y|_{x=\text{const}} = \pm(-1)^r 2k \exp \frac{\gamma x \sin \alpha - \tilde{C}_x}{2k} \text{tg} \varphi + C_x^*, \quad (3.155)$$

где

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{xr} - \pi, \varphi_{xr}], \\ 2 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{xr}, \varphi_{xr} + \pi[, \end{cases} \quad (3.156)$$

$$\varphi_{xr} = -\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}); \quad (3.157)$$

$$s|_{x=\text{const}} = k \ln(\cos^2 \varphi) + \gamma y \cos \alpha + k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x; \quad (3.158)$$

$$\begin{aligned} s|_{x=\text{const}} &= k \ln(\cos^2 \varphi) \pm \\ &\pm (-1)^r 2k \gamma \cos \alpha \exp \frac{\gamma x \sin \alpha - \tilde{C}_x}{2k} \operatorname{tg} \varphi + C_x^+, \end{aligned} \quad (3.159)$$

где

$$C_x^+ = \gamma \cos \alpha C_x^* + k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x. \quad (3.160)$$

Верхний знак в соотношениях (3.155) и (3.159) получается в случае положительных значений  $C^v$  и  $C^\omega$ , а нижний — когда  $C^v = C^\omega < 0$ .

Второй комплект образуется из (3.112), (3.103) и (3.113) в случае, когда знаки постоянных интегрирования  $C^v$  и  $C^\omega$  не совпадают (3.142):

$$y|_{x=\text{const}} = \pm (-1)^r 2k \exp \frac{\tilde{C}_x - \gamma x \sin \alpha}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^*, \quad (3.161)$$

где

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{xr} - \pi, \varphi_{xr}], \\ 2 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{xr}, \varphi_{xr} + \pi[; \end{cases} \quad (3.162)$$

$$\varphi_{xr} = \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}); \quad (3.163)$$

$$s|_{x=\text{const}} = -k \ln(\sin^2 \varphi) + \gamma y \cos \alpha - k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x; \quad (3.164)$$

$$\begin{aligned} s|_{x=\text{const}} &= -k \ln(\sin^2 \varphi) \pm \\ &\pm (-1)^r 2k \gamma \cos \alpha \exp \frac{\tilde{C}_x - \gamma x \sin \alpha}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^-, \end{aligned} \quad (3.165)$$

где

$$C_x^- = \gamma \cos \alpha C_x^* - k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x. \quad (3.166)$$

Верхний знак в соотношении (3.161) и (3.165) получается в случае отрицательного значения  $C^v$  и положительного  $C^\omega$ , а нижний, в обратном случае, когда  $C^v > 0$  и  $C^\omega < 0$ .

3.3.4. Оценка адекватности полученных соотношений. Подробно этот материал изложен в работе [167]. Рассмотрим первую тестовую задачу рис. 3.1. Применительно к ней, из анализа адаптированного выражения  $x|_{y=\text{const}} = x(\varphi)$  (3.144), вытекает, что требования (3.131) и (3.132) будут выполняться только, если

$$C_y^* = 0. \quad (3.167)$$

Это важно, т.к. в текущем случае позволяет сократить количество неизвестных постоянных, вошедших в выражения (3.144), (3.147).

Из анализа (3.144) также следует, что в точках  $x = 0$ , если  $C_y^* = 0$  (3.167), угол  $\varphi$  может принимать такие значения:

$$\varphi_{x_0} = \pm \frac{1}{2} \pi n, \quad (n \in \{1, 3, 5, \dots, \infty\}). \quad (3.168)$$

Иначе требования (3.131) и (3.132) выполняться не будут. В таком случае, в пределах всей изучаемой области (рис. 3.1) допустимые значения угла  $\varphi$  укладываются в один из интервалов:

$$\varphi \in \left] \varphi_{x_o} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_o} + \frac{1}{2}\pi \right[. \quad (3.169)$$

В работе [167] показано, что исходя из анализа первого пакета соотношений (3.144), (3.147) и (3.155), (3.159), можно сделать вывод, что применительно к задаче рис. 3.1 с учетом возможного изменения интенсивности внешнего силового воздействия  $\mathbf{P}$ , а также различного удельного веса среды  $\gamma$ , все соотношения первого пакета имеют физический смысл, причем с обоими знаками, хотя и не всякий интервал (3.169) изменения угла  $\varphi$  будет корректным. Если в (3.144), (3.147) и (3.155), (3.159) применяются верхние знаки, то в (3.169)  $\varphi_{x_o} = +\frac{1}{2}\pi$ , если же нижние, то  $\varphi_{x_o} = -\frac{1}{2}\pi$ .

Возвращаясь ко второму пакету соотношений на декартовых координатах (3.150), (3.153) и (3.161), (3.165) можно сделать вывод, что применительно к той же задаче рис. 3.1 они не показывают согласованности с физическим смыслом, но удовлетворяют условиям второй тестовой задачи рис. 3.2, в частности, требованиям (3.133)–(3.137), а также пунктам “а” и “б” (п. 3.3), когда значение угла  $\varphi$  укладывается в интервал:

$$\varphi \in \left] \varphi_{y_o} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{y_o} + \frac{1}{2}\pi \right[, \quad (3.170)$$

где  $\varphi_{y_o}$  — такое значение  $\varphi$ , при котором ордината  $y$  принимает нулевое значение, если  $C_x^* = 0$ . Причем, в случае выбора верхних знаков, в соотношениях (3.150), (3.153) и (3.161), (3.165) необходимо положить, что  $\varphi_{y_o} = +\frac{1}{2}\pi$ , а в случае выбора нижних знаков, что  $\varphi_{y_o} = -\frac{1}{2}\pi$ .

Положительное направление изменения угла  $\varphi$  в рассматриваемом случае, когда в (3.150) и (3.161) применяются верхние знаки, противоположно положительному направлению изменения  $y$ .

Следующее касается обеих тестовых задач: а) исходя из симметрии функций  $s|_{y=\text{const}} = s(\varphi)$  (3.147), (3.153) относительно  $\varphi$  и возможности выбора знака в выражениях  $x|_{y=\text{const}} = x(\varphi)$  (3.144), (3.150), можно заключить, что положительное направление угла  $\varphi$  по отношению к абсциссе  $x$  можно выбирать произвольным образом, исходя из контекста конкретной задачи; б) постоянные  $C_x^+$  (3.160) и  $C_x^-$  (3.166), равно как и постоянные  $C_y^+$  (3.148) и  $C_y^-$  (3.154), могут определяться или назначаться “целиком”, без учета детализации (3.160) и (3.166).

**3.3.5. Формулировка правил периодичности.** Из предыдущего материала следует, что анализ периодичности полученных соотношений следует проводить применительно к конкретным задачам.

- Задача в соответствии с рис. 3.1. Ей отвечают соотношения на декартовых осях первого комплекта, т.е. выражения (3.144), (3.147), (3.155), (3.159). Когда в них приняты верхние знаки, в отношении угла  $\varphi$  можно

сказать, что интервал его значений (3.169) является физически осмысленным, если середина  $\varphi_{x_o}$  этого интервала равна любому числу из следующей последовательности:

$$\varphi_{x_o} = +\frac{1}{2}\pi \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}). \quad (3.171)$$

Если же в соотношениях (3.144), (3.147), (3.155), (3.159) будут приняты нижние знаки, то середина  $\varphi_{x_o}$  интервала (3.169) должна определяться так:

$$\varphi_{x_o} = -\frac{1}{2}\pi \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}). \quad (3.172)$$

Заметим, что в физическом смысле периодичность изменения  $\varphi$ , когда среднее значение  $\varphi_{x_o}$  интервала (3.169) принадлежит одной из последовательностей (3.171) или (3.172), да и сам факт существования периодических решений никакого разнообразия решений не добавляет, а лишь тиражирует одно и то же решение со смещением, кратным  $2\pi$ . Само же смещение, задаваемое выражениями (3.171) или (3.172), ориентации компонентов тензора напряжений не меняет, поскольку задает лишь линии действия напряжений, но не изменяет их знаков (2.31).

Знаки касательных напряжений (2.31) меняются только тогда, когда изменяется выбор знака в самих соотношениях (3.144), (3.147), (3.155), (3.159) и соответственно этим знакам изменяется выбор последовательностей (3.171) или (3.172) возможных значений  $\varphi_{x_o}$ .

Таким образом, при выборе значения  $\varphi_{x_o}$ , а точнее постоянной  $n$  из (3.171) или (3.172), нет смысла принимать ненулевое значение  $n$ . Следовательно, в дальнейшем, применительно к соотношениям первого комплекта (3.144), (3.147), (3.155), (3.159), в случае выбора верхних знаков, ограничимся значением  $\varphi_{x_o}$ , равным:

$$\varphi_{x_o} = +\frac{1}{2}\pi, \quad (3.173)$$

а в случае выбора нижних знаков, следующим значением:

$$\varphi_{x_o} = -\frac{1}{2}\pi. \quad (3.174)$$

Приведенные выше рассуждения предполагают, что  $C_y^* = 0$ . Другие значения  $C_y^*$  приведут к смещению значения  $\varphi|_{x=0}$  относительно точек периодичности  $\varphi_{x_o}$  из выражений (3.171) и (3.172). Выбор ненулевого значения  $C_y^*$  не противоречит обозначенным выше законам механики, но применительно к решению поставленной задачи (рис. 3.1) вряд ли целесообразно. Ненулевое значение  $C_y^*$  может быть оправданным в тех случаях, когда начало координат необходимо совместить с конкретной точкой, не совпадающей с нынешней, когда  $x = x(\varphi_{x_o}) = 0$ .

• *Задача в соответствии с рис. 3.2* предполагает применение соотношений на декартовых осях из второго комплекта, т.е. выражений (3.150),



(3.153), (3.161), (3.165). В отношении них можно повторить приведенные выше рассуждения, с той лишь разницей, что интервал физически осмысленных значений угла  $\varphi$  теперь определяется выражением (3.170), а середина  $\varphi_{y_0}$  этого интервала, в случае выбора в рассматриваемых соотношениях верхних или нижних знаков, определяется двумя следующими последовательностями:

$$\varphi_{y_0} = +\frac{1}{2}\pi \pm 2\pi n, \quad \text{или} \quad \varphi_{y_0} = -\frac{1}{2}\pi \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}) \quad (3.175)$$

соответственно.

Как и в случае первого комплекта соотношений, знаки касательных напряжений (2.31) определяются выбором знаков (верхних или нижних) в самих соотношениях (3.150), (3.153), (3.161), (3.165). Соответственно этим знакам выбирают адекватную последовательность (3.175) возможных значений  $\varphi_{y_0}$ . При этом также нет смысла принимать ненулевое значение  $n$ . Следовательно, в дальнейшем применительно к соотношениям второго комплекта (3.150), (3.153), (3.161), (3.165), в случае выбора верхних или нижних знаков, ограничимся соответствующим значением  $\varphi_{y_0}$ , равным:

$$\varphi_{y_0} = +\frac{1}{2}\pi, \quad \text{или} \quad \varphi_{y_0} = -\frac{1}{2}\pi. \quad (3.176)$$

Приведенные выше рассуждения предполагают, что постоянная интегрирования  $C_y^*$  теперь может принимать ненулевые значения, в то время как  $C_x^* = 0$ . В отношении последней справедливы такие же рассуждения, какие были приведены выше касательно  $C_y^*$ , когда рассматривались соотношения на декартовых осях из первого комплекта.

Периодический характер соотношений (3.144), (3.150), (3.147), (3.153) и (3.155), (3.161), (3.159), (3.165) согласуется с уже имеющимися сведениями из теорий предельного равновесия и пластичности. В частности, о периодичности в задачах предельного равновесия идеально-вязкой среды известно из работы [157], а впервые этот факт был показан в работе [153] применительно к теории пластичности.

#### 3.4. Два комплекта соотношений на декартовых осях, две различные задачи и два разных предельных состояния модельной среды

Применительно к системе (2.35) плоского предельного равновесия весомой идеально-вязкой среды в случае, когда задача рассматривается в системе координат, одна ось которой совпадает с линией действия весовых сил, физически осмысленными являются два варианта или, что то же, два пакета (без учета вариаций с нижними и верхними знаками) соотношений на декартовых координатных осях:

- Первый вариант (задача, например, в соответствии с рис. 3.1).

Соотношения на абсциссе получаем из выражений (3.144) – (3.148), учитывая интервал возможных значений угла  $\varphi$  (3.169) и его среднюю точку (3.173) или (3.174), в зависимости от знаков (верхних или нижних) в

(3.144)–(3.148), а также положив  $\alpha = 0$ :

$$x|_{y=\text{const}} = 2k \exp \frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_y^*, \quad (3.177)$$

$$s|_{y=\text{const}} = k \ln (\sin^2 \varphi) + C_y^+, \quad (3.178)$$

где

$$\varphi \in \left] \varphi_{x_o} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_o} + \frac{1}{2}\pi \right[ , \quad \varphi_{x_o} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (3.179)$$

$$C_y^+ = \tilde{C}_y + k \ln (2(C^v)^2). \quad (3.180)$$

Соотношения на ординате получаем из (3.155)–(3.160), учитывая тот же интервал (3.169) и его среднюю точку (3.173) или (3.174), а также положив  $\alpha = 0$ :

$$y|_{x=\text{const}} = (-1)^r 2k \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{tg} \varphi + C_x^*, \quad (3.181)$$

$$s|_{x=\text{const}} = k \ln (\cos^2 \varphi) + \gamma y + k \ln (2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (3.182)$$

$$s|_{x=\text{const}} = k \left[ \ln (\cos^2 \varphi) + (-1)^r 2\gamma \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{tg} \varphi \right] + C_x^+, \quad (3.183)$$

где

$$\varphi \in \left] \varphi_{x_o} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_o} + \frac{1}{2}\pi \right[ , \quad \varphi_{x_o} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (3.184)$$

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi > \varphi_{x_o}, \\ 2 & \text{при } \varphi < \varphi_{x_o}, \end{cases} \quad (3.185)$$

$$C_x^+ = \gamma C_x^* + k \ln (2(C^v)^2) + \tilde{C}_x. \quad (3.186)$$

- Второй вариант (задача, например, в соответствии с рис. 3.2).

Соотношения на абсциссе получаем из (3.150)–(3.154), учитывая интервал (3.170) и его среднюю точку (3.176), в зависимости от знаков (верхних или нижних) в (3.150)–(3.154), а также положив  $\alpha = 0$ :

$$x|_{y=\text{const}} = (-1)^r 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y}{2k} \operatorname{tg} \varphi + C_y^*, \quad (3.187)$$

$$s|_{y=\text{const}} = -k \ln (\cos^2 \varphi) + C_y^-, \quad (3.188)$$

где

$$\varphi \in \left] \varphi_{y_o} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{y_o} + \frac{1}{2}\pi \right[ , \quad \varphi_{y_o} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (3.189)$$

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi < \varphi_{y_o}, \\ 2 & \text{при } \varphi > \varphi_{y_o}, \end{cases} \quad (3.190)$$

$$C_y^- = \tilde{C}_y - k \ln (2(C^v)^2). \quad (3.191)$$

Соотношения на ординате получаем из (3.161)–(3.166), снова-таки учитывая интервал (3.170) и его среднюю точку (3.176), а также положив  $\alpha = 0$ :

$$y|_{x=\text{const}} = 2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^*, \quad (3.192)$$

$$s|_{x=\text{const}} = -k \ln (\sin^2 \varphi) + \gamma y - k \ln (2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (3.193)$$

$$s|_{x=\text{const}} = k \left[ 2\gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi - \ln (\sin^2 \varphi) \right] + C_x^-, \quad (3.194)$$

где

$$\varphi \in \left] \varphi_{y_0} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{y_0} + \frac{1}{2}\pi \right[ , \quad \varphi_{y_0} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (3.195)$$

$$C_x^- = \gamma C_x^* - k \ln (2(C^v)^2) + \tilde{C}_x. \quad (3.196)$$

Итак, по итогу получили два пакета соотношений на осях декартовых координат: первый — комплект выражений (3.177)–(3.186); второй — (3.187)–(3.196). Под них было подобрано пару тестовых задач по рис. 3.1 и по рис. 3.2, соответственно. Естественно, на этом их применимость не исчерпывается. Так, соотношения (3.187)–(3.196) нашли применение в процессе моделирования плодов томатов [277–279].

Далее прибегнув к анализу двух полученных комплектов соотношений (3.177)–(3.186) и (3.187)–(3.196) выясним различия физической природы тех напряженных состояний, которые им соответствуют. Для этого снова обратимся к задачам в соответствии с рис. 3.1 и рис. 3.2.

На первый взгляд, разница очевидна. На рис. 3.1 предполагается, что внешняя нагрузка  $\mathbf{P}$  приложена вдоль горизонтальной поверхности  $L^u R^u$  в направлении линии действия весовых сил, в то время как на рис. 3.2 внешняя нагрузка  $\mathbf{P}$  приложена вдоль вертикальной поверхности  $R^u R^d$  и действует горизонтально, т.е. поперек направления действия весовых сил.

Чтобы понять, что столь очевидная разница на самом деле не такая уж убедительная, необходимо принять во внимание, что в случае плоского напряженного состояния, в соответствии с рис. 3.1, силы реакции, действующие на правой стенке  $R^u R^d$ , по направлению и месту приложения в точности соответствуют внешней нагрузке  $\mathbf{P}$ , изображенной на рис. 3.2. С другой стороны, силы реакции, действующие на внешней поверхности  $L^u R^u$  рис. 3.2, по месту приложения и направлению действия в точности совпадают с активной внешней нагрузкой  $\mathbf{P}$ , изображенной на рис. 3.1. Таким образом, получается, что задачи рис. 3.1 и рис. 3.2 отличаются не столь качественно, сколь количественно.

Чтобы понять действительную и существенную разницу между задачами рис. 3.1 и рис. 3.2, необходимо рассмотреть равновесие треугольных  $L^u R^u C$  фрагментов среды рис. 3.3, выделенных, например, у окрестностей верхней  $L^u R^u$  граничной поверхности области нагружения для обеих задач. Такие же треугольные фрагменты среды можно было выделить и вдоль

правой границы  $R^u R^d$ . Это принципиального значения не имеет. Важно, чтобы эти фрагменты выделялись на тех границах, на которых активные силы  $\mathbf{P}$  и пассивные силы реакции  $\mathbf{R}$  меняются местами.

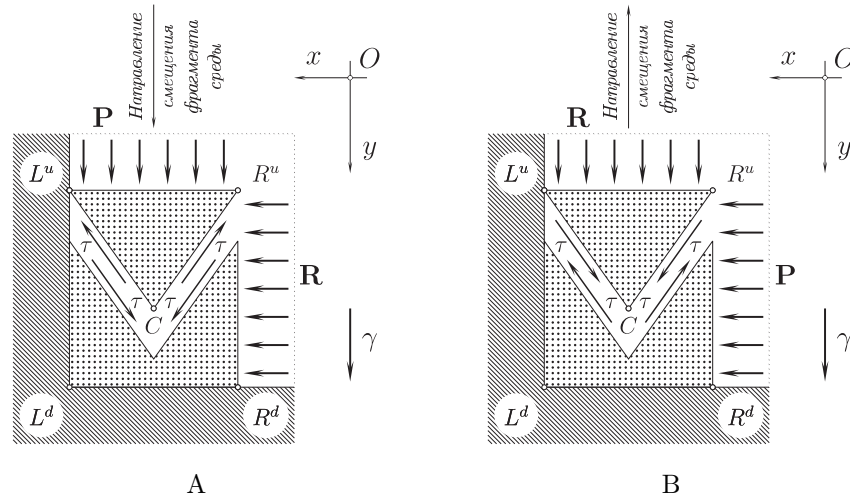


Рис. 3.3. Два предельных равновесных состояния для выделенного фрагмента  $L^u R^u C$  среды: А) достигается по вдавливанию фрагмента внутрь объема среды (задача по рис. 3.1); В) достигается по выдавливанию фрагмента наружу, т.е. из объема среды (задача по рис. 3.2)

Из анализа рис. 3.3 видим, что в первом случае (рис. 3.3,А соответствует задаче по рис. 3.1) выделенный треугольный фрагмент среды  $L^u R^u C$  достигает своего предельного равновесного состояния по смещению внутрь среды, т.е. по вдавливанию. Во втором случае (рис. 3.3,В соответствует задаче по рис. 3.2) указанный фрагмент  $L^u R^u C$  уравнивается в процессе выдавливания его наружу.

В обоих случаях касательные напряжения  $\tau$ , действующие на поверхностях  $L^u C$  и  $R^u C$ , меняют свое направление на обратное. Это обстоятельство, собственно, и есть качественное различие двух рассмотренных задач.

Разумеется, по модулю все силы и компоненты тензора напряжений, в частности, упоминавшиеся активные  $\mathbf{P}$  и пассивные  $\mathbf{R}$  силы, а также касательные напряжения  $\tau$  в двух этих задачах не будут равны, но это уже количественная сторона вопроса, а нас сейчас интересовала качественная.

Таким образом, констатируем, что система (2.35) плоского предельного равновесия весомой идеально-связной среды фактически описывает два различных предельных равновесных состояния. Такое утверждение уже изучалось другими авторами, например, В.В.Соколовским [157], но другим способом. Это обстоятельство служить косвенным доказательством справедливости приведенных выше выкладок.

## 3.5. Решение задачи об уплотнении модельной среды

Рассмотрим задачу в соответствии с рис. 3.1 и соотношениями на декартовых координатах (3.177), (3.178), (3.181) и (3.183). Область предельного равновесия идеально-связной среды 1 в обозначенном случае имеет прямоугольные границы, параллельные координатным осям. Это обстоятельство в значительной мере упрощает формулировку условий на границах области, поскольку дает основания утверждать, что вдоль них выполняются соотношения (3.177), (3.178), (3.181) и (3.183).

**3.5.1. Формулировка граничных условий.** Определим предельные значения величин удельного трения  $\tau_l$ ,  $\tau_r$ ,  $\tau_u$  и  $\tau_d$ , действующих на левой, правой, верхней и нижней границах области 1:

$$\tau_l = f_l \sigma_{xx}, \quad \tau_r = f_r \sigma_{xx}, \quad \tau_u = f_u \sigma_{yy}, \quad \tau_d = f_d \sigma_{yy}, \quad (3.197)$$

где  $f_i$  — коэффициенты внешнего трения на тех же границах,  $i \in \{l, r, u, d\}$ .

Полагаем, что трение на границах не обязательно реализуется полностью. Степень реализации  $\tau_i$ , ( $i \in \{l, r, u, d\}$ ) зависит от величины касательной компоненты  $\sigma_{xy}$  тензора напряжений, которую оно уравнивает. Таким образом, справедливы неравенства:

$$|\sigma_{xy}| \leq f_l \sigma_{xx}, \quad |\sigma_{xy}| \leq f_r \sigma_{xx}, \quad |\sigma_{xy}| \leq f_u \sigma_{yy}, \quad |\sigma_{xy}| \leq f_d \sigma_{yy}. \quad (3.198)$$

Применение знаков модуля по отношению к касательным напряжениям  $|\sigma_{xy}|$  обусловлено тем, что правая часть неравенств (3.198) в конкретных условиях рассматриваемой задачи всегда положительна, поскольку внешнее трение вдоль границ возможно только в случае сжатия, т.е. когда вдоль рассматриваемых поверхностей  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy} > 0$ .

Поскольку ограничений на величину коэффициентов внешнего трения  $f_i$ , ( $i \in \{l, r, u, d\}$ ) тут не накладываем, то в дальнейшем учитываем, что задача теперь не является осесимметричной.

Специфическими в отношении граничных условий являются верхние  $L^u$ ,  $R^u$  и нижние  $L^d$ ,  $R^d$  угловые точки области 1. Они обозначают линии пересечения взаимно перпендикулярных поверхностей, и к ним применим закон парности касательных напряжений [155,157]. С его учетом, для левой и правой верхних угловых точек  $L^u$  и  $R^u$ , а также для левой и правой нижних угловых точек  $L^d$  и  $R^d$ , соответственно, имеем:

$$\begin{aligned} |\sigma_{xy}| &\leq \min\{f_l \sigma_{xx}, f_u \sigma_{yy}\}, & |\sigma_{xy}| &\leq \min\{f_r \sigma_{xx}, f_u \sigma_{yy}\}, \\ |\sigma_{xy}| &\leq \min\{f_l \sigma_{xx}, f_d \sigma_{yy}\}, & |\sigma_{xy}| &\leq \min\{f_r \sigma_{xx}, f_d \sigma_{yy}\}. \end{aligned} \quad (3.199)$$

После подстановки (2.31) неравенства (3.198) и (3.199) дают:

$$s \geq k \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_l} - \cos 2\varphi \right), \quad s \geq k \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_r} - \cos 2\varphi \right), \quad (3.200)$$

$$s \geq k \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_u} + \cos 2\varphi \right), \quad s \geq k \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_d} + \cos 2\varphi \right), \quad (3.201)$$

$$s \geq k \max \left\{ \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_l} - \cos 2\varphi \right), \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_u} + \cos 2\varphi \right) \right\}, \quad (3.202)$$

$$s \geq k \max \left\{ \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_r} - \cos 2\varphi \right), \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_u} + \cos 2\varphi \right) \right\}, \quad (3.203)$$

$$s \geq k \max \left\{ \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_l} - \cos 2\varphi \right), \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_d} + \cos 2\varphi \right) \right\}, \quad (3.204)$$

$$s \geq k \max \left\{ \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_r} - \cos 2\varphi \right), \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f_d} + \cos 2\varphi \right) \right\}. \quad (3.205)$$

Полученные неравенства (3.200) – (3.205) являются искомыми граничными условиями для левой и правой (3.200), верхней и нижней (3.201) границ, а также в угловых точках  $L^u$  (3.202),  $R^u$  (3.203),  $L^d$  (3.204) и  $R^d$  (3.205) области предельного равновесия для текущей задачи.

Подробный анализ граничных условий (3.200 – 3.205) с применением метода графической интерпретации выполнен в работах [167, 179, 280].

3.5.2. Компоненты тензора напряжений на осях декартовых координат. Используя соотношения на абсциссе (3.178) и выражения (2.31), получаем искомые зависимости компонентов тензора напряжений от угла  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} &= k [\ln(\sin^2 \varphi) \pm \cos 2\varphi] + C_y^+, \\ \sigma_{xy} &= k \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (3.206)$$

Выполняются они вдоль линий  $y = \text{const}$ .

Решив соотношение на абсциссе  $x|_{y=\text{const}} = x(\varphi)$  (3.177) относительно угла  $\varphi$ , получим:

$$\varphi = \pm \arctg \left\{ \frac{2k}{x - C_y^*} \exp \frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k} \right\}, \quad (3.207)$$

где знаки “ $\pm$ ” согласуются с выражением (3.179), т.е. в (3.207) верхний знак используется в случае  $\varphi \in ]0, +\pi[$ , когда  $\varphi_{x_o} = +\frac{1}{2}\pi$ , а нижний – в случае  $\varphi \in ]-\pi, 0[$ , когда  $\varphi_{x_o} = -\frac{1}{2}\pi$ .

Подстановка (3.207) в (3.206) дает выполняющиеся вдоль координатных прямых, параллельных оси абсцисс ( $y = \text{const}$ ), уравнения связи компонентов тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  с координатой  $x$ . Аналитические представления этих уравнений не приводим из-за их громоздкости.

Подстановка соотношения (3.183) в выражения (2.31) дает выполняющиеся на ординатах уравнения связи  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  с углом  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} &= k \left[ \ln(\cos^2 \varphi) + (-1)^r 2\gamma \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{tg} \varphi \pm \cos 2\varphi \right] + C_x^+, \\ \sigma_{xy} &= k \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (3.208)$$

где

$$\varphi \in \left] \varphi_{x_o} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_o} + \frac{1}{2}\pi \right[ , \quad \varphi_{x_o} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (3.209)$$

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi > \varphi_{x_o}, \\ 2 & \text{при } \varphi < \varphi_{x_o}. \end{cases} \quad (3.210)$$

Решив (3.181), относительно угла  $\varphi$ , имеем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_x, & \text{если } \varphi < \varphi_{x_o} &= +\frac{1}{2}\pi, \\ \varphi &= \pi - \varphi_x, & \text{если } \varphi > \varphi_{x_o} &= +\frac{1}{2}\pi, \\ \varphi &= -\varphi_x, & \text{если } \varphi > \varphi_{x_o} &= -\frac{1}{2}\pi, \\ \varphi &= -\pi + \varphi_x, & \text{если } \varphi < \varphi_{x_o} &= -\frac{1}{2}\pi, \end{aligned} \quad (3.211)$$

где

$$\varphi_x = \operatorname{arctg} \left[ \frac{y - C_x^*}{2k} \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \right]. \quad (3.212)$$

Подстановка (3.211) в (3.208) дает выполняющиеся вдоль координатных прямых  $x = \text{const}$  уравнения связи компонентов тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  с ординатой  $y$ . Эти выражения не приводим.

**3.5.3. Интеграл внешней нагрузки, действующей вдоль поверхности уплотнения.** Поскольку выполняющееся вдоль абсциссы выражение (3.206) для вертикальной компоненты  $\sigma_{yy}$  тензора напряжений уже получено, то используя соотношение на абсциссе (3.177), можно определить интеграл внешней нагрузки  $\mathbf{P}$  (рис. 3.1):

$$I_u = \int_{R^u}^{L^u} \sigma_{yy} dx, \quad (3.213)$$

где направление интегрирования “справа-налево” определяется ориентацией оси абсцисс на рис. 3.1.

После подстановки в (3.213) выражений (3.206), (3.177) и последующего интегрирования имеем:

$$\begin{aligned} I_u &= 2k \exp \left( \frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k} \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{\ln(\sin^2 \varphi^{lu})}{\operatorname{tg} \varphi^{lu}} - \frac{\ln(\sin^2 \varphi^{ru})}{\operatorname{tg} \varphi^{ru}} + (C_y^+ + k) (\operatorname{ctg} \varphi^{lu} - \operatorname{ctg} \varphi^{ru}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.214)$$

где  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$  — значения  $\varphi$  в угловых точках  $L^u$  и  $R^u$  предельной области 1, обозначающие в данном случае пределы интегрирования для (3.213).

Чтобы исследовать выражение (3.214) интеграла  $I_u$  внешней нагрузки  $\mathbf{P}$ , прежде определимся с постоянными  $C_y^+$  и  $\tilde{C}_y$ . Первая из них ( $C_y^+$ ), исходя из (3.178), определяет интенсивность внешней нагрузки  $\mathbf{P}$ .

Положив, что  $\varphi = \varphi^{lu}$ , когда  $\varphi \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ , и  $\varphi = \varphi^{ru}$ , когда  $\varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi]$ , а затем выполнив подстановку  $s$  (3.178) в условия (3.202) и (3.203), записываем два неравенства

$$C_y^+ (\varphi^{ju}) \geq k \max \left\{ \left( \frac{|\sin(2\varphi^{ju})|}{f_j} - \cos(2\varphi^{ju}) \right), \left( \frac{|\sin(2\varphi^{ju})|}{f_u} + \cos(2\varphi^{ju}) \right) \right\} - k \ln [\sin^2(\varphi^{ju})], \quad (3.215)$$

где  $j = l, r$  — индексы, соответствующие левой и правой границам области уплотнения (рис. 3.1).

Далее, воспользовавшись выражением (3.177), определим постоянную  $\tilde{C}_y$ . Значения  $x^{lu}$  и  $x^{ru}$  абсциссы в точках  $L^u$  и  $R^u$  известны и, следовательно, могут быть использованы. Полагая, что  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$  известны также, выполним их подстановку в соотношение (3.177). В итоге имеем:

$$\begin{pmatrix} x^{lu} \\ x^{ru} \end{pmatrix} = 2k \exp \left( \frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k} \right) \operatorname{ctg} \begin{pmatrix} \varphi^{lu} \\ \varphi^{ru} \end{pmatrix} + C_y^*, \quad (3.216)$$

а затем, вычислив разность последних выражений, получаем:

$$\tilde{C}_y = \gamma y + 2k \ln \left[ \frac{2k (\operatorname{ctg} \varphi^{lu} - \operatorname{ctg} \varphi^{ru})}{\Delta x} \right], \quad (3.217)$$

где

$$\Delta x = x^{lu} - x^{ru}. \quad (3.218)$$

Подстановка  $\tilde{C}_y$  (3.217) в выражение  $I_u$  (3.214) дает:

$$I_u = \Delta x \left[ \frac{\operatorname{tg} \varphi^{ru} \ln(\sin^2 \varphi^{lu}) - \operatorname{tg} \varphi^{lu} \ln(\sin^2 \varphi^{ru})}{\operatorname{tg} \varphi^{ru} - \operatorname{tg} \varphi^{lu}} + C_y^+ + k \right]. \quad (3.219)$$

• Осесимметричный случай.

Из рис. 3.1, условий трения (3.202) и (3.203), а также соотношений (3.177)–(3.186) вытекает, что в случае когда коэффициенты трения  $f_j$ ,  $j \in \{l, r\}$  равны между собой, то задача (рис. 3.1) закономерно превращается в осесимметричную относительно  $Oy$ . Учитывая это, в дальнейшем положим, что  $f_l = f_r$ .

Теперь углы  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$  можно определить следующим образом:

$$\varphi^{lu} = \frac{1}{2}\pi - \Delta_\varphi, \quad \varphi^{ru} = \frac{1}{2}\pi + \Delta_\varphi, \quad (3.220)$$

где

$$\Delta_\varphi = \frac{1}{2}(\varphi^{ru} - \varphi^{lu}), \quad \Delta_\varphi \in \left] 0, \frac{1}{2}\pi \right[. \quad (3.221)$$



Используя определения (3.220) и (3.221), выражения (3.215), (3.217) и (3.219) приводятся к виду:

$$C_y^+(\Delta_\varphi) \geq k \max \left\{ \left( \frac{\sin(2\Delta_\varphi)}{f_j} + \cos(2\Delta_\varphi) \right), \left( \frac{\sin(2\Delta_\varphi)}{f_u} - \cos(2\Delta_\varphi) \right) \right\} - k \ln(\cos^2 \Delta_\varphi). \quad (3.222)$$

$$\tilde{C}_y(\Delta_\varphi) = \gamma y + 2k \ln \frac{4k \operatorname{tg} \Delta_\varphi}{\Delta x}. \quad (3.223)$$

$$I_u(\Delta_\varphi) = \Delta x \left[ \ln(\cos^2 \Delta_\varphi) + C_y^+ + k \right]. \quad (3.224)$$

Далее выполним подстановку  $C_y^+$  (3.222) в выражение (3.224). После формальных преобразований получаем:

$$I_u(\Delta_\varphi) = \Delta x \left\{ k \max \left[ \left( \frac{\sin(2\Delta_\varphi)}{f_j} + \cos(2\Delta_\varphi) \right), \left( \frac{\sin(2\Delta_\varphi)}{f_u} - \cos(2\Delta_\varphi) \right) \right] + (1-k) \ln(\cos^2 \Delta_\varphi) + k \right\}. \quad (3.225)$$

Чтобы получить в отношении изучаемых процессов некоторые разъяснения, в работе [167] подробно исследовано функциональную связь  $I_u = I_u(\Delta_\varphi)$  (3.225), а также влияние на нее вошедших в (3.225) сцепления  $k$  и коэффициентов трения на внешних границах  $f_j$ ,  $j \in \{l, r\}$  и  $f_u$ .

В той же работе [167] изучено, как соотносятся между собой закономерности функциональных связей интеграла внешней нагрузки  $I_u = I_u(\Delta_\varphi)$  (3.225), постоянных  $C_y^+ = C_y^+(\Delta_\varphi)$  (3.222) и  $\tilde{C}_y = \tilde{C}_y(\Delta_\varphi)$  (3.223), а также нормальной компоненты  $\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(\Delta_\varphi)$  тензора напряжений в угловых точках  $L^u$ ,  $R^u$  области уплотнения.

Для такого исследования было построено шесть рисунков — двумерных поверхностей. Первые три — для исследования величин  $I_u$ ,  $C_y^+$  и  $\sigma_{yy}$  соответственно. На них  $I_u$ ,  $C_y^+$  и  $\sigma_{yy}$  рассматриваются как функции сцепления  $k$  и  $\Delta_\varphi$ . Вторая тройка рисунков также соответствует тем же величинам  $I_u$ ,  $C_y^+$  и  $\sigma_{yy}$ , но в случае, когда в качестве аргументов рассматриваются коэффициент трения на левой или правой границе  $f_l$  или  $f_r$ , а также  $\Delta_\varphi$ . Еще один рисунок обобщает вышеупомянутые две тройки рисунков.

Наряду с прочим, было установлено. Интеграл  $I_u$  внешней нагрузки на отрезке изменения  $\Delta_\varphi \in ]0, \frac{1}{2}\pi[$  (при фиксированном значении второго аргумента  $k$  или  $f_j$ ,  $j \in \{l, r\}$ ) имеет от четырех до шести локальных экстремумов. Количество экстремумов зависит от величины сцепления  $k$  и значений коэффициентов трения на левой  $f_l$ , правой  $f_r$  и верхней  $f_u$  границах. От величины плотности среды  $\gamma$  характер  $I_u = I_u(\Delta_\varphi)$  не зависит.

Абсолютный максимум, приходящийся на окрестности  $\Delta_\varphi \rightarrow \frac{1}{2}\pi$  (где  $I_u \rightarrow \infty$ ), а также ближайший к нему локальный минимум (если он имеется), прикладного значения не имеют. Важное значение имеет локальный

минимум у левой границы области определения  $\Delta_\varphi \in ]0, \frac{1}{2}\pi[$ , где  $\Delta_\varphi \rightarrow 0$ . Тут  $\lim_{\Delta_\varphi \rightarrow 0} I_u(\Delta_\varphi)$  всегда больше нуля, если только  $k \neq 0$ . Для реальных сред, в частности почвы, последнее условие выполняется.

Поскольку  $\lim_{\Delta_\varphi \rightarrow 0} I_u(\Delta_\varphi) > 0$ , то для достижения состояния предельного равновесия необходимо какое-то минимальное усилие. Его величину можно вычислить, воспользовавшись выражением (3.225):

$$\lim_{\Delta_\varphi \rightarrow 0} I_u(\Delta_\varphi) = 2k(x^{lu} - x^{ru}). \quad (3.226)$$

Минимальному значению  $\lim_{\Delta_\varphi \rightarrow 0} I_u(\Delta_\varphi)$  (3.226) интеграла внешней нагрузки  $I_u$  (3.225) соответствует также минимальное значение

$$\lim_{\Delta_\varphi \rightarrow 0} C_y^+(\Delta_\varphi) = k(1 - \ln(1)) = k, \quad (3.227)$$

постоянной  $C_y^+$  (3.222). Это поясняется тем, что именно  $C_y^+$  определяет интенсивность внешнего воздействия и, к тому же, функциональные связи  $C_y^+$  с  $\Delta_\varphi$ , сцеплением  $k$  и коэффициентами трения  $f_j$ ,  $j \in \{l, r\}$  в качественном смысле почти полностью повторяют таковые для  $I_u$ .

Значение  $\sigma_{yy}$  в самих угловых точках  $L^u$  и  $R^u$ , когда  $\Delta_\varphi \rightarrow 0$ , также определено в работе [167]:

$$\lim_{\Delta_\varphi \rightarrow 0} \sigma_{yy}(\Delta_\varphi) = 2k. \quad (3.228)$$

Поскольку  $k \neq 0$ , то  $\lim_{\Delta_\varphi \rightarrow 0} \sigma_{yy}(\Delta_\varphi)$  всегда больше нуля.

- Двумерный случай.

В реальной ситуации, когда коэффициенты внешнего трения  $f_j$ , ( $j \in \{l, r\}$ ) на левой и правой границах области уплотнения (рис. 3.1) не равны, текущая задача не будет осесимметричной, даже если принять, что  $C_y^* = 0$ . В таком случае, исходя из анализа соотношений (3.177) – (3.186), условий трения на границах (3.202) и (3.203), а также рис. 3.1 можно сказать, что осевая симметрия будет достигаться по отношению к геометрии области уплотнения (ось  $Oy$  поделит ее пополам), но напряженное состояние в ней превратится в двухосное. В частности, несмотря на то, что  $x^{lu} = -x^{ru}$  и ось  $Oy$  проходит через центральную точку верхней границы  $L^u R^u$ , где  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  и, следовательно,  $x = 0$ , при использовании выражения (3.213) следует помнить, что имеет место неравенство:

$$\int_{\varphi^{ru}}^{\frac{1}{2}\pi} \sigma_{yy} x'(\varphi) d\varphi \neq \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi^{lu}} \sigma_{yy} x'(\varphi) d\varphi, \quad (3.229)$$

но, тем не менее, ранее полученное выражение интеграла внешней нагрузки  $I_u$  (3.214) остается справедливым.

В работе [167] показано, что в двумерном случае пределы (3.226), (3.227) и (3.228) будут достигаться также, когда

$$\varphi^{lu} = \frac{1}{2}\pi - \varepsilon, \quad \varphi^{ru} = \frac{1}{2}\pi + \varepsilon, \quad (3.230)$$

где  $\varepsilon \rightarrow 0$  — положительная бесконечно малая величина, а значит справедливо утверждение, что

$$C_y^+ \geq k. \quad (3.231)$$

3.5.4. Возможный сценарий развития процесса внешнего нагружения. Предшествующая рассматриваемой статической ситуации, которую иллюстрирует рис. 3.1, история нагружения, в принципе может быть разнообразной, сочетающей в себе периоды возрастания и убывания интенсивности внешнего воздействия. Далее остановимся только на одном варианте монотонного плавного нарастания интенсивности внешнего воздействия  $\mathbf{P}$  от нуля до некоторой фиксированной величины.

В самом начале нагружения, как только в некотором ограниченном объеме среда впервые перейдет в состояние предельного равновесия, постоянная интегрирования  $C_y^+$  определяется выражением (3.231) при строгом равенстве, а значения углов  $\varphi^{lu}$ ,  $\varphi^{ru}$  — выражениями (3.230).

Из приведенного в работе [167] анализа вытекает, что в дальнейшем рост интеграла  $I_u$  внешней нагрузки  $\mathbf{P}$ , а, значит, интенсивности последней, некоторое время сопровождается ростом постоянной интегрирования  $C_y^+$  и некоторым отклонением значений  $\varphi^{lu}$ ,  $\varphi^{ru}$  от средней величины  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  ( $\varphi^{lu}$  — в сторону уменьшения, а  $\varphi^{ru}$  — в сторону увеличения).

Так продолжается до тех пор, пока не случится одно из двух: 1) значение интеграла внешней нагрузки  $I_u$  достигнет своего первого локального максимума, в то время как интенсивность внешнего воздействия  $\mathbf{P}$  еще не достигла своего заданного значения; 2) интенсивность внешнего воздействия  $\mathbf{P}$  достигнет заданной величины прежде того, как значение интеграла внешней нагрузки  $I_u$  достигнет своего первого локального максимума.

Второй случай исчерпывающий. Он не требует дальнейших пояснений, и поэтому на нем не останавливаемся.

Первый случай сложнее, т.к. предполагает дальнейшее развитие. И так, первый локальный максимум интеграла  $I_u(C_y^+)$  достигнут при некоторых конкретных значениях постоянной  $C_y^+$  и углов  $\varphi^{lu}$ ,  $\varphi^{ru}$ .

Если дальнейший рост интенсивности внешнего воздействия будет сопровождаться ростом интервала возможных значений  $\varphi \in [\varphi^{lu}, \varphi^{ru}]$ , то это приведет к некоторому, пусть незначительному, уменьшению значения интеграла внешней нагрузки  $I_u$ , что в принципе невозможно. Ведь внешняя нагрузка  $\mathbf{P}$  уравнивается только лишь нормальными напряжениями  $\sigma_{yy}$ , возникающими в объеме среды в ответ на внешнее воздействие. Чем больше внешнее воздействие  $\mathbf{P}$ , тем больше напряжения  $\sigma_{yy}$ , действующие вдоль поверхности уплотнения  $L^u R^u$ , а, следовательно, тем больше и значение интеграла  $I_u$  (3.213).

Таким образом, пришли к противоречию. Далее, по рассмотренной выше схеме, рост внешнего нагружения развиваться не может.

В дальнейшем возможен следующий вариант. Отвечая на увеличение интенсивности  $\mathbf{P}$ , синхронно росту постоянной интегрирования  $C_y^+$ , значения углов  $\varphi^{lu}$ ,  $\varphi^{ru}$  растут не столь интенсивно, как раньше.

Эта ситуация соответствует переходу в выражениях (3.215) от равенства к неравенству. Поскольку достоверно уточнить понятие “растут не столь интенсивно” не представляется возможным, то в дальнейшем условимся, что в случае достижения значением интеграла внешней нагрузки  $I_u$  (3.213) своего первого локального максимума, дальнейшее увеличение интенсивности внешнего воздействия  $\mathbf{P}$  протекает при соответствующем росте  $I_u$ , который достигается исключительно за счет увеличения постоянной интегрирования  $C_y^+$ , т.е. при условии фиксирования значений углов  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$ .

Сознательная неточность, к которой только что прибегли, на самом деле таковой не является. Дело в том, что рассматриваемая статическая задача, не столь стационарна во времени, как того хотелось бы. Очевидно, что для корректной оценки влияния истории нагружения на конечное напряженное состояние среды, статика инструментов не дает. Ведь параллельно росту интенсивности нагружения в среде протекают и релаксационные процессы, в каждой точке объема среды сопровождающиеся устремлением значений угла  $\varphi$  к своему среднему значению  $\frac{1}{2}\pi$ . Скорость течения этих процессов неизвестна и, вероятно, не постоянна.

Можно предположить, что эти процессы не прекращаются никогда, равно, как никогда не достигается равенство  $\varphi^{lu} = \varphi^{ru} = \frac{1}{2}\pi$ . Возможно сколь угодно близкое приближение к такому равенству, но, тем не менее, строгое равенство, если среда находится в состоянии предельного равновесия, быть не может. Последнее обстоятельство представляется важным, т.к. строгое равенство  $\varphi^{lu} = \varphi^{ru} = \frac{1}{2}\pi$ , очевидно, возможно при очень малых нагрузках, когда среда еще не достигает своего предельного состояния.

Переход от неравенств  $\varphi^{lu} < \frac{1}{2}\pi$  и  $\varphi^{lu} > \frac{1}{2}\pi$  к строгому равенству  $\varphi^{lu} = \varphi^{ru} = \frac{1}{2}\pi$ , если такое возможно, будет означать, что среда из состояния предельного равновесия перешла в состояние устойчивого (допредельного или избыточного) равновесия, которое рассматриваемой тут теории предельного равновесия не подчиняется.

**3.5.5. Алгоритм численного решения задачи** Алгоритм решения задачи уплотнения идеально-связной среды в узком зазоре между двумя вертикальными стенками (рис. 3.1) [280], базируется на использовании выведенных ранее соотношений на декартовых координатах (3.177)–(3.186). Этому способствует прямолинейная ортогональная геометрия изучаемой области среды, а также согласованность ориентации декартовой системы координат  $Oxy$  с границами области предельного равновесия 1 и направлением вектора веса среды  $\gamma$ .

*Исходные данные* (табл. 3.1) приводим в безразмерных единицах

- 1) Интеграл  $I_u$  внешней нагрузки предполагается известным.
- 2) Геометрия области уплотнения 1 задается четырьмя угловыми точками: верхними —  $L^u, R^u$ ; нижними  $L^d, R^d$ . Их координаты соответственно:  $(x^{lu}, y^{lu}), (x^{ru}, y^{ru})$  и  $(x^{ld}, y^{ld}), (x^{rd}, y^{rd})$ . Поскольку область уплотнения прямоугольная, а ее стороны попарно параллельны осям системы координат  $Oxy$ , то  $x^{lu} = x^{ld}, x^{ru} = x^{rd}$ , а  $y^{lu} = y^{ru}, y^{ld} = y^{rd}$ .

Таблица 3.1

**Исходные данные к задаче об уплотнении  
идеально-вязкой среды в узком вертикальном зазоре**

$I_u$	$x^{lu},$ $x^{ld}$	$x^{ru},$ $x^{rd}$	$y^{lu},$ $y^{ru}$	$y^{ld},$ $y^{rd}$	$k$	$\gamma$	$f_l$	$f_r$	$f_u$	$f_d$
18,0	1,6	-1,6	0,0	50,0	1,0	0,0; 0,08; 0,1; 0,5; 1,0; 10,0	0,4	0,2	0,3	0,4

3) Физико-механические свойства идеально-вязкой среды заданы ее коэффициентом сцепления  $k$  и удельным весом  $\gamma$ .

4) Граничные условия задачи регламентируются коэффициентами внешнего трения —  $f_l$ ,  $f_r$ ,  $f_u$  и  $f_d$  соответственно на левой, правой, верхней и нижней границах области уплотнения.

*Что следует получить в результате решения задачи.*

1) Значения постоянных интегрирования:

а)  $C_y^*$  — для соотношения (3.177);  $\tilde{C}_y$  — для соотношений (3.177) и (3.178); а также  $C^v$  (с учетом суммы (3.180)) и  $C_y^+$  — для (3.178). Соотношения (3.177) и (3.178), с учетом конкретных значений постоянных  $C_y^*$ ,  $\tilde{C}_y$  и  $C_y^+$ , выполняются вдоль абсциссы, которой является линия действия внешней нагрузки  $\mathbf{P}$ , а постоянная  $C^v$  входит в соотношение (3.182) и опосредовано, т.е. в составе суммы (3.186) — в соотношение на ординате (3.183), которые выполняются вдоль каждой из ординат, включая левую и правую границы области уплотнения;

б)  $C_x^*$  — для соотношения (3.181) и опосредовано, т.е. в составе суммы (3.186) — для соотношения (3.183);  $\tilde{C}_x$  — для соотношений (3.181), (3.182) и (3.183), а также  $C_x^+$  — для (3.183). Два последних соотношения (3.182) и (3.183) предполагают также использование уже упоминавшейся постоянной  $C^v$ . Поскольку соотношения на ординатах (3.181)–(3.183) выполняются на обеих вертикальных границах  $L^u L^d$  и  $R^u R^d$  предельной области 1, то коэффициенты  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$  и  $C_x^+$  следует определить дважды, отдельно для каждой из границ, т.е.:  $C_x^*|_{L^u L^d}$ ,  $\tilde{C}_x|_{L^u L^d}$  и  $C_x^+|_{L^u L^d}$  — для левой границы;  $C_x^*|_{R^u R^d}$ ,  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$  и  $C_x^+|_{R^u R^d}$  — для правой границы.

2) Ординаты  $y^l$  и  $y^r$  двух точек  $L$  и  $R$ , по одной на левой  $L^u L^d$  и правой  $R^u R^d$  границах области уплотнения 1 идеально-вязкой среды, обозначающих удаление по ординате от линии действия внешней нагрузки до граничной линии, через которую: а) состояние предельного равновесия еще не распространилось и распространяться не будет ввиду малости величины внешней нагрузки; б) предельное равновесие распространится с течением времени в ходе эволюции напряженного состояния.

Поскольку ситуация, распространится или нет предельное состояние на всю область  $L^u R^u R^d L^d$ , зависит от величины внешней нагрузки, то, вероятно, при определенных условиях точки  $L$  и  $R$  совпадут с точками  $L^d$  и

$R^d$ , обозначающими физический край этой области. Возможен и другой вариант — в случае незначительной внешней нагрузки, когда точки  $L$  и  $R$  совпадут с крайними точками верхней границы  $L^u R^u$  или когда обе эти точки  $L$  и  $R$  разместятся на линии  $L^u R^u$  действия внешних сил  $\mathbf{P}$ , причем внутри отрезка  $L^u R^u$ . Далее ограничимся только такой ситуацией, когда уровень внешнего нагружения (величина  $I_u$ ) таков, что обе точки  $L$  и  $R$  располагаются соответственно на левой  $L^u L^d$  и правой  $R^u R^d$  границах области уплотнения, включая сами угловые точки  $L^u, L^d$  и/или  $R^u, R^d$ .

Развитие напряженного состояния в ходе своей эволюции в первый рассматриваемый алгоритм не закладываем, а лишь прокомментируем, опираясь на полученные решения. Однако, позже рассмотрим другой алгоритм, который учитывает и вопрос эволюции.

Ограничения предыдущего параграфа вводим с целью упрощения рассматриваемого далее алгоритма решения поставленной задачи. В таком случае, абсциссы  $x^l$  и  $x^r$  точек  $L$  и  $R$  становятся известными изначально:  $x^l = x^{lu} = x^{ld}$  и  $x^r = x^{ru} = x^{rd}$ . Следовательно, для идентификации положения точек  $L$  и  $R$  остается определить только ординаты  $y^l$  и  $y^r$ .

3) Полусумму главных напряжений  $s \in \{s|_{L^u}, s|_{R^u}, s|_L, s|_R\}$  и значение угла  $\varphi \in \{\varphi^{lu}, \varphi^{ru}, \varphi^l, \varphi^r\}$  соответственно в точках  $L^u, R^u, L$  и  $R$ . Знание указанных величин сделает определенными все компоненты тензора напряжений в упомянутых точках.

*Пример алгоритма решения* (рис. 3.4–3.8).

В начале скажем, что рассматриваемый ниже алгоритм решения задачи реализован в среде Visual C++ 6.0 [281, 282] в виде 32-разрядного приложения для операционных систем Windows 9x/NT/XP [283].

Совсем коротко структуру рассматриваемого алгоритма можно описать следующим образом. Основная программа (рис. 3.4) последовательно выполняет следующее: ввод начальных значений исходных данных и служебных переменных (блоки операторов 1 и 2); последовательный вызов трех подпрограмм *FindIntegralExtremum* (оператор 3), *ComparisonIntegrals* (оператор 4) и *AccountParameters* (оператор 5); вывод на печать, файл или передачу в другие программы расчетных величин, перечисленных в теле блока операторов 6, и ранее в тексте текущей подглавы под заголовком “Что следует получить в результате решения задачи”.

Первая подпрограмма *FindIntegralExtremum* (рис. 3.5) предполагает рассмотрение интеграла внешней нагрузки  $I_u = I_u(C_y^+)$  как функции от постоянной интегрирования  $C_y^+$  и выполняет поиск такого значения постоянной интегрирования  $C_y^+$  и соответствующих значений углов  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$ , при которых вычисленное по (3.219) значение интеграла внешней нагрузки достигает своего первого локального максимума. Это значение интеграла  $I_u$  и отвечающие ему значения величин  $C_y^+, \varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$  в дальнейшем использует подпрограмма *ComparisonIntegrals* (рис. 3.6).

В зависимости от того, как соотносятся между собой экстремальное и заданное значения интеграла  $I_u$ , подпрограмма *ComparisonIntegrals*, в соответствии с выкладками п. 3.5.4, направляет вычислительный процесс

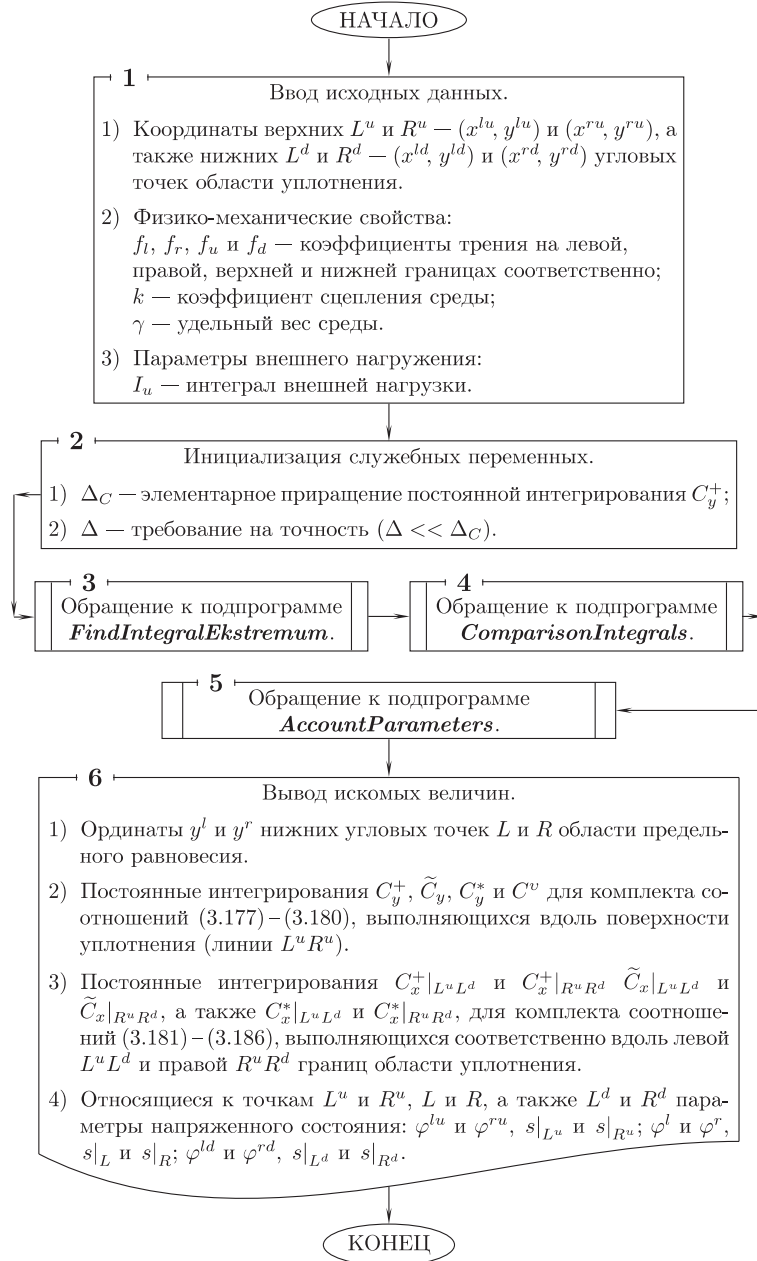


Рис. 3.4. Алгоритм решения задачи уплотнения идеально-вязкой среды в узком вертикальном зазоре

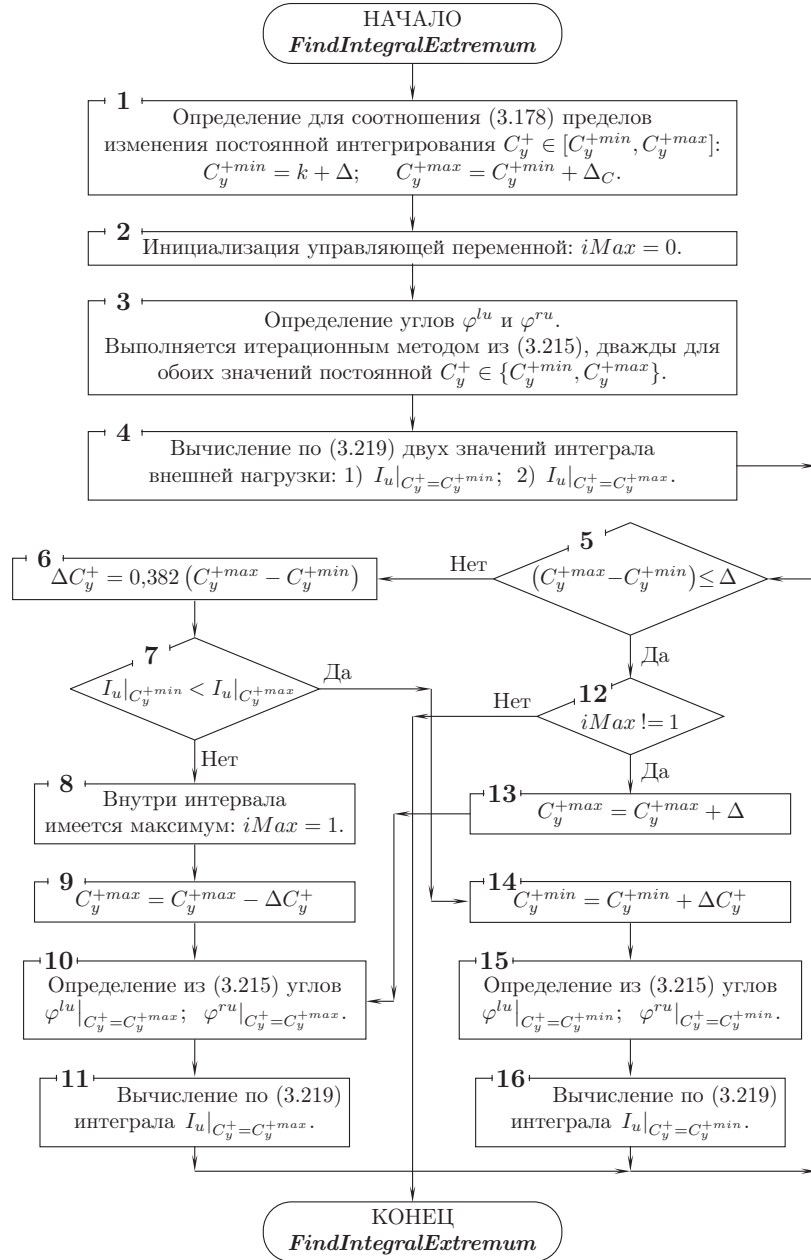


Рис. 3.5. Алгоритм подпрограммы *FindIntegralExtremum*, выполняющей поиск первого локального максимума интеграла внешней нагрузки  $I_u = I_u(C_y^+)$ , как функции от постоянной интегрирования  $C_y^+$



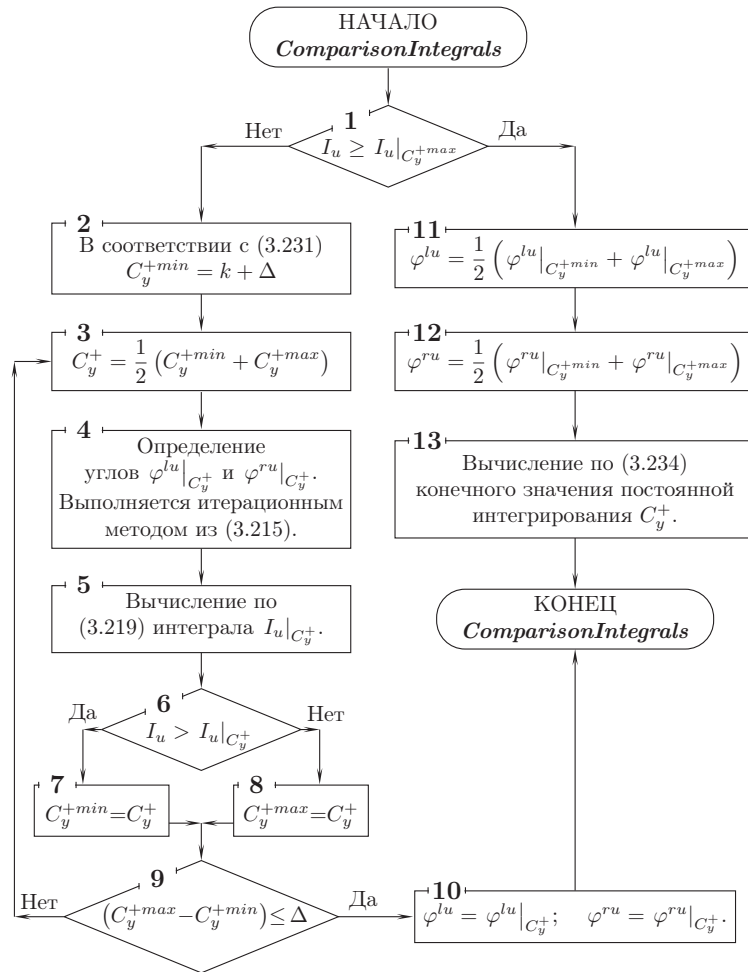


Рис. 3.6. Алгоритм подпрограммы *ComparisonIntegrals*, выполняющей для решения задачи уплотнения идеально-связной среды в узком вертикальном зазоре поиск параметров, обеспечивающих равенство заданного значения интеграла внешней нагрузки  $I_u$  и вычисленного, когда положение первого локального максимума интеграла  $I_u = I_u(C_y^+)$  уже известно

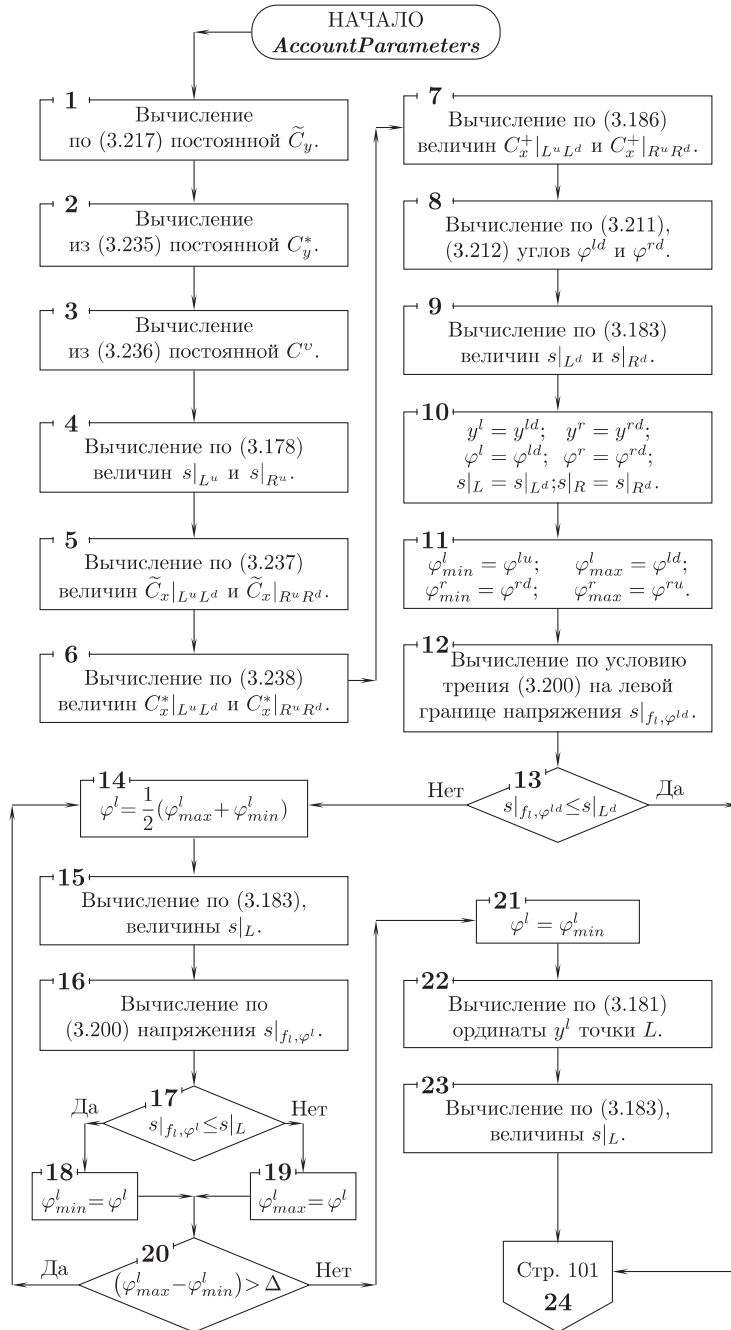


Рис. 3.7. Фрагмент алгоритма подпрограммы *AccountParameters*, выполняющей расчет искомых величин (начало)

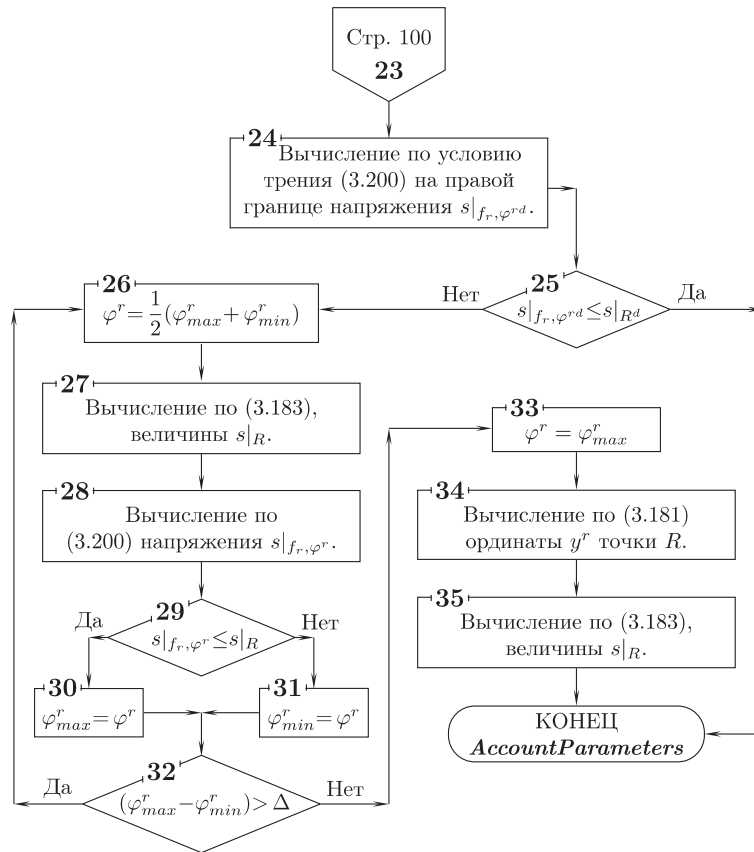


Рис. 3.8. Фрагмент алгоритма подпрограммы *AccountParameters*, выполняющей расчет искомых величин (окончание)

по одному или другому алгоритму. В том и другом случае подпрограмма *ComparisonIntegrals* выполняет поиск такого значения  $C_y^+$  и соответствующих ему значений углов  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$ , при которых вычисленное по (3.219) значение интеграла внешней нагрузки соответствует заданному  $I_u$ .

Далее подпрограмма *AccountParameters* (рис. 3.7, 3.8), в соответствии с уже найденным значением постоянной интегрирования  $C_y^+$  и отвечающими ему значениями углов  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$ , вычисляет все величины, перечисленные выше под заголовком “Что следует получить в результате решения задачи”. В частности, определяется, насколько глубоко вниз распространилось состояние предельного равновесия, т.е. имеются или нет точки  $L$  и  $R$ . Если предельное состояние распространяется не на всю глубину, а значит точки  $L$  и  $R$  имеются, то параметры напряженного состояния вычисляются, в том числе, и для этих точек.

Рассмотрим подробнее алгоритм (рис. 3.4–3.8).

Начинается он с блока операторов 1 основной программы (рис. 3.5), обеспечивающих корректный и удобный ввод исходных данных задачи. В рассматриваемой системе это реализовано через использование “меню” и “диалогов” путем применения пакета программ Win32 API [284].

Подобным образом выполняется инициализация служебных переменных  $\Delta_C$  и  $\Delta$  (оператор 2), первая из которых задает элементарное приращение в цикле постоянной интегрирования  $C_y^+$ , а вторая — требование на точность вычислений, по достижению которой итерации прекращаются.

Для того, чтобы в цикле состоялась хотя бы один проход, необходимо выполнение условия, когда значение  $\Delta_C$  в обязательном порядке превышает  $\Delta$ . Приемлемая точность работы рассматриваемого алгоритма достигается только в случае, когда  $\Delta$  на несколько порядков меньше  $\Delta_C$ .

Далее вызывается подпрограмма **FindIntegralExtremum** (рис. 3.5). Ее первый оператор определяет начальные границы интервала  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  изменения постоянной интегрирования  $C_y^+$ . Так, минимальное значение  $C_y^{+min}$  определяется как сумма  $C_y^{+min} = k + \Delta$ . В соответствии с условием (3.231), величина  $C_y^{+min}$  должна равняться связности  $k$ . Прибавление конечной малой величины  $\Delta$  в дальнейшем обеспечивает неравенство  $\varphi^{lu} \neq \varphi^{ru} \neq \frac{1}{2}\pi$  и тем самым исключает из рассмотрения этот предельный случай. Верхняя граница  $C_y^{+max} = C_y^{+min} + \Delta_C$  определяется практически произвольно. Но при этом следует знать, чем больше  $\Delta_C$ , тем больше риск пропустить искомый первый максимум  $I_u(C_y^+)$ . Слишком малое значение элементарного приращения  $\Delta_C$  неизбежно приводит к замедлению вычислительного процесса. Поэтому подходящую величину  $\Delta_C$  следует определять и определяли путем пробных просчетов программы.

Как уже говорилось, подпрограмма **FindIntegralExtremum** (рис. 3.5) предназначена для поиска первого локального максимума интеграла внешней нагрузки  $I_u(C_y^+)$  как функции от постоянной интегрирования  $C_y^+$ . При этом не анализируется, как соотносятся между собой заданное  $I_u$  и вычисленное  $I_u|_{C_y^+}$  значения интеграла внешней нагрузки.

Выполняется такая подзадача способом “скольжения”. Сначала интервал  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  сужается путем смещения левой границы к правой  $C_y^{+min} \rightarrow C_y^{+max}$ , а затем правая граница  $C_y^{+max}$  отодвигается в сторону увеличения на величину  $\Delta_C$ . Так продолжается до тех пор, пока первый экстремум  $I_u(C_y^+)$  окажется внутри текущего интервала  $C_y^+ \in [C_y^{+min}, C_y^{+max}]$ . На этом этап “скольжения” интервала заканчивается, после чего он сужается до заданной величины, причем так, чтобы экстремум  $I_u(C_y^+)$  оставался внутри него. Далее положение максимума приписывается правой границе интервала  $C_y^+ = C_y^{+max}$ . В таком случае значением интеграла  $I_u(C_y^+)$  в точке максимума будет  $I_u|_{C_y^{+max}}$ .

Чтобы обозначить попадание первого локального максимума  $I_u(C_y^+)$  в интервал  $C_y^+ \in [C_y^{+min}, C_y^{+max}]$ , подпрограммой **FindIntegralExtremum** используется служебная переменная *iMax*. Смысл ее такой: если *iMax* = 0

— внутри интервала  $C_y^+ \in [C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  локального максимума нет; если  $iMax = 1$  — внутри упомянутого интервала имеется максимум. Обнуляется служебная переменная  $iMax$  оператором 2.

За ним (оператор 3) итерационным методом, из выражения (3.215) в случае строгого равенства, дважды для обоих значений постоянной  $C_y^+ \in \{C_y^{+min}, C_y^{+max}\}$  определяются углы  $\varphi^{lu} \in \{\varphi^{lu}|_{C_y^+=C_y^{+min}}, \varphi^{lu}|_{C_y^+=C_y^{+max}}\}$  и  $\varphi^{ru} \in \{\varphi^{ru}|_{C_y^+=C_y^{+min}}, \varphi^{ru}|_{C_y^+=C_y^{+max}}\}$ .

Далее (оператор 4) также дважды для обоих значений  $C_y^+ \in \{C_y^{+min}, C_y^{+max}\}$  по формуле (3.219) вычисляются значения интеграла внешней нагрузки:  $I_u|_{C_y^+=C_y^{+min}} = I_u|_{C_y^+=C_y^{+min}}$  и  $I_u|_{C_y^+=C_y^{+max}} = I_u|_{C_y^+=C_y^{+max}}$ .

Затем (оператор условного перехода 5) проверяется, достигнута ли заданная точность итераций. Если это первый проход, поскольку по определению  $\Delta \ll \Delta_C$ , дальнейший переход осуществляется в направлении “Нет”, т.е. на оператор 6. Сюда же направляется ход выполнения программы и все последующие разы, исключая последний проход, когда впервые выполняется неравенство  $(C_y^{+max} - C_y^{+min}) \leq \Delta$ .

Оператор 6, в соответствии с методом “золотого сечения” [285, 286], определяет величину смещения  $\Delta C_y^+$  одной из границ интервала  $C_y^+ \in [C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  в сторону его уменьшения.

Какая из границ смещается, выясняется выполнением оператора 7. Тут используется монотонность функциональной связи  $I_u = I_u(C_y^+)$ , когда большему значению постоянной  $C_y^+$  соответствует большее вычисленное значение интеграла внешней нагрузки  $I_u$ . По достижению максимума монотонность нарушается. Если  $I_u|_{C_y^+=C_y^{+min}} < I_u|_{C_y^+=C_y^{+max}}$ , то с оператора 7 выполняется переход в направлении “Да”, т.е. на оператор 14, выполнением которого путем увеличения нижней границы корректируется интервал  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$ . Таким образом, он сужается на величину  $\Delta C_y^+$ .

После этого, подобно операторам 3 и 4, вычисляются значения углов  $\varphi^{lu}|_{C_y^+=C_y^{+min}}$ ,  $\varphi^{ru}|_{C_y^+=C_y^{+min}}$  (оператор 15) и значение интеграла внешней нагрузки  $I_u|_{C_y^+=C_y^{+min}}$  (оператор 16). Значения углов  $\varphi^{lu}|_{C_y^+=C_y^{+max}}$ ,  $\varphi^{ru}|_{C_y^+=C_y^{+max}}$  и интеграла  $I_u|_{C_y^+=C_y^{+max}}$  при этом остаются прежними, ибо прежней остается величина  $C_y^{+max}$ .

Дальше вычислительный процесс закликивается и снова направляется на оператор 5, после чего цепочка переходов  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 16 \rightarrow 5$  повторяется еще и еще. С каждым таким проходом ширина интервала  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  уменьшается на величину  $\Delta C_y^+ = 0,382 (C_y^{+max} - C_y^{+min})$  и вычисляются новые значения  $\varphi^{lu}|_{C_y^+=C_y^{+min}}$ ,  $\varphi^{ru}|_{C_y^+=C_y^{+min}}$  и  $I_u|_{C_y^+=C_y^{+min}}$ .

Так происходит до тех пор, пока при выполнении оператора 5 выяснится, что достигнута требуемая точность, или, что то же, заданная минимальная ширина интервала  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$ . В таком случае с оператора 5 выполняется переход в направлении “Да” (на оператор 12), и затем, поскольку  $iMax \neq 1$  — на оператор 13, выполнением которого нижняя граница интервала  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  остается прежней, а верхняя смещается в сторону

увеличения, в надежде, что за следующим проходом локальный максимум  $I_u(C_y^+)$  таки окажется внутри интервала  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$ .

В этом, собственно, и состоит суть метода “скольжения”, когда последовательно по завершению каждой итерации интервал  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  смещается в сторону увеличения значений до тех пор, пока локальный максимум  $I_u(C_y^+)$  не окажется заключенным внутри него.

Теперь последовательно выполняются операторы 10, 11, а значит вычисляются новые значения углов  $\varphi^{lu}|_{C_y^+=C_y^{+max}}$ ,  $\varphi^{ru}|_{C_y^+=C_y^{+max}}$  и интеграла  $I_u|_{C_y^+=C_y^{+max}}$ . После этого снова многократно повторяется цепочка операторов  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 16 \rightarrow 5$ .

Так продолжается до тех пор, пока при выполнении оператора 7 выяснится, что участок монотонного возрастания интеграла внешней нагрузки  $I_u(C_y^+)$ , вычисляемого по (3.219) и рассматриваемого как функция  $C_y^+$ , пройден, т.е. на самом деле  $I_u|_{C_y^{+min}} \geq I_u|_{C_y^{+max}}$ , а, значит, внутри текущего интервала  $C_y^+ \in [C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  имеется локальный максимум.

Если это случилось, то с оператора 7 выполняется переход в направлении “Нет”, т.е. на оператор 8, где управляющей переменной  $iMax$  присваивается единица, и далее на оператор 9, выполнением которого понижается верхняя граница интервала  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$ . Все это указывает на наличие в нем максимума. Далее итерации выполняются по цепочкам  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 5$  или  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 16 \rightarrow 5$  до тех пор, пока ширина интервала  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  уменьшится до ничтожно малой величины  $\Delta$  и вычислительный процесс направится на оператор 12.

Поскольку сейчас  $iMax = 1$ , то с оператора 12 выполнится переход в направлении “Нет”, т.е. на выход из подпрограммы **FindIntegralExtremum**.

Далее, в соответствии с оператором 4 (рис. 3.4), вызывается подпрограмма **ComparisonIntegrals** (рис. 3.6).

С этого момента первый локальный максимум  $I_u(C_y^+)$  становится локализованным внутри ничтожно малого (не превышающего  $\Delta$ ) интервала  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$  значений постоянной интегрирования  $C_y^+$ . Пренебрегая погрешностями метода, припишем положение максимума границе интервала  $C_y^+ = C_y^{+max}$ , тогда значением  $I_u(C_y^+)$  в точке максимума будет  $I_u|_{C_y^{+max}}$ .

Оператор условного перехода 1 подпрограммы **ComparisonIntegrals** выполняет сравнение расчетного экстремального значения интеграла внешней нагрузки  $I_u|_{C_y^{+max}}$  с заданным  $I_u$ . Если заданное значение интеграла превышает или равно экстремальному, то величины  $\varphi^{lu}$ ,  $\varphi^{ru}$  вычисляются как средние арифметические

$$\varphi^{lu} = \frac{1}{2} \left( \varphi^{lu}|_{C_y^{+min}} + \varphi^{lu}|_{C_y^{+max}} \right) \quad (3.232)$$

$$\varphi^{ru} = \frac{1}{2} \left( \varphi^{ru}|_{C_y^{+min}} + \varphi^{ru}|_{C_y^{+max}} \right), \quad (3.233)$$

где  $\varphi^{lu}|_{C_y^{+min}}$ ,  $\varphi^{lu}|_{C_y^{+max}}$  и  $\varphi^{ru}|_{C_y^{+min}}$ ,  $\varphi^{ru}|_{C_y^{+max}}$  — рассчитанные значения  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$ , соответствующие границам интервала  $[C_y^{+min}, C_y^{+max}]$ .

В дальнейшем углы  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$  фиксируются и уже не изменяются, а значение постоянной интегрирования  $C_y^+$  уточняется

$$C_y^+ = \frac{I_u}{\Delta x} - \frac{\operatorname{tg} \varphi^{ru} \ln(\sin^2 \varphi^{lu}) - \operatorname{tg} \varphi^{lu} \ln(\sin^2 \varphi^{ru})}{\operatorname{tg} \varphi^{ru} - \operatorname{tg} \varphi^{lu}} - k. \quad (3.234)$$

Формула (3.234) является решением выражения (3.219) относительно  $C_y^+$ . Полученное из нее значение  $C_y^+$  считается окончательным. На этом выполнение подпрограммы **ComparisonIntegrals** заканчивается, и управление передается на оператор 5 основной программы (рис. 3.4), который вызывает следующую подпрограмму **AccountParameters** (рис. 3.7, 3.8).

Если же при выполнении оператора условного перехода 1 подпрограммы **ComparisonIntegrals** выяснится, что заданное значение  $I_u$  интеграла внешней нагрузки меньше экстремального  $I_u|_{C_y^+ \max}$ , то сразу же выполняется блок операторов 2–10, реализующий метод деления отрезка пополам [287, 288]. В ходе его выполнения начальный интервал  $C_y^+ \in [C_y^{+min} = k + \Delta, C_y^{+max}]$  сужается до ничтожно малой величины  $\Delta$ . Тем не менее, он всегда содержит такое значение  $C_y^+$ , которому соответствует заданное значение интеграла  $I_u$ . Пренебрегая погрешностями метода, после того как утвердительно сработает оператор условного перехода 9, текущее значение  $C_y^+$  и соответствующие ему значения  $\varphi^{lu}|_{C_y^+}$ ,  $\varphi^{ru}|_{C_y^+}$  углов  $\varphi^{lu}$ ,  $\varphi^{ru}$  фиксируются  $\varphi^{lu} = \varphi^{lu}|_{C_y^+}$ ,  $\varphi^{ru} = \varphi^{ru}|_{C_y^+}$  и в дальнейшем считаются найденными. На этом выполнение подпрограммы **ComparisonIntegrals** заканчивается, а управление передается на оператор 5 основной программы (рис. 3.4), который, как уже говорилось выше, передает управление на следующую подпрограмму **AccountParameters** (рис. 3.7, 3.8).

Окончательное значение постоянной  $C_y^+$  необходимо для соотношений (3.177)–(3.180), которые выполняются вдоль линии  $L^u R^u$  действия внешней силовой нагрузки **P**. Остаются неопределенными постоянные  $\tilde{C}_y$ ,  $C_y^*$  и  $C^v$ . Вычислению их значений посвящены три первых оператора подпрограммы **AccountParameters**, которые последовательно реализуют выражение (3.217) и две последующие формулы:

$$C_y^* = \begin{pmatrix} x^{lu} \\ x^{ru} \end{pmatrix} - 2k \exp\left(\frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k}\right) \operatorname{ctg}\left(\begin{pmatrix} \varphi^{lu} \\ \varphi^{ru} \end{pmatrix}\right) \quad (3.235)$$

$$C^v = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{C_y^+ - \tilde{C}_y}{2k}\right), \quad (3.236)$$

которые получены непосредственно из (3.216) и (3.180) путем решения относительно неизвестных постоянных  $C_y^*$  и  $C^v$  соответственно.

С этого момента ситуация вдоль линии  $L^u R^u$  внешнего нагружения становится полностью определенной и можно вычислить значения  $s|_{L^u}$  и  $s|_{R^u}$  полусуммы главных напряжений  $s$  в обеих угловых точках  $L^u$  и  $R^u$  (оператор 4), тем более, что значения  $s \in \{s|_{L^u}, s|_{R^u}\}$ , равно как и  $\varphi \in \{\varphi^{lu}, \varphi^{ru}\}$ , в дальнейшем необходимы:

во-первых, для расчетов постоянных  $\tilde{C}_x \in \{\tilde{C}_x|_{L^u L^d}, \tilde{C}_x|_{R^u R^d}\}$  (выполняется путем решения соотношения (3.182) относительно постоянной  $\tilde{C}_x$  и соответствует оператору 5)

$$\tilde{C}_x = s - k \ln(\cos^2 \varphi) - \gamma y - k \ln(2(C^v)^2), \quad (3.237)$$

где  $y = y^u$  — известная по условию ордината точек  $L^u$  и  $R^u$ , а  $C^v$  — ранее уже определена выражением (3.236) (оператор 3);

во-вторых, для расчетов постоянных  $C_x^* \in \{C_x^*|_{L^u L^d}, C_x^*|_{R^u R^d}\}$  (выполняется путем решения соотношения (3.181) относительно постоянной  $C_x^*$  и соответствует оператору 6)

$$C_x^* = y - (-1)^r 2k \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{tg} \varphi, \quad r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi = \varphi^{ru}, \\ 2 & \text{при } \varphi = \varphi^{lu}, \end{cases} \quad (3.238)$$

где  $y = y^u$ ;  $\tilde{C}_x \in \{\tilde{C}_x|_{L^u L^d}, \tilde{C}_x|_{R^u R^d}\}$ ;

в-третьих, для расчетов постоянных  $C_x^+ \in \{C_x^+|_{L^u L^d}, C_x^+|_{R^u R^d}\}$ , в соответствии с выражением (3.186) (оператор 7) (рис. 3.7), при уже известных значениях  $C^v$ ,  $\tilde{C}_x \in \{\tilde{C}_x|_{L^u L^d}, \tilde{C}_x|_{R^u R^d}\}$  и  $C_x^* \in \{C_x^*|_{L^u L^d}, C_x^*|_{R^u R^d}\}$ .

С этого момента становится определенной ситуация вдоль обеих боковых стенок  $L^u L^d$  и  $R^u R^d$  области уплотнения. Ведь для выполняющихся вдоль них соотношений (3.183)–(3.186) определены все постоянные (два набора по количеству стенок).

Далее (оператор 8), поскольку ординаты  $y^{ld}$ ,  $y^{rd}$  нижних угловых точек  $L^d$ ,  $R^d$  известны по условию задачи, имеется прямая возможность, применив выражения (3.211) и (3.212), определить значения углов  $\varphi^{ld}$ ,  $\varphi^{rd}$ .

Операторы 9 и 10 выполняются из предположений, что точки  $L$  и  $R$  совпадают с точками  $L^d$  и  $R^d$ . Именно по этой причине при вычислении по формуле (3.183) значений  $s|_{L^d}$  и  $s|_{R^d}$  полусуммы главных напряжений  $s$  в обеих угловых точках  $L^d$  и  $R^d$  (оператор 9), такие же значения присваиваются и переменным  $s|_L$  и  $s|_R$ , соответственно относящимся к точкам  $L$  и  $R$  (оператор 10). То же касается и ординат  $y^l = y^{ld}$  и  $y^r = y^{rd}$ , а также углов  $\varphi^l = \varphi^{ld}$  и  $\varphi^r = \varphi^{rd}$  (оператор 10).

Если в дальнейшем окажется, что точки  $L$  и/или  $R$  не совпадают с соответствующими нижними угловыми точками  $L^d$  и/или  $R^d$ , то все значения величин  $s|_L$ ,  $y^l$ ,  $\varphi^l$  и  $s|_R$ ,  $y^r$ ,  $\varphi^r$  в процессе выполнения операторов 12–23 (рис. 3.7) и 24–35 (рис. 3.8) будут скорректированы.

Пока можно сказать точно, что

$$\varphi^l \in [\varphi_{min}^l, \varphi_{max}^l], \quad (3.239)$$

где  $\varphi_{min}^l = \varphi^{lu}$ ,  $\varphi_{max}^l = \varphi^{ld}$ , а

$$\varphi^r \in [\varphi_{min}^r, \varphi_{max}^r], \quad (3.240)$$

где  $\varphi_{min}^r = \varphi^{rd}$ ,  $\varphi_{max}^r = \varphi^{ru}$ . Эти присвоения выполняет оператор 11.



Далее рассмотрим блок операторов 12–23 (рис. 3.7). Основная задача, которую этот блок выполняет, — поиск истинного положения точки  $L$ . Пока мы предполагаем, что она совпадает с угловой точкой  $L^d$ .

Условия предельного равновесия в окрестностях стенки  $L^u L^d$  выполняются только до тех пор, пока вдоль этой стенки выполняется граничные условия (3.200). Таким образом,  $L$  можно интерпретировать как точку перехода среды из состояния предельного равновесия в иное состояние, вероятно не подчиняющееся изучаемым тут законам предельного равновесия.

Обозначим  $s|_{f_i, \varphi^{ld}}$  значение полусуммы главных нормальных напряжений  $s$ , соответствующее случаю строгого равенства в левом выражении (3.200), когда  $\varphi = \varphi^{ld}$ . Значение  $s|_{f_i, \varphi^{ld}}$  вычисляет оператор 12. Если окажется (оператор 13), что  $s|_{f_i, \varphi^{ld}}$  меньше или равно  $s|_{L^d}$ , то это означает, что по всей длине левой боковой стенки  $L^u L^d$  граничное условие (3.200) выполняется, а, значит, точка  $L$  действительно совпадает с  $L^d$ .

В случае, когда  $s|_{f_i, \varphi^{ld}} > s|_{L^d}$ , то оператором 13 вычислительный процесс направляется в цикл 14–20, который, используя начальный интервал  $[\varphi_{min}^l, \varphi_{max}^l]$  возможных значений угла  $\varphi^l$ , методом деления отрезка пополам [287, 288] находит такое значение угла  $\varphi^l$ , при котором напряжение  $s|_{f_i, \varphi^l}$ , вычисленное в соответствии с левым выражением (3.200), в случае строгого равенства, когда  $\varphi = \varphi^l$  (оператор 16), со скидкой на погрешность метода равно значению  $s|_L$ , вычисленному из соотношения (3.183) при том же значении угла  $\varphi = \varphi^l$  (оператор 15). Чтобы в дальнейшем гарантировать, что  $s|_{f_i, \varphi^l} \leq s|_L$ , в конечном итоге, по выходу из цикла 14–20, оператором 21 выполняется присвоение  $\varphi^l = \varphi_{min}^l$ . Далее, используя новое значение угла  $\varphi^l$ , операторами 22 и 23 определяются ордината  $y^l$  точки  $L$  и полусумма главных нормальных напряжений  $s|_L$  в этой точке.

Блок операторов 24–35 (рис. 3.8) аналогичен ранее рассмотренному блоку 12–23 (рис. 3.7). Он относится к правой границе  $R^u R^d$  области уплотнения и посвящен поиску положения точки  $R$ . В связи с этим:  $s|_{f_r, \varphi^{rd}}$  — значение полусуммы главных нормальных напряжений  $s$ , соответствующее случаю строгого равенства в правом выражении (3.200), когда  $\varphi = \varphi^{rd}$ , а  $s|_{f_r, \varphi^r}$  — то же, но в случае, когда  $\varphi = \varphi^r \in [\varphi_{min}^r, \varphi_{max}^r]$ . Принципиальные отличия двух блоков операторов 12–23 (рис. 3.7) и 24–35 (рис. 3.8) ограничиваются тремя операторами 18, 19, 21 из первого блока и тремя соответствующими операторами 30, 31, 33 из второго. Эти отличия связаны с тем, что в первом случае при переходе от точки  $L^u$  к точке  $L^d$  угол  $\varphi \in [\varphi^{lu}, \varphi^{ld}]$  возрастает, а во втором случае при таком же переходе от  $R^u$  к  $R^d$  угол  $\varphi \in [\varphi^{ru}, \varphi^{rd}]$  убывает.

На этом алгоритм (рис. 3.4–3.8) заканчивается. Результаты расчетов, полученных путем программной его реализации, приведены в табл. 3.2.

3.5.6. Оценка алгоритма на адекватность. В соответствии с результатами расчетов (табл. 3.2) и начальными данными (табл. 3.1) построены графики рис. 3.9. Используем их для анализа приведенного выше алгоритма (рис. 3.4–3.8) с позиций его адекватности.

Таблица 3.2

**Расчетные значения некоторых параметров для угловых точек  
и граничных линий области предельного равновесия**

Точки	Физико-механические параметры			Границы	Постоянные интегрирования ( $i \in \{x, y\}$ )			
	$\varphi$	$s$	$y$		$C^v$	$C_i^+$	$\tilde{C}_i$	$C_i^*$
$\gamma = 0,00$								
$L^u$	0,61	4,40	0,00	Верхняя $i = y$	9,49	5,52	0,32	-0,84
$R^u$	1,99	5,33	0,00	Левая $i = x$	9,49	4,80	-0,39	-1,70
$L$	1,30	2,13	7,21	Правая $i = x$	9,49	7,12	1,92	-1,70
$R$	1,64	1,63	10,12					
$\gamma = 0,05$								
$L^u$	0,61	4,40	0,00	Верхняя $i = y$	9,49	5,52	0,32	-0,84
$R^u$	1,99	5,33	0,00	Левая $i = x$	9,49	4,71	-0,39	-1,70
$L$	1,43	1,67	15,17	Правая $i = x$	9,49	7,03	1,92	-1,70
$R$	1,60	1,30	23,41					
$\gamma = 0,1$								
$L^u$	0,61	4,40	0,00	Верхняя $i = y$	9,49	5,52	0,32	-0,84
$R^u$	1,99	5,33	0,00	Левая $i = x$	9,49	4,63	-0,39	-1,70
$L^d$	1,52	3,69	50,00	Правая $i = x$	9,49	6,95	1,92	-1,70
$R^d$	1,59	3,69	50,00					
$\gamma = 0,5$								
$L^u$	0,61	4,40	0,00	Верхняя $i = y$	9,49	5,52	0,32	-0,84
$R^u$	1,99	5,33	0,00	Левая $i = x$	9,49	3,95	-0,39	-1,70
$L^d$	1,52	23,69	50,00	Правая $i = x$	9,49	6,27	1,92	-1,70
$R^d$	1,59	23,69	50,00					
$\gamma = 1,0$								
$L^u$	0,61	4,40	0,00	Верхняя $i = y$	9,49	5,52	0,32	-0,84
$R^u$	1,99	5,33	0,00	Левая $i = x$	9,49	3,10	-0,39	-1,70
$L^d$	1,52	48,69	50,00	Правая $i = x$	9,49	5,42	1,92	-1,70
$R^d$	1,59	48,69	50,00					
$\gamma = 10,0$								
$L^u$	0,61	4,40	0,00	Верхняя $i = y$	9,49	5,52	0,32	-0,84
$R^u$	1,99	5,33	0,00	Левая $i = x$	9,49	-12,20	-0,39	-1,70
$L^d$	1,52	498,69	50,00	Правая $i = x$	9,49	-9,89	1,92	-1,70
$R^d$	1,59	498,69	50,00					

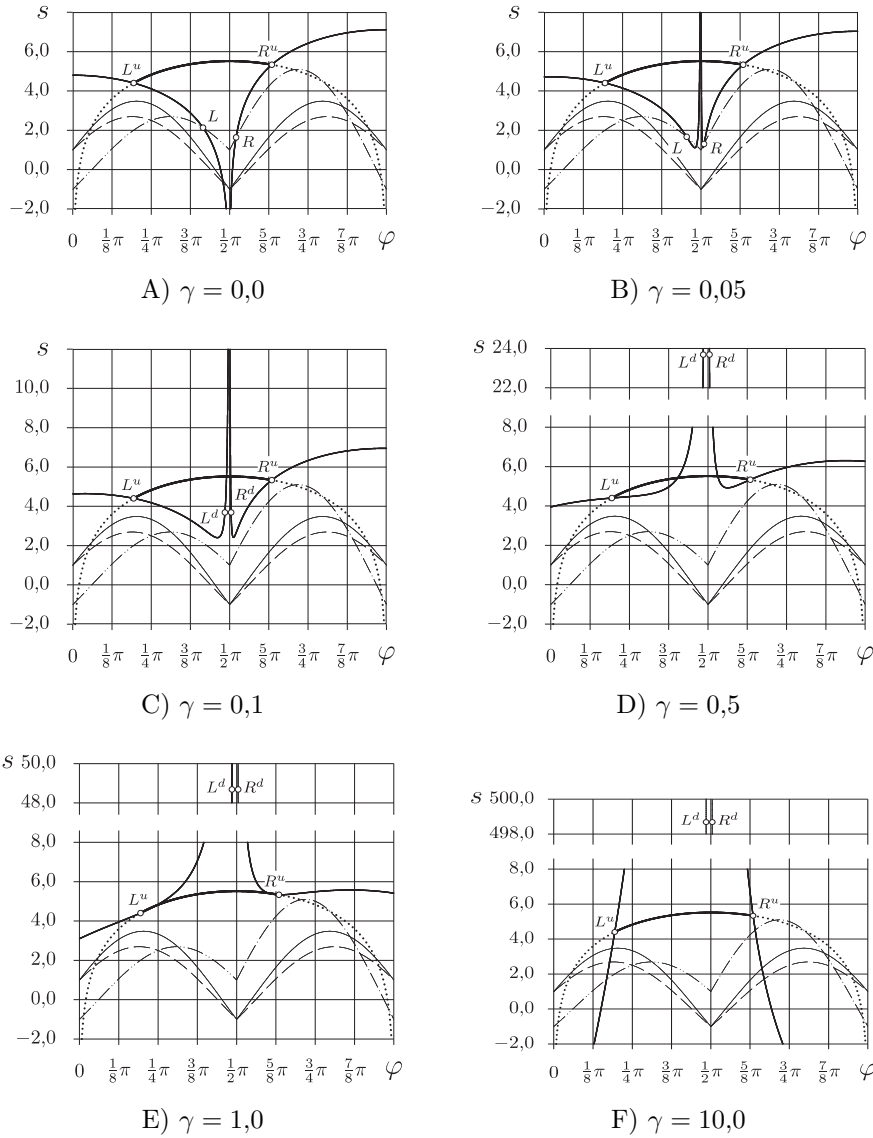


Рис. 3.9. Граничные зависимости полусуммы главных нормальных напряжений  $s$  от величины угла  $\varphi$ , отвечающие соотношениям на абсциссе ((3.178) — .....—, линия  $L^u R^u$  поверхности уплотнения) и ординате ((3.183) — ———, левая  $L^u L^d$  и правая  $R^u R^d$  границы области уплотнения). Линии — · — · — и — · — · —, а также — — — — и — — — — соответствуют условиям трения на левой и правой (3.200), а также верхней и нижней (3.201) границах предельной области

Следует понимать, что наиболее адекватно применение описанного алгоритма позволяет определять начальную конфигурацию области предельного равновесия сразу же после нагружения. С течением времени ситуация будет изменяться. Особенно интенсивными такие изменения будут в случае, когда изначально точки  $L$  и/или  $R$  не совпадают с угловыми точками  $L^d$  и/или  $R^d$  рис. 3.9,А и 3.9,В. Прежде всего это характерно для малых нагрузок и сред с очень малым удельным весом. По сути такое напряженное состояние означает, что ниже точек  $L$  и/или  $R$  касательная компонента  $\sigma_{xy}$  тензора напряжений не уравновешивается силами внешнего трения.

В конечном итоге указанное обстоятельство приведет к перераспределению напряжений в объеме уплотняемой среды и совмещению точек  $L$  и  $R$  с угловыми точками  $L^d$  и  $R^d$ . С этого момента напряженное состояние объема уплотняемой среды, наряду с вышеперечисленным, будет определяться и условиями трения на нижней границе  $L^d R^d$ , а точнее граничными условиями (3.204) и (3.205) в угловых точках  $L^d$  и  $R^d$  этой границы. Последнее обстоятельство, опять-таки характерно для сред с очень маленьким удельным весом. При сколь-нибудь значительном удельном весе и внешней нагрузке кривые  $s(\varphi)$  соотношений на ординатах (3.183) “задираются” вверх и никогда с условиями трения (3.204) и (3.205) не пересекаются (рис. 3.9,С–F). Этот тезис тем более справедливый, чем более весомой является среда (рис. 3.9,F) и чем интенсивнее внешняя нагрузка.

Описанный алгоритм не учитывает граничные условия (3.204), (3.205) в угловых точках  $L^d$ ,  $R^d$ , и в связи с этим его корректное применение ограничивается расчетом начальной конфигурации области предельного равновесия сразу же после нагружения для любых сред и нагрузок, или конечной конфигурации области предельного равновесия для сред, имеющих значительный удельный вес при больших внешних воздействиях, для которых учитывать упомянутые условия трения нет необходимости.

Во втором случае весомых сред начальная и конечная конфигурации области предельного равновесия совпадают, ибо среда по всему своему физическому объему переходит в состояние, соответствующее предельному, сразу же после приложения внешнего воздействия.

Следует, однако, заметить, что в любом случае даже после сведения точек  $L$  и  $R$  с угловыми точками  $L^d$  и  $R^d$  процесс релаксации напряжений, действующих в объеме среды, не закончится. Напряжения вдоль поверхности действия внешней нагрузки и в уплотняемом объеме будут продолжать выравниваться, что будет сопровождаться стремлением каждого из углов  $\varphi^{lu}$  и  $\varphi^{ru}$ ,  $\varphi^{ld}$  и  $\varphi^{rd}$  к своему среднему значению  $\frac{1}{2}\pi$ . В любой момент процесса релаксации напряженное состояние среды адекватно математическим моделям, составляющим сущность теории предельного равновесия.

В дальнейшем в истории развития предельного напряженного состояния условимся выделять три фазы (состояния): начальную(ое), конечную(ое) и фазу (состояние) релаксации. Разница между процессом перехода от начального напряженного состояния к конечному и процессом релаксации напряжений состоит в их скорости протекания. Если первый переход осу-

ществляется мгновенно, то второй — минутами, часами и более. Причем, чем дольше, тем медленнее.

Все перечисленные выше нюансы, включая описанную эволюцию состояния предельного равновесия, можно заложить в качестве продолжения и уточнения рассматриваемого алгоритма, но, тем не менее, поскольку задача решается в рамках статики, то эти изменения не удастся соотнести с конкретными временными интервалами.

3.5.7. Влияние физико-механических свойств среды на характер начального предельного напряженного состояния. Выше уже увидели, что величина удельного веса среды в значительной мере влияет на специфику начального предельного напряженного состояния, которое создается в ее объеме. Особенно сильно это влияние проявляется, когда удельный вес среды  $\gamma$  существенно меньше сцепления  $k$ , но, тем не менее, отличен от нуля. В этом случае пара значений  $\gamma$ ,  $k$  определяют как количественные, так и качественные характеристики напряженного состояния (рис. 3.9, В и С; рис. 3.10, В и С). Если же среда невесомая (рис. 3.9, А; рис. 3.10, А) или, наоборот, имеет значительный удельный вес (рис. 3.9, D, E и F; рис. 3.10, D, E и F), то характер напряженного состояния оказывается мало связанным с величиной сцепления. В таком случае сцепление определяет в большей степени количественные характеристики напряженного состояния и в меньшей — качественные.

Условия трения на внешних границах области уплотнения и на поверхности воздействия внешней нагрузки на характер начального напряженного состояния влияют весьма существенно. В первую очередь неравенство коэффициентов трения, действующего на левой и правой стенках области уплотнения ( $f_l$ ,  $f_r$ ) приводит к “перекосу картинки напряженного состояния”, что и наблюдаем на обоих рисунках (рис. 3.9, 3.10). Кроме того, от величины коэффициентов трения, действующего на поверхности уплотнения  $f_u$  и на тех же боковых границах ( $f_l$ ,  $f_r$ ), в неразрывной связи с интенсивностью внешнего воздействия  $I_u$  зависит ширина отрезка  $L^u R^u$ , отсеченного на графике  $s(\varphi)$  соотношения на абсциссе (3.178). Если интенсивность внешнего воздействия небольшая, то ширину упомянутого отрезка  $L^u R^u$  однозначно определяют только условия трения на боковых границах ( $f_l$ ,  $f_r$ ). С ростом интенсивности внешнего воздействия актуализируется влияние условий трения на поверхности уплотнения ( $f_u$ ). В самой малой степени на характер напряженного состояния влияют условия трения на нижней границе  $l_d$ , но, как уже говорилось выше, приведенный алгоритм (рис. 3.4–3.8) этого обстоятельства не учитывает.

3.5.8. Конечное предельное напряженное состояние, переход к фазе релаксации. Причины и условия перехода уплотняемой идеально-вязкой среды от начального напряженного состояния к конечному были изложены ранее (п. 3.5.6). Тем не менее, однозначно и к тому же точно, описать сам процесс такого перехода пока не представляется возможным. В той или иной степени достоверно можно утверждать

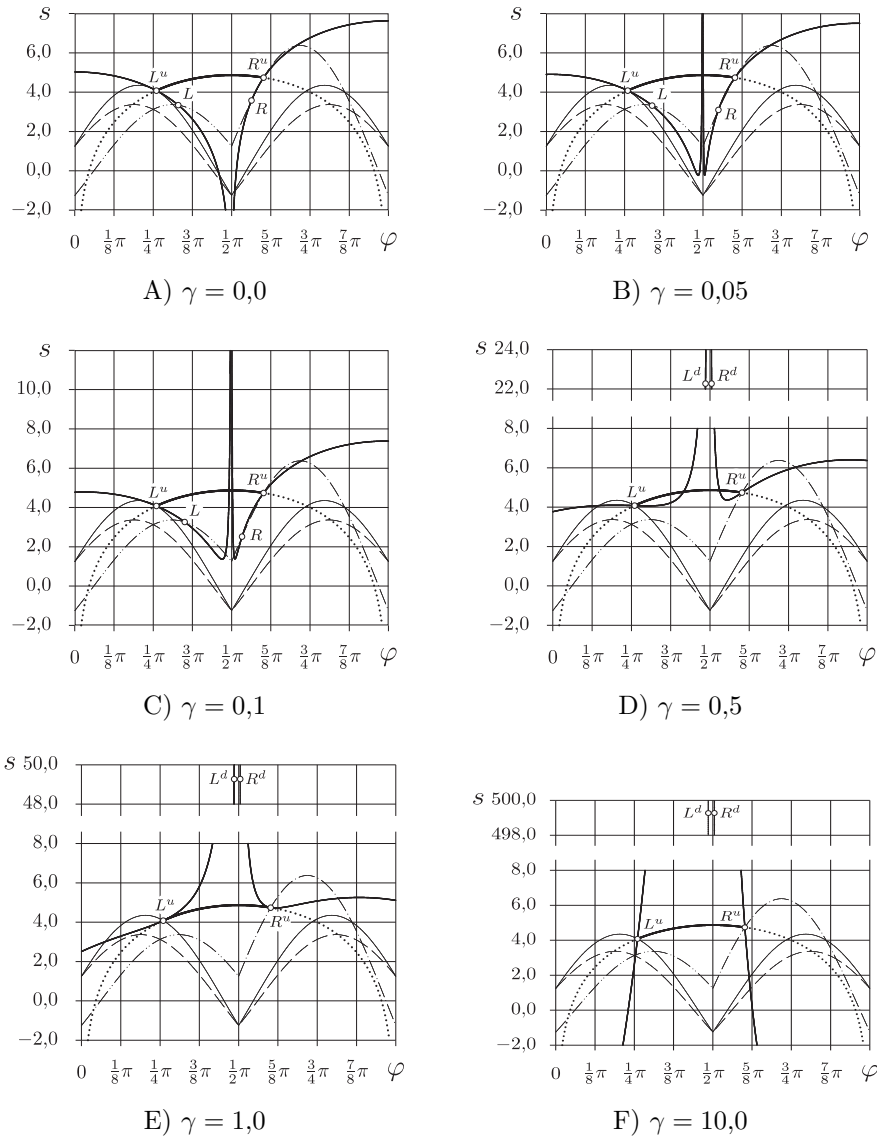


Рис. 3.10. Граничные зависимости  $s$  от величины  $\varphi$ , отвечающие соотношениям на абсциссе ((3.178) — .....—, линия  $L^u R^u$  поверхности уплотнения) и ординате ((3.183) — ———, левая  $L^u L^d$  и правая  $R^u R^d$  границы области уплотнения). Исходные данные соответствуют таблице 3.1, где значение связности  $k$  увеличено и вместо единицы равно 1,25. Линии —...— и —·—, а также ——— и ——— соответствуют условиям трения на левой и правой (3.200), а также верхней и нижней (3.201) границах предельной области

лишь то, что каждое последующее напряженное состояние должно в какой то мере “напоминать своего прародителя”. Последний тезис лег в основу метода усовершенствования алгоритма (рис. 3.4–3.8). Результирующий “модифицированный алгоритм решения задачи уплотнения идеально-связной среды в узком вертикальном зазоре: расчет конечного напряженного состояния” представлен на рис. 3.11 и 3.12.

Первые пять операторов на рис. 3.4 и рис. 3.11 совпадают полностью. Далее в модифицированном варианте (оператор 6) инициализируются дополнительные служебные переменные:  $\Delta C_y^+$  — элементарное приращение в цикле постоянной интегрирования  $C_y^+$ ;  $\Delta s$  — начальное значение разности пары величин  $s = s(\varphi)$ , последовательно вычисленных из условия трения на левой  $L^u L^d$  (3.204) или правой  $R^u R^d$  (3.205) границе и соотношения на ординате (3.183);  $\Delta^*$  — требование на точность ( $\Delta^* \ll \Delta s$ ).

В конечном напряженном состоянии, в пределах  $\varphi \in [\varphi^{lu}, \varphi^{ld}]$  и  $\varphi \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$ , когда точки  $L$  и  $R$  совпадают с соответствующими физическими угловыми точками  $L^d$  и  $R^d$  (рис. 3.9,С–F и рис. 3.10, D–F), в отношении величины  $\Delta s$  можно утверждать, что она всегда должна быть не отрицательной. Этот факт можно использовать и используется (оператор 8, рис. 3.12) в качестве критерия полного перехода напряженного состояния среды в свою конечную фазу или на начало фазы релаксации. Случай, когда в пределах  $\varphi \in [\varphi^{lu}, \varphi^{ld}]$  и  $\varphi \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$  имеются такие значения  $\varphi$ , при которых  $\Delta s < 0$ , иллюстрируют рис. 3.9,А, В и рис. 3.10,А–С. На этих рисунках среда находится “в самом начале пути” от своего начального напряженного состояния к конечному.

В дальнейшем (операторы 7–13) предстоит разобраться, каким образом в предлагаемом модифицированном алгоритме (рис. 3.11 и 3.12) реализуется механизм наследования, в соответствии с которым “на пути перехода” от своего начального напряженного состояния к конечному каждое последующее напряженное состояние среды наследует особенности предыдущего (“своего прародителя”).

Оператор 7 выполняет присвоение переменной  $C_y^{+max}$  начального значения  $C_y^+ + \Delta C_y^+$ , где  $C_y^+$  и  $\Delta C_y^+$  уже определены ранее. В частности,  $C_y^+$  соответствует начальному напряженному состоянию. Поскольку  $\Delta^* \ll \Delta s$  по определению (оператор 6), то блок операторов 9–13 выполняется, по меньшей мере, один раз. При этом с каждой итерацией оператор 9 уменьшает значение  $C_y^{+max}$  на величину  $\Delta C_y^+$  и возвращает новое значение  $C_y^{+max}$  постоянной  $C_y^+$ . Если по истечении цепочки операторов 9–13 в ходе проверки условия 8 выяснится, что наибольшее значение  $\Delta s$  превышает заданный минимум  $\Delta^*$ , то цепочка операторов 9–13 повторяется.

За реализацию механизма наследования отвечает оператор 10. Несмотря на то, что интервал между  $\varphi^{lu}|_{C_y^+=C_y^{+max}}$  и  $\varphi^{ru}|_{C_y^+=C_y^{+max}}$  с каждой итерацией уменьшается, “перекося картинка напряженного состояния” в качественном смысле остается прежним, ведь выражение (3.215), которое использует оператор 10, непосредственно задействуют все те же условия трения (3.202) и (3.203), выполняющиеся в верхних угловых точках.

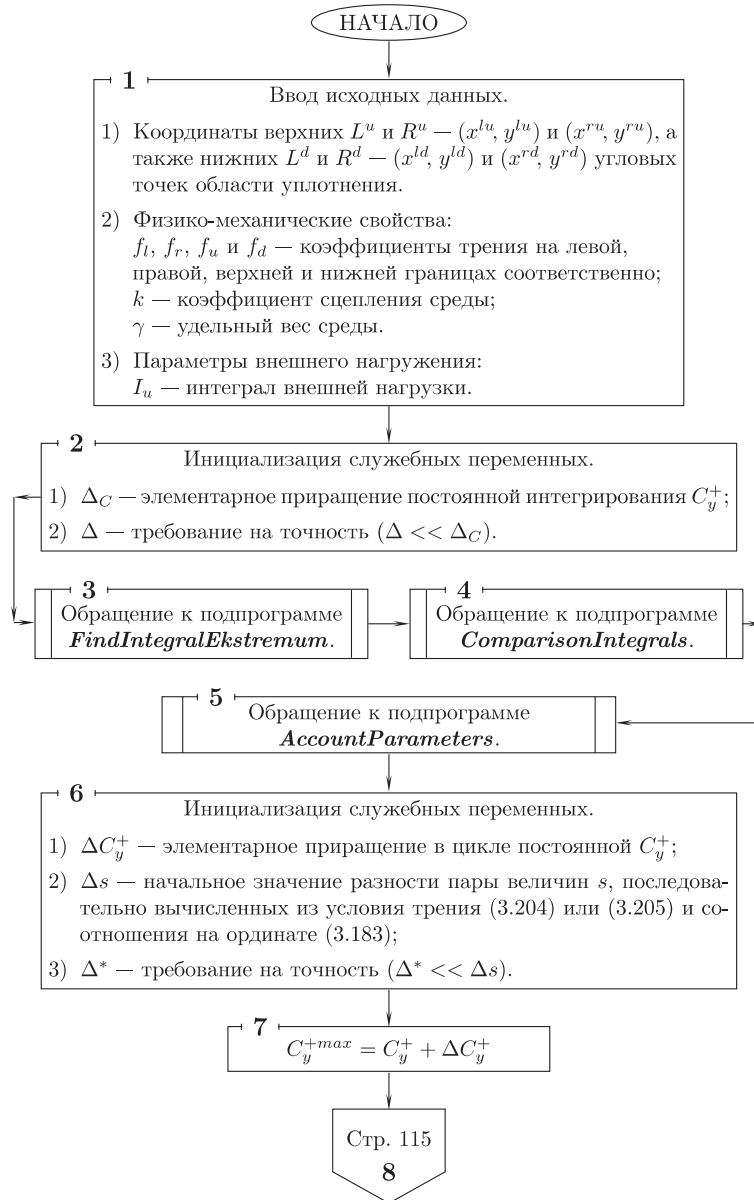


Рис. 3.11. Модифицированный алгоритм решения задачи уплотнения идеально-вязкой среды в узком вертикальном зазоре: расчет конечного напряженного состояния (начальная часть)



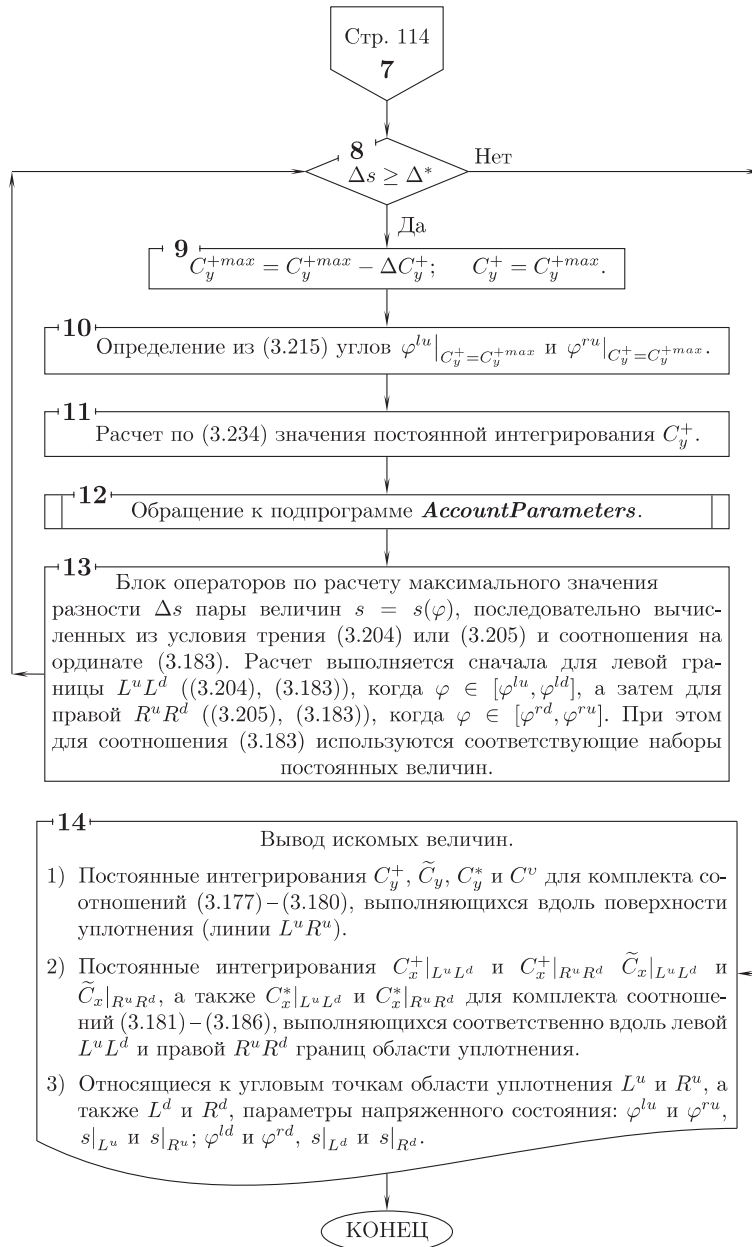


Рис. 3.12. Модифицированный алгоритм решения задачи уплотнения идеально-вязкой среды в узком вертикальном зазоре: расчет конечного напряженного состояния (заключительная часть)

Оператор 11, сохраняя  $\varphi^{lu} = \varphi^{lu}|_{C_y^+ = C_y^{+max}}$  и  $\varphi^{ru} = \varphi^{ru}|_{C_y^+ = C_y^{+max}}$ , рассчитывает новое значение постоянной интегрирования  $C_y^+$ , обеспечивающее равенство заданной величины интеграла внешней нагрузки  $I_u$  и расчетной  $I_u(C_y^+)$ . По итогу выполнения оператора 11,  $C_y^+$  уже не равно  $C_y^{+max}$ .

Оператор 12 осуществляет вызов подпрограммы **AccountParameters**, которая согласованно рассчитывает все искомые величины:

1) Недостающие постоянные интегрирования  $\tilde{C}_y$ ,  $C_y^*$  и  $C^v$  для комплекта соотношений (3.177)–(3.180), выполняющихся вдоль поверхности уплотнения (линии  $L^u R^u$ );

2) Постоянные интегрирования  $C_x^+|_{L^u L^d}$  и  $C_x^+|_{R^u R^d}$ ,  $\tilde{C}_x|_{L^u L^d}$  и  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ , а также  $C_x^*|_{L^u L^d}$  и  $C_x^*|_{R^u R^d}$  для комплекта соотношений (3.181)–(3.186), выполняющихся соответственно вдоль левой  $L^u L^d$  и правой  $R^u R^d$  границ области уплотнения;

3) Относящиеся к угловым точкам  $L^u$  и  $R^u$ , а также  $L^d$  и  $R^d$ , параметры напряженного состояния:  $s|_{L^u}$  и  $s|_{R^u}$ ;  $\varphi^{ld}$  и  $\varphi^{rd}$ ,  $s|_{L^d}$  и  $s|_{R^d}$ .

Далее оператор 13 выполняет расчеты максимального значения разности  $\Delta s$  пары величин  $s = s(\varphi)$ , последовательно вычисленных из условия трения (3.204) или (3.205) и соотношения на ординате (3.183). Расчет выполняется сначала для левой границы  $L^u L^d$  ((3.204), (3.183)), когда  $\varphi \in [\varphi^{lu}, \varphi^{ld}]$ , а затем для правой  $R^u R^d$  ((3.205), (3.183)), когда  $\varphi \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$ . При этом для соотношения (3.183) используются соответствующие наборы постоянных величин.

Затем оператор 8 по сути проверяет, совпадают или нет точки  $L$ ,  $R$  с точками  $L^d$ ,  $R^d$ . Если таковые хотя бы для одной из боковых сторон области уплотнения не совпадают, то  $\Delta s \gg 0$ , а значит  $\Delta s > \Delta^*$ , и цепочка операторов 9–13 снова повторится. Если по факту  $\Delta s \leq \Delta^*$  и, следовательно, с оператора 8 вычислительный процесс направляется в сторону “Нет”, т.е. на оператор 14, то по итогу выполнения последнего, перечисленные в нем величины передаются на экран, печать и/или в файл. На этом выполнение программы заканчивается. Результаты расчетов представлены на рис. 3.13.

В соответствии с ранее приведенным, из рис. 3.13 видно, что если среда имеет существенный удельный вес ( $\gamma > 0,5$ , рис. 3.13,D–F), то характер напряженного состояния в своей конечной фазе в точности совпадает с таковым в начальной фазе (рис. 3.10,D–F). Если же удельный вес среды меньше обозначенной величины, то различия между начальной и конечной фазами напряженного состояния имеются (см. рис. 3.10,A–C – начальная фаза; рис. 3.13,A–C – конечная фаза) и, к тому же, существенные. В конечной фазе предельное состояние распространяется на весь физический объем уплотняемой среды, когда точки  $L$ ,  $R$  совпадают с точками  $L^d$ ,  $R^d$ .

Далее, после фазы конечного напряженного состояния, наступает бесконечный процесс релаксации. Его можно смоделировать точно также, как и переход от начального напряженного состояния к конечному, но остается неясным вопрос, с какими временными отрезками следует соотносить каждый из этапов релаксации. На этот вопрос статика ответа не дает.



Рис. 3.14 в реальных координатах  $(x, y)$  иллюстрирует специфику конечного напряженного состояния, которое создается в объеме среды.

Из этих рисунков видно, что удельный вес  $\gamma$  среды весьма существенно влияет как на количественные, так и на качественные характеристики предельного напряженного состояния. Чем больше удельный вес, тем больше среда проявляет способность к самоуплотнению. В любом случае, вариации полусуммы  $s$  главных нормальных напряжений в большей степени заметны именно по глубине слоя, и в меньшей степени — по ширине зазора. Последнее указывает на несущественное влияние внешнего трения, действующего вдоль границ области уплотнения, на характер напряженного состояния, формирующегося в объеме среды. Тем не менее асимметричные условия трения приводят к асимметрии “картинки” напряженного состояния. Это также заметно на рисунках. Разумеется тут необходимо напомнить, что удельный вес  $\gamma$  среды следует соотносить с величиной ее сцепления  $k$ . Об этом уже говорилось выше (п. 3.5.7).

**3.5.9. Конечное предельное напряженное состояние. Построение сетки линий скольжения.** Подробной схемы алгоритма [289] построения сетки линий скольжения не приводим из-за громоздкости. Ограничимся его описанием и частными иллюстрациями.

Поскольку речь идет о конечном напряженном состоянии, то, естественно, описываемый сейчас алгоритм в своей начальной части предполагает выполнение блока операторов (от первого до последнего) рис. 3.11 и 3.12. По итогу их выполнение позволяет определить величины, перечисленные в операторе 14, что делает определенными все соотношения (3.177)–(3.186), выполняющиеся вдоль граничных координатных прямых  $L^d L^u$ ,  $L^u R^u$  и  $R^u R^d$  области уплотнения рис. 3.1 и 3.15.

Далее для того, чтобы определить конфигурацию и положение любой из линий скольжения (характеристик  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ), используются соотношения на характеристиках (3.21). Поставим задачу построить характеристику из второго семейства ((3.21) с нижними знаками), начинающуюся на поверхности уплотнения в точке  $a_0$ , положение которой задают координаты  $x|_{a_0}$ ,  $y|_{a_0}$ . Чтобы определить конкретное значение параметра  $\lambda_2$  искомой характеристики, необходимо знать относящиеся к точке  $a_0$  значения угла  $\varphi|_{a_0}$  и полусуммы главных напряжений  $s|_{a_0}$ . Для этого вначале с помощью выражения (3.207) и соотношения на абсциссе (3.178) вычисляются искомые значения  $\varphi|_{a_0}$  и  $s|_{a_0}$ . Затем, в соответствии с заданными  $x|_{a_0}$ ,  $y|_{a_0}$  и полученными  $\varphi|_{a_0}$ ,  $s|_{a_0}$  из соотношения (3.21) с нижними знаками, к примеру, получаем  $\lambda_2 = 6,546$ .

Далее рассмотрим находящуюся на характеристике  $\lambda_2 = 6,546$  произвольную точку  $c_{00}$ . Ее положение задает пересечение координатной прямой  $b_0 b'_0$ , параллельной оси абсцисс (координаты крайних точек —  $(x|_{b_0}, y|_{b_0})$ ,  $(x|_{b'_0}, y|_{b'_0})$ ) и линии характеристики  $\lambda_2 = 6,546$ , положение которой пока неизвестно. Для точки  $c_{00}$  нам следует выяснить ее координаты  $x|_{c_{00}}$ ,  $y|_{c_{00}}$  и параметры напряженного состояния  $\varphi|_{c_{00}}$ ,  $s|_{c_{00}}$  уплотняемой среды.

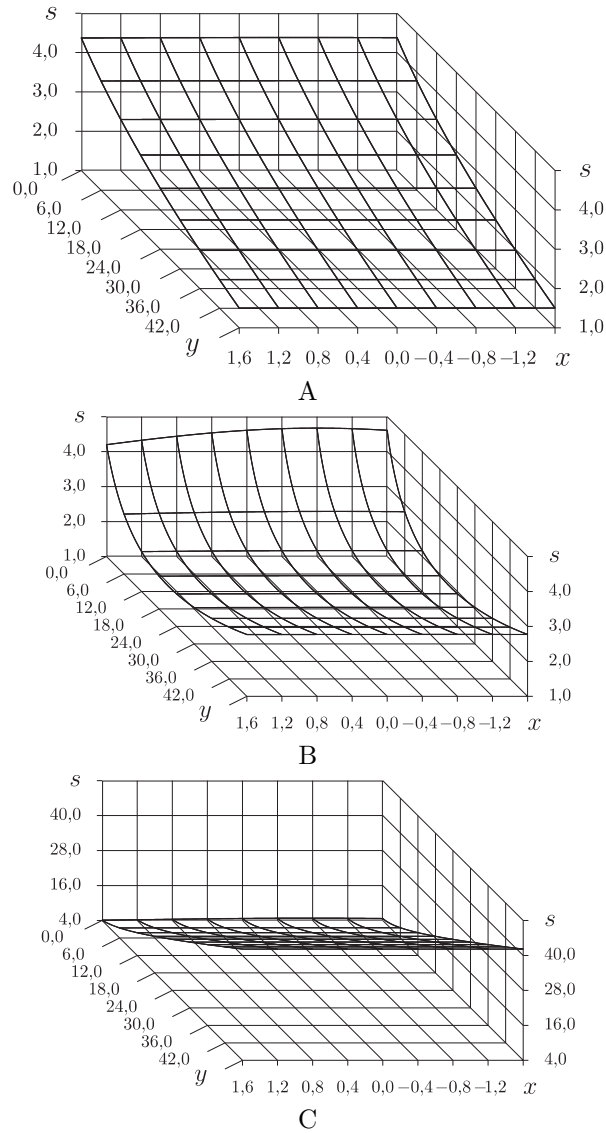


Рис. 3.14. Полусумма главных нормальных напряжений  $s = s(x, y)$  в реальных координатах  $(x, y)$  области уплотнения идеально-связной среды (рис. 3.1), находящейся в конечной фазе предельного напряженного состояния для трех значений удельного веса среды: (A)  $\gamma = 0,0$ ; (B)  $\gamma = 0,1$ ; (C)  $\gamma = 1,0$

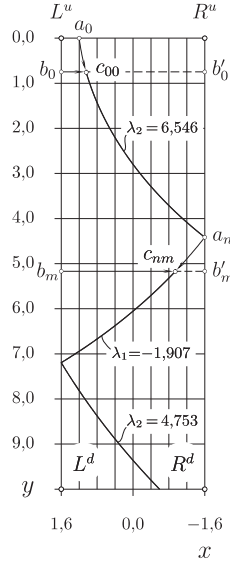


Рис. 3.15. Схема расчета конфигурации линий скольжения

Тут возникает новая подзадача. Прежде чем приступить к точке  $c_{00}$ , следует определить все выполняющиеся на линии абсцисс  $b_0b'_0$  соотношения (3.178)–(3.180), т.е. вычислить конкретные значения всех вошедших в них постоянных величин  $y = y|_{b_0} = y|_{b'_0}$ ,  $C_y^+ = C_y^+|_{b_0b'_0}$ ,  $\tilde{C}_y = \tilde{C}_y|_{b_0b'_0}$  и  $C_y^* = C_y^*|_{b_0b'_0}$ . Постоянной  $C^v$  это не касается, поскольку она остается неизменной во всей области уплотнения и для всех соотношений (3.177)–(3.186), а потому не нуждается в переопределении.

Абсциссы точек  $b_0$  и  $b'_0$  известны, это  $x|_{b_0} = x^{lu}$  и  $x|_{b'_0} = x^{ru}$  соответственно. Ординату  $y = y|_{b_0}$ , или равную ей  $y|_{b'_0}$  можно просто назначить.

Определение соотношений (3.177)–(3.180), выполняющихся на линии абсцисс  $b_0b'_0$ , начинается с определения постоянной  $\tilde{C}_y = \tilde{C}_y|_{b_0b'_0}$  из эквивалентного (3.217) выражения:

$$\tilde{C}_y|_{b_0b'_0} = \gamma y|_{b_0} + 2k \ln \left[ \frac{2k (\operatorname{ctg} \varphi|_{b_0} - \operatorname{ctg} \varphi|_{b'_0})}{\Delta x} \right], \quad (3.241)$$

где  $y|_{b_0} = y|_{b'_0}$  — конкретное значение ординаты точек  $b_0$  или  $b'_0$ ;  $\Delta x = x|_{b_0} - x|_{b'_0} = x^{lu} - x^{ru}$ , а, значит, по прежнему соответствует выражению (3.218);  $\varphi|_{b_0}$  и  $\varphi|_{b'_0}$  — значения угла  $\varphi$  в точках  $b_0$  и  $b'_0$ , которые определяются из выражений (3.211), (3.212).

Постоянная  $C_y^*|_{b_0b'_0}$  вычисляется следующей, в соответствии с выражением (3.235), которое в данном случае приводится к виду:

$$C_y^*|_{b_0b'_0} = \begin{pmatrix} x|_{b_0} \\ x|_{b'_0} \end{pmatrix} - 2k \exp \left( \frac{\gamma y|_{b_0} - \tilde{C}_y|_{b_0b'_0}}{2k} \right) \operatorname{ctg} \left( \varphi|_{b_0} \right). \quad (3.242)$$

Последней, в соответствии с (3.178), вычисляется постоянная

$$C_y^+|_{b_0b'_0} = s|_{b_0} - k \ln (\sin^2 \varphi|_{b_0}), \quad (3.243)$$

где  $s|_{b_0}$  — полусумма главных нормальных напряжений, действующих в точке  $b_0$ , которая, в свою очередь, определяется соотношением (3.183), выполняющемся на линии ординат  $L^uL^d$ , когда принято, что  $\varphi = \varphi|_{b_0}$ .

На этом определение группы соотношений (3.177)–(3.180), выполняющихся на линии абсцисс  $b_0b'_0$ , заканчивается.

Далее, имея в виду уже известные  $y = y|_{b_0} = y|_{b'_0}$ ,  $C_y^+ = C_y^+|_{b_0b'_0}$ ,  $\tilde{C}_y = \tilde{C}_y|_{b_0b'_0}$ ,  $C_y^* = C_y^*|_{b_0b'_0}$  и  $C^v$ , решив выражения (3.178) и (3.21) с нижними знаками как систему, относительно  $s$  и  $\varphi$  найдем искомые параметры  $s|_{c_{00}} = s$  и  $\varphi|_{c_{00}} = \varphi$  напряженного состояния в точке  $c_{00}$ .

Ордината  $y|_{c_{00}}$  точки  $c_{00}$  известна ( $y|_{c_{00}} = y|_{b_0} = y|_{b'_0}$ ), поскольку ранее была назначена, а абсцисса  $x|_{c_{00}}$  может быть определена из соотношения (3.177) при соответствующих значениях постоянных ( $y = y|_{b_0} = y|_{b'_0}$ ,  $\tilde{C}_y = \tilde{C}_y|_{b_0 b'_0}$ ,  $C_y^* = C_y^*|_{b_0 b'_0}$ ) и переменных ( $\varphi = \varphi|_{c_{00}}$ ) величин.

На этом определение точки  $c_{00}$  заканчивается. Поскольку  $c_{00}$  — произвольная точка, положение которой изначально задавалось произвольным значением ординаты  $y = y|_{b_0} = y|_{b'_0} = y|_{c_{00}}$ , то таким образом можно определить любую и каждую точку характеристики (линии скольжения) второго семейства  $\lambda_2 = 6,546$  и тем самым определить ее полностью. К тому же и характеристику второго семейства  $\lambda_2$  можно выбрать любую другую, а значит таким образом можно рассчитать положение любой и каждой из характеристик второго семейства.

Точно таким же образом можно определить любую и каждую характеристику первого семейства  $\lambda_1$ . Разница состоит только в том, что из пары уравнений (3.21) следует использовать уравнение с верхними знаками. На рис. 3.15 такие расчеты иллюстрирует характеристика  $\lambda_1 = 1,907$  и точки  $a_n, b_n, b'_n$  и  $c_{nn}$ . Смысл их такой же, как и одноименных (исключая индексы) точек из выше приведенных рассуждений.

Применив описанный алгоритм для рассматриваемой задачи рис. 3.1 построены сетки линий скольжения в пределах всей области уплотнения идеально-вязкой среды (рис. 3.16). Как видно из рисунка, чем меньше трение на правой боковой границе ( $f_r = 0,2$ ) по сравнению с левой ( $f_l = 0,4$ ), и чем больше удельный вес  $\gamma = \{0,0; 0,1; 1,0\}$  среды, тем сильнее линии скольжения “заваливаются” вниз. Асимметрия сетки линий скольжения тем меньше, чем дальше вглубь от поверхности  $L^u R^u$  воздействия внешних сил (чем больше ордината  $y$ ).

### 3.6. Анализ адекватности правила знаков касательных напряжений

В работах [167, 290] в отношении нормальных напряжений указано, что несмотря на то, что в различных науках (прежде всего теориях пластичности и предельного равновесия) приняты различные правила, все они удовлетворяют физической сути решаемых задач, а значит, если и создают проблему, то только в той части, что таких правил несколько.

С касательными напряжениями дела обстоят хуже: во-первых, отсутствует единая точка зрения на эту проблему, а, во-вторых, действующие правила не всегда удается увязать с физической сутью решаемых задач. В тех же работах [167, 290] было сформулировано два авторских правила.

*Вектор касательной компоненты полного напряжения вне зависимости от знака его модуля всегда ориентирован в сторону площадки действия большего из главных нормальных напряжений.*

*Касательная компонента полного напряжения считается положительной, если выполняется одно из двух: или ее вектор, или внешняя нормаль к площадке не совпадает с направлением параллельных к ним осей системы координат. Если рассматривается площадка общего положения,*

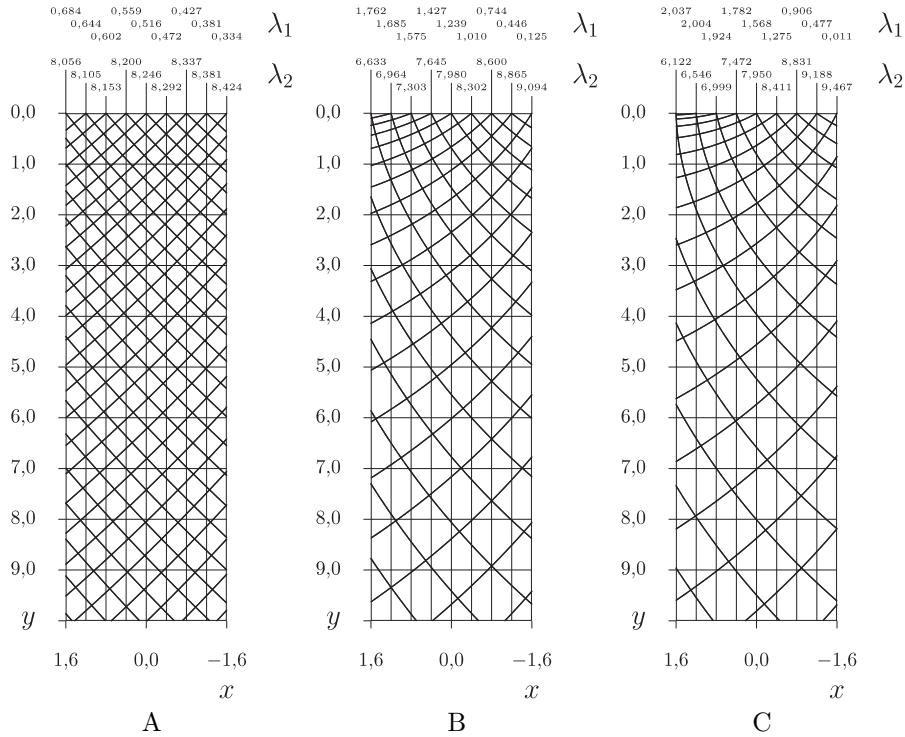


Рис. 3.16. Сетка линий скольжения в реальных координатах  $(x, y)$  области уплотнения идеально-вязкой среды (рис. 3.1), находящейся в конечной фазе предельного напряженного состояния для трех значений удельного веса среды: (А)  $\gamma = 0,0$ ; (В)  $\gamma = 0,1$ ; (С)  $\gamma = 1,0$ . Исходные данные соответствуют табл. 3.1, но значение  $k$  увеличено до 1,25

то чтобы применить это правило следует мысленно повернуть систему координат (правую) в положительном направлении (против часовой стрелки) до совпадения ее осей с линиями действия касательного напряжения и вектора внешней нормали к площадке.

Эти правила справедливы, если главные нормальные напряжения считаются положительными, когда они сжимающие, а порядок их индексирования следующий:  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ .

Ключевым моментом этих правил является то, что знак касательной компоненты  $\sigma_{xy}$  тензора напряжений привязывается к ориентации выбранной системы координат  $Oxy$  опосредовано, через привязку к векторам главных нормальных напряжений  $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3$ . Ведь по определению линию действия большего из главных нормальных напряжений  $\vec{\sigma}_3$  по отношению к оси абсцисс ( $Ox$ ) декартовой системы координат задает угол  $\varphi$  (рис. 2.9), а последний вычисляется аналитически [167, 290].



Далее применим предлагаемое правило знаков касательных напряжений к анализу решения (п. 3.5.5 на стр. 94–121) задачи уплотнения идеально-вязкой среды в соответствии с рис. 3.1. Выше было показано, что в левой (окрестности границы  $L^u L^d$ ) и правой (окрестности границы  $R^u R^d$ ) частях области уплотнения  $L^u R^u R^d L^d$  значения угла  $\varphi$  соответственно меньше и больше  $\frac{1}{2}\pi$ . Отобразим эту ситуацию на рис. 3.17 и проанализируем.

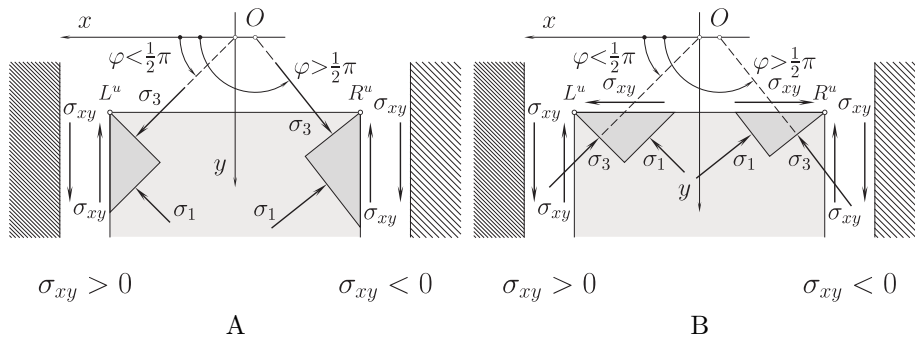


Рис. 3.17. Иллюстрация к правилу знаков касательных напряжений

Как видно из представленного рисунка, все построения на нем выполнены в соответствии, во-первых, с условием рассматриваемой задачи, а, во-вторых, со всеми заявленными правилами, которые, выполняются.

## ВЫВОДЫ

1. Разработанная замена переменных, именуемая заменой переменных по характеристическому решению, применительно к системам уравнений гиперболического типа позволяет не прибегая к известным методам непосредственно получать их характеристическое решение.

2. Предлагаемая замена переменных по характеристическому решению предполагает введение неизвестных функций-множителей  $v$  и  $\omega$ , именуемых масштабирующими. Для перехода на сетку характеристик в их вычислении нет необходимости.

3. Разработанная замена переменных по характеристическому решению приводит к системе-следствию, которая также, как и исходная система предельного равновесия идеально-связной среды, относится к гиперболическому типу, но в отличие от последней интегрирована.

4. Решение системы-следствия позволило получить аналитические выражения масштабирующих функций-множителей  $v$  и  $\omega$ , а те, в свою очередь — соотношения на декартовых координатах, которые выполняются вдоль прямых параллельных осям декартовой системы координат. В отличие от известных соотношений на характеристиках, которые выполняются вдоль уравнений характеристик, положение которых до конца решения задачи неизвестно, соотношения на декартовых координатах выполняются вдоль прямых, положение и ориентация которых известна изначально.

5. Применяя соотношения на декартовых координатах на примере задачи об уплотнении модельной среды в области с прямоугольными границами, сформулированы правила формирования краевых условий и получен ряд аналитических выражений, позволяющих вычислять параметры напряженного состояния среды в объеме и вдоль границ предельной области.

6. Сформулированное правило знаков касательных напряжений является развитием общей теории напряженного состояния сплошных сред и в дальнейшем может применяться при решении конкретных задач из теорий предельного равновесия и/или пластичности.

ГЛАВА 4  
ЗАДАЧА В.П.ГОРЯЧКИНА ОБ ОПЕРЕЖАЮЩЕЙ ТРЕЩИНЕ

4.1. Общие положения из теории предельного равновесия

Далее условимся понимать, что почва полностью соответствует модели сплошной, неупругой, идеально-вязкой среды, обладающей удельным весом  $\gamma$  и характеризующейся связностью  $k$ . Всякий раз, когда почва подвергается внешнему силовому воздействию посредством жесткого рабочего органа, напряженное состояние, которое возникает в ее объеме условимся соотносить со статическим состоянием предельного равновесия.

Для расчета параметров напряженного состояния предельного равновесия воспользуемся работами [157, 167, 179, 204, 261, 262, 280, 289, 290].

Напряженное состояние среды в точке будем описывать посредством определенного в ортогональной декартовой системе координат  $Oxyz$  тензора напряжений. Его нормальные компоненты —  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{zz}$ , а касательные —  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$ . Главные нормальные напряжения условимся считать положительными, если они сжимающие и обозначим  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , где  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ . В отношении знаков касательных напряжений условимся применять ранее разработанное правило (п.г. 3.6).

Все задачи в дальнейшем, используя правую двумерную декартову систему координат  $Oxy$ , будем сводить к плоской постановке, а, значит, в последующем компоненты тензора напряжений  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  и среднее главное нормальное напряжение  $\sigma_2$  интересоваться не будут, а главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и оставшиеся компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  теперь рассматриваются как функции двух координат  $x$ ,  $y$ .

Ориентацию векторов главных нормальных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , как и ранее определим посредством угла  $\varphi$ , который составляет линия действия вектора  $\sigma_3$  с осью абсцисс координатной системы  $Oxy$ , а ориентацию самой координатной системы — посредством угла  $\alpha$  между осью ординат и вектором силы веса среды. Если угол

$$\varphi = \varphi^+ \quad \text{или} \quad \varphi = \varphi^- \quad (4.1)$$

определяется в соответствии с рис. 4.1,А, то приведенное в п.г. 3.6 и работе [167] правило знаков касательных напряжений принимается без изменений. Если же угол  $\varphi$  определяется как на рис. 4.1,В, что равноценно изменению его знака, то упомянутое правило изменяется на обратное.

Учитывая выше изложенное, применяя полусумму главных нормальных напряжений  $s$  (2.29), интересующие нас компоненты тензора напряжений можно определить уравнениями (2.31), а напряженное состояние в пределах области предельного равновесия описать квазилинейной системой уравнений гиперболического типа (2.35). Ее характеристическое решение представляет собою уравнения характеристик (2.80) и выполняющиеся на них соотношения (2.81), которые могут быть интегрированы (2.82), и в конечном итоге дают выражения для  $s$  и  $\varphi$  (2.83), рассматриваемые, как функции параметров характеристик  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

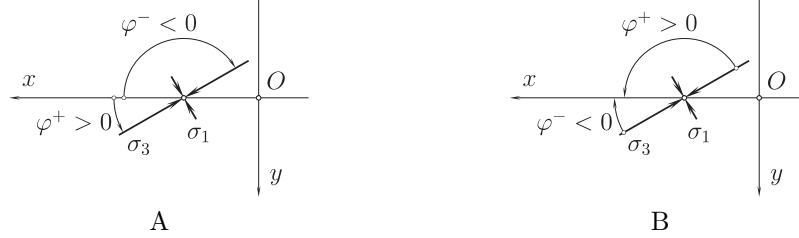


Рис. 4.1. Принятые варианты определения угла  $\varphi$ : А) от оси абсцисс к линии действия  $\sigma_3$ ; В) от линии действия  $\sigma_3$  к оси абсцисс

Далее, имея ввиду частный случай при  $\alpha = 0$ , что соответствует такому положению системы координат  $Oxy$ , когда ее ось абсцисс ориентирована горизонтально слева направо, а ось ординат — вертикально вниз, используем комплект соотношений, удовлетворяющих системе (2.35) и выполняющихся на координатных прямых [167, 179, 261, 262, 280]:

а) выполняющиеся вдоль линий, параллельных оси  $Ox$ , соотношения на абсциссе (3.150)–(3.154)

$$x|_{y=\text{const}} = \pm(-1)^r 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y}{2k} \operatorname{tg} \varphi + C_y^*, \quad (4.2)$$

$$s|_{y=\text{const}} = -k \ln (\cos^2 \varphi) + C_y^-; \quad (4.3)$$

где

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{yr} - \pi, \varphi_{yr}], \\ 2 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{yr}, \varphi_{yr} + \pi[, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\varphi_{yr} = \frac{1}{2}\pi \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}), \quad (4.5)$$

$$C_y^- = \tilde{C}_y - k \ln (2(C^v)^2), \quad (4.6)$$

а  $\tilde{C}_y$ ,  $C_y^*$ ,  $C_y^-$  и  $C^v$  — постоянные величины;

б) выполняющиеся вдоль линий, параллельных оси  $Oy$  соотношения на ординате (3.161)–(3.166)

$$y|_{x=\text{const}} = \pm(-1)^r 2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^*, \quad (4.7)$$

$$s|_{x=\text{const}} = -k \ln (\sin^2 \varphi) + \gamma y - k \ln (2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (4.8)$$

$$s|_{x=\text{const}} = -k \ln (\sin^2 \varphi) \pm (-1)^r 2k \gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^-, \quad (4.9)$$

где

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{xr} - \pi, \varphi_{xr}], \\ 2 & \text{при } \varphi \in ]\varphi_{xr}, \varphi_{xr} + \pi[, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\varphi_{xr} = \pm 2\pi n, \quad (n \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}), \quad (4.11)$$

$$C_x^- = \gamma C_x^* - k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (4.12)$$

а  $\tilde{C}_x$ ,  $C_x^*$  и  $C_x^-$  — постоянные величины.

#### 4.2. Постановка задачи. Частный случай

*Условие.* Сплошной массив идеально-связной среды 1 (рис. 4.2) находится во взаимодействии с вертикальной жесткой пластиной (деформатором) 2, которая, в свою очередь, нагружена внешней распределенной силой  $\mathbf{P}$ . Параметры внешнего силового воздействия являются такими, что не приводят к какому либо нарушению сложившейся статической ситуации [291–293].

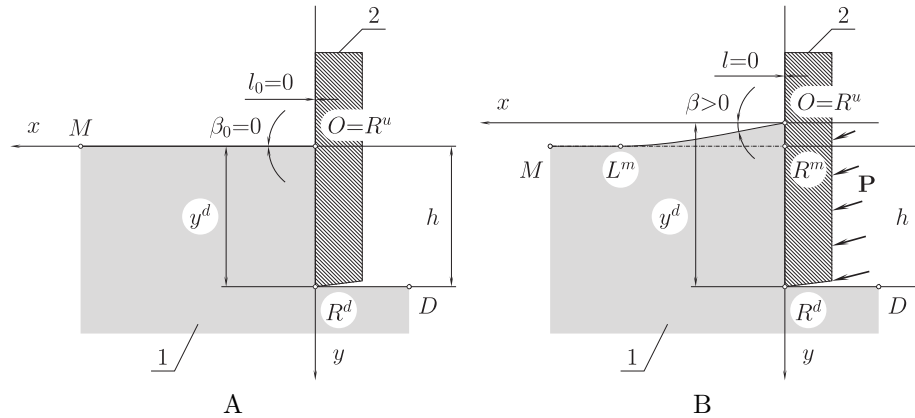


Рис. 4.2. Схема взаимодействия между массивом идеально-связной среды 1 и жесткой вертикальной пластиной 2, соответственно до (А) и после (В) приложения внешней распределенной нагрузки  $\mathbf{P}$

Область взаимодействия сплошной среды 1 с деформатором 2 соотнесена с декартовой системой координат  $Oxy$ , базисная точка  $O$  которой привязана к вершине гребня — точке  $R^u$ , ось абсцисс ориентирована справа налево, а ось ординат — вертикально вниз, т.е. так, что с вектором весовых сил (на рисунке не показаны) образует угол  $\alpha = 0$ .

*Принятые допущения и предположения:*

1) Несмотря на то, что различным значениям интенсивности силового воздействия  $\mathbf{P}$  соответствует различная геометрия области взаимодействия сплошной среды 1 (кривая  $ML^mR^u$ ), при каждом новом фиксированном  $\mathbf{P}$  ситуацию в этой области следует рассматривать как отвечающую теории плоского предельного равновесия идеально-связной среды [167];

2) Предполагается, что рост величины внешнего силового воздействия  $\mathbf{P}$  сопровождается лишь подъемом вершины гребня (точки  $R^u$ ) без отрыва ее от лобовой поверхности  $R^uR^d$  деформатора 2.

3) Размер массива сплошной среды и деформатора, измеренный по нормали к плоскости листа настолько большой, что его можно считать бесконечным. При этом в расчет будем принимать любой его отрезок единичной длины, а все известные и неизвестные параметры соотносить именно с этим единичным отрезком. Все приведенные допущения — неотъемлемая часть условий плоской задачи [167].

*Известные величины:*  $\gamma$  — плотность сплошной среды (в Н/мм<sup>3</sup>);  $k$  — коэффициент сцепления (в Н/мм<sup>2</sup>);  $f$  — коэффициенты внешнего трения идеально-вязкой среды по материалу лобовой поверхности деформатора;  $h$  — глубина погружения деформатора (в мм);  $y^d$  — ордината нижней точки деформатора (в мм);  $\beta$  — угол между осью абсцисс  $Ox$  и касательной к поверхности свободного контура  $ML^mR^u$  в точке  $R^u$  (рад.);  $\beta_0$  — начальное значение угла  $\beta$  (если  $\mathbf{P} = 0$ , то  $\beta_0 = 0$ );  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$  — интегральные значения (в Н) горизонтальной и вертикальной составляющих внешней распределенной силовой нагрузки  $\mathbf{P}$ .

В процессе решения задачи к конкретному виду почвы привязываться не будем, а вместо этого исследуем расширенные диапазоны цифровых величин, которые гарантировано охватывают и те, которые принадлежат к наиболее распространенным в Харьковской области черноземам. Так оптимальной является плотность  $\gamma$  почвы 1,1–1,25 г/см<sup>3</sup>, а реальный для приповерхностного слоя на поле — 1,0–1,5 г/см<sup>3</sup> (10<sup>-5</sup>Н/мм<sup>3</sup>) [294]. Коэффициент внешнего трения  $f$  почвы по стали лежит в диапазоне 0,45–0,70, но с учетом налипания для глинистых почв может достигать 0,60–0,95 [295]. Коэффициент сцепления всегда меньше 0,15 Н/мм<sup>2</sup> [295].

*Требуется:* а) по заданному значению угла  $\beta$  определить величину коэффициента сцепления  $k$  и, наоборот, по заданному  $k$  вычислить  $\beta$ ; б) определить форму криволинейной поверхности  $ML^mR^u$ ; в) определить компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  для всех точек поверхностей  $R^uR^d$  и  $ML^mR^u$ , а также примыкающего к ним объема; г) для области предельного равновесия, располагающейся между поверхностями  $R^uR^d$  и  $ML^mR^u$  построить сетку линий скольжения; д) изучить связь перечисленного в пунктах а)... г) с интенсивностью силового воздействия  $\mathbf{P}$ .

#### 4.3. Анализ задачи. Формулировка граничных условий

4.3.1. Предварительные выводы в отношении граничных условий на свободном контуре. Кривой (границей) свободного контура или просто свободным контуром условимся называть отрезок дуги  $L^mR^u$  (рис. 4.2), образующейся вертикальным сечением дневной поверхности той части идеально-вязкой среды, которая пребывает в состоянии предельного равновесия. Точка  $M$  кривой свободного контура не принадлежит по определению, т.к. за пределы точки  $L^m$  состояние предельного равновесия не распространяется.

Вдоль свободного контура  $L^mR^u$  отсутствуют, как нормальные  $\sigma$ , так и касательные  $\tau$  напряжения

$$\tau|_{L^mR^u} = 0. \quad (4.13)$$

Это обстоятельство дает основания утверждать, что вся поверхность  $L^m R^u$  состоит из главных площадок, причем меньшее из главных нормальных напряжений  $\sigma_1$  равно нулю

$$\sigma_1|_{L^m R^u} = 0, \quad (4.14)$$

а векторы наибольшего  $\sigma_3$  располагаются в плоскости рисунка и ориентированы по касательной к свободному контуру  $L^m R^u$ .

С учетом выше приведенного определения  $\varphi$  (рис. 4.1)

$$\varphi^\pm = \varphi^\mp \pm \pi \quad (4.15)$$

и выражений (2.31) для компонентов тензора напряжений, периодичность изменения  $\varphi$ , кратная  $2\pi$ , а также изменение его величины на  $\pm\pi$ , с точки зрения физической сути ничего не меняет. В этой связи в отношении выражений (4.2)–(4.12) можно положить, что в (4.5) и (4.11)

$$n = 0, \quad \varphi_{yr} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad \varphi_{xr} = 0. \quad (4.16)$$

Уже из выше приведенных частных рассуждений о периодичности вытекает, что физически осмысленный интервал возможных значений  $\varphi$  по своей ширине не может превышать величину  $\pi$ . Такое же утверждение, известно из ряда опубликованных работ [149, 157, 158, 167].

Таким образом, заключаем, что расширенный интервал

$$\varphi \in \left[ -\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right], \quad (4.17)$$

гарантировано содержит в себе интервал реально возможных значений угла  $\varphi$ , как бы последний не определялся (рис. 4.3).

Рис. 4.3,А, 4.3,С и 4.3Е построены в соответствии с правилом определения угла  $\varphi$  по рис. 4.1,А, когда тот отсчитывается от оси абсцисс к линии действия большего из главных нормальных напряжений  $\sigma_3$ . Рис. 4.3,В, 4.3,Д и 4.3,Ф соответствуют правилу определения угла  $\varphi$  по рис. 4.1,В, когда тот отсчитывается от линии действия напряжений  $\sigma_3$ .

Все приведенные на рис. 4.3 интервалы возможных значений угла  $\varphi$  укладываются в расширенный интервал (4.17). Таким образом, чтобы определить, какие знаки (верхние или нижние) следует применить в выражениях (4.15) и (4.16), а также в соотношениях (4.2)–(4.12), необходимо проанализировать их в упомянутом интервале (4.17) и сопоставить результаты с условиями решаемой задачи.

**4.3.2. Напряженное состояние среды в объеме ближайших окрестностей пятна контакта.** Тут и далее понятие “пятно контакта” обозначает область соприкосновения модельной среды с лобовой поверхностью деформатора или линию  $R^u R^d$  пересечения той же области с плоскостью листа (рис. 4.2).

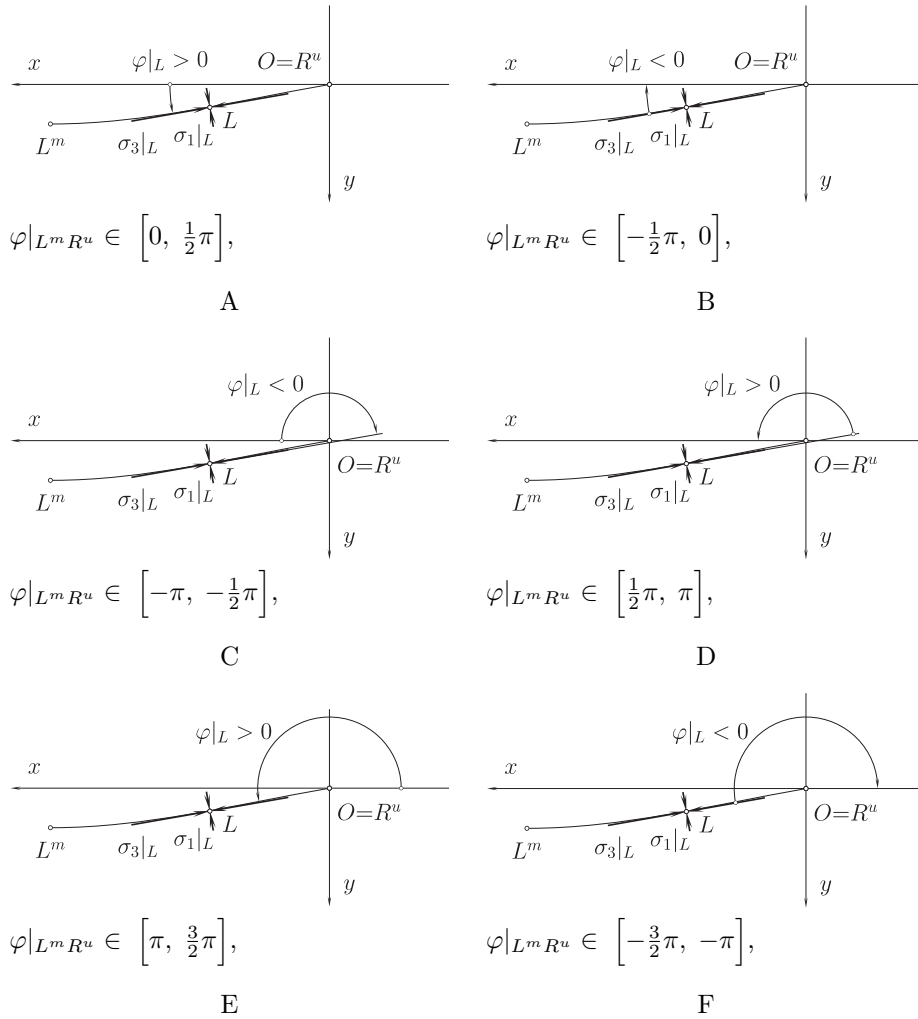


Рис. 4.3. Ориентация векторов главных нормальных напряжений в произвольной точке  $L$  и в крайней правой точке  $R^u$  кривой свободного контура  $L^m R^u$  (рис. 4.2,В) если правило определения угла  $\varphi$  соответствует рис. 4.1,А (А,С,Е) и рис. 4.1,В (В,Д,Ф): А, В — интервал возможных значений  $\varphi$  включает точку  $\varphi = 0$ ; С, Д — угол  $\varphi < 0$ ; Е, Ф — угол  $\varphi > 0$



Обратимся к рис. 4.4. Первая его часть (рис. 4.4,А), практически повторяет рис. 4.2,В. Принципиальным отличием является появление огибающей линии характеристики  $L^m R^d$ . Ее форма предположительно, и только в качественном смысле, известна из других теоретических работ [157]. Возможно, что линия  $L^m R^d$  представляет собой опережающую трещину и является кусочносочлененной. В любом случае она ограничивает и замыкает область предельного равновесия  $L^m R^u R^d$ , соединяя линии свободного контура  $L^m R^u$  и пятна контакта  $R^u R^d$ .

На рис. 4.4,В и 4.4,С деформатор 2 мысленно отодвинут от поверхности пятна контакта  $R^u R^d$  вправо и вверх. Распределенная нагрузка  $\mathbf{P}$  условно не показана. Наличие двух рисунков 4.4,В и 4.4,С связано с неоднозначностью напряженного состояния в нижней точке  $R^d$  пятна контакта.

С верхней точкой  $R^u$  ситуация проще. Ранее уже говорилось, что вне зависимости от того, как изменяется значение угла  $\varphi$  по мере перемещения вдоль свободного контура от точки  $L^m$  к точке  $R^u$ , ориентация векторов меньшего  $\sigma_1$  и большего  $\sigma_3$  главных нормальных напряжений известна и соответствует рис. 4.4,В и 4.4,С.

Ориентация векторов касательных напряжений  $\tau|_{R^u}$ , действующих в ближайших окрестностях точки  $R^u$ , понятна как по формальным (в соответствии с правилом, изложенным в п.г. 3.6), так и по объективным (в соответствии с физическим смыслом) признакам.

Поскольку свободный контур  $L^m R^d$  образован бесконечным множеством главных площадок, на которых действует меньшее из главных напряжений  $\sigma_1$ , то применив упоминавшееся правило, делаем вывод, что в окрестностях точки  $R^u$  на пятне контакта  $R^u R^d$  принадлежащем ближайшему слою среды, вектор касательного напряжения  $\tau|_{R^u}$  ориентирован вниз.

С точки зрения физической сути, ориентация вниз векторов касательных напряжений  $\tau|_{R^u R^d}$ , действующих на поверхности среды по всей длине пятна контакта  $R^u R^d$ , обусловлена тем, что провзаимодействовав с деформатором среда вынуждена смещаться вверх. Иного не может быть, ведь она по определению несжимаемая. Векторы напряжений  $\tau|_{R^u R^d}$ , действующих на поверхности деформатора и являющихся реактивными по своей природе, ориентированы в противоположную сторону, т.е. вверх.

В отношении знака касательного напряжения  $\tau|_{R^u R^d}$ , пока определенности нет. Все зависит от того, как определяется угол  $\varphi$  (рис. 4.1). Если в соответствии с рис. 4.1,А, то справедливо правило знаков, изложенное в п.г. 3.6. Если же  $\varphi$  определяется в соответствии с рис. 4.1,В, то приведенное правило следует сменить на обратное. В первом случае  $\tau|_{R^u R^d}$  будет положительным, а во втором — отрицательным.

Напряженное состояние среды в окрестностях нижней точки  $R^d$  может быть идентифицировано также двойко, хотя и в другом смысле.

- Первый вариант (рис. 4.4,В, 4.4,С).

Очевидно, что внешние границы ближайших окрестностей точки  $R^d$  образуются взаимно перпендикулярными поверхностями, одна из которых  $R^u R^d$  ориентирована вертикально, а вторая  $R^d D$  — горизонтально. Вслед-

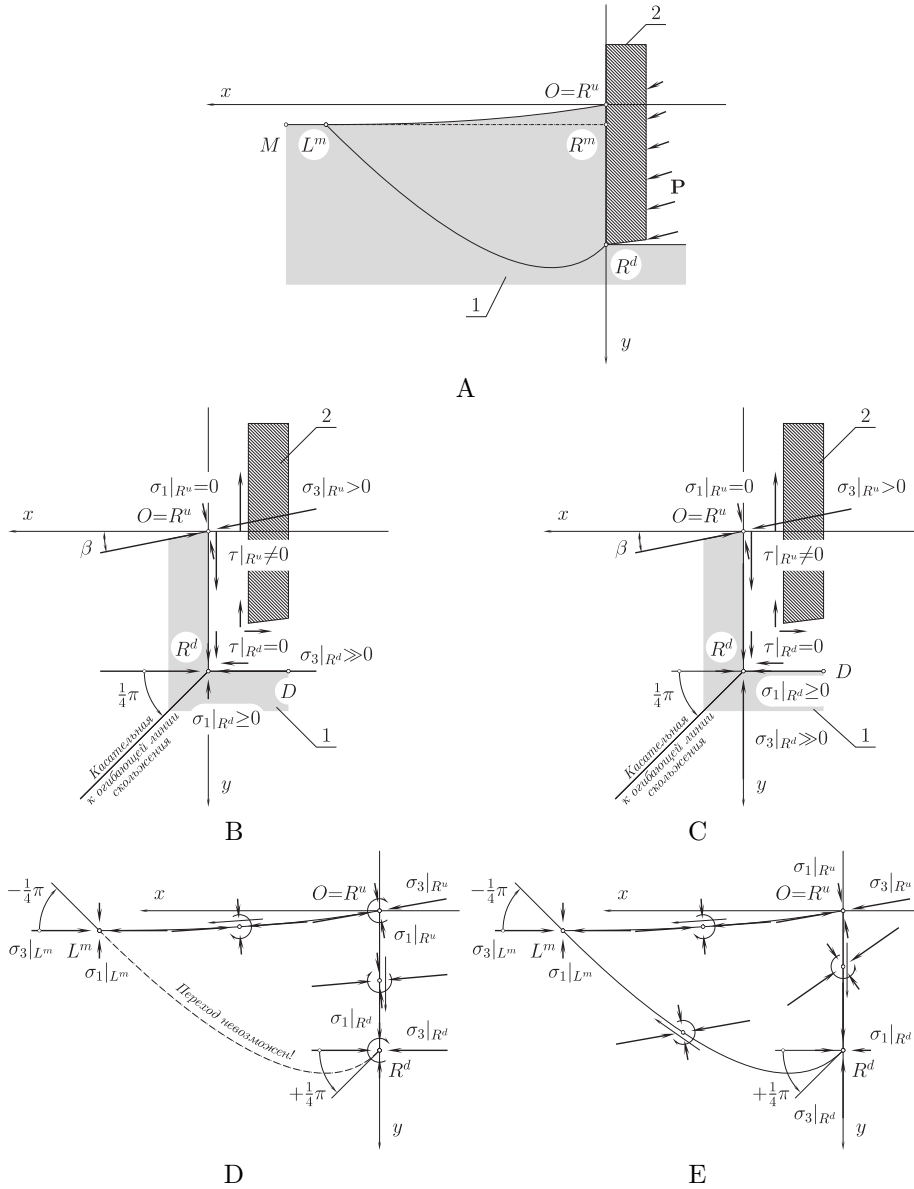


Рис. 4.4. Отвечающие рис. 4.2,В схемы: А) — воздействия деформатора 2 на массив сплошной среды 1; В) и С) — действия главных нормальных  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  и касательных  $\tau$  напряжений в области пятна контакта  $R^u R^d$ ; D) и E) — ориентации векторов напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  вдоль границы области предельного равновесия  $L^m R^u R^d$

ствии того, что нижняя часть деформатора скошена, то с поверхностью  $R^d D$  деформатор может контактировать только в одной точке  $R^d$ , а, значит, на горизонтальную поверхность  $R^d D$  деформатор касательного воздействия не оказывает. Следовательно, в силу правила парности [149, 155, 157, 158, 167], все касательные напряжения  $\tau|_{R^d}$ , действующие в точке  $R^d$  на взаимно перпендикулярных поверхностях  $R^u R^d$  и  $R^d D$ , равны нулю:

$$\tau|_{R^d} = 0. \quad (4.18)$$

Последнее обстоятельство дает основания утверждать, что в ближайших окрестностях точки  $R^d$  направления  $R^u R^d$  и  $R^d D$  совпадают с главными площадками, а, значит, действующие на них нормальные напряжения  $\sigma_1|_{R^d}$  и  $\sigma_3|_{R^d}$  являются также главными.

Дальше проявляется неоднозначность.

Во-первых (рис. 4.4,В), можно утверждать, что поскольку деформатор действует на массив среды в горизонтальном направлении, то, вероятно, именно в этом направлении на площадке, совпадающей с  $R^u R^d$ , действует большее из главных нормальных напряжений:

$$\sigma_3|_{R^d} \gg 0. \quad (4.19)$$

Тогда меньшее главное нормальное напряжение  $\sigma_1|_{R^d}$  действует в точке  $R^d$  на другой горизонтальной площадке, совпадающей с  $R^d D$ :

$$\sigma_1|_{R^d} \geq 0. \quad (4.20)$$

В направлении  $\vec{\sigma}_1|_{R^d}$ , деформатор воздействует на среду только опосредовано, через силу трения, а непосредственного воздействия, в силу своих конструктивных особенностей, не оказывает.

Учитывая выше приведенное, можно заключить, что в точке  $R^d$  угол  $\varphi^{rd} = \varphi|_{R^d}$  между осью абсцисс  $Ox$  и линией действия большего из главных нормальных напряжений  $\sigma_3|_{R^d}$  равен:

$$\varphi^{rd} = \varphi|_{R^d} = \pi n, \quad n \in \{-1, 0, 1\}. \quad (4.21)$$

Во-вторых (рис. 4.4,С), напряженное состояние в ближайших окрестностях точки  $R^d$  можно трактовать и по другому. Исходя из (2.31), касательные напряжения  $\tau|_{R^d}$ , действующие в точке  $R^d$  на взаимно перпендикулярных поверхностях  $R^u R^d$  и  $R^d D$ , будут равными нулю и тогда, когда

$$\varphi^{rd} = \varphi|_{R^d} = \frac{1}{2}\pi + \pi n, \quad n \in \{-1, 0, 1\}. \quad (4.22)$$

В этом случае, по сравнению с предыдущим, площадки действия векторов  $\vec{\sigma}_1|_{R^d}$  и  $\vec{\sigma}_3|_{R^d}$  поменяются местами. Очевидных возражений против такого варианта нет. Из теории предельного равновесия [167] известно, что линии скольжения (характеристики) отклонены от линии действия большего из главных нормальных напряжений  $\sigma_3$  на угол  $\pm \frac{1}{4}\pi$ , а сами они пересекаются друг с другом под прямым углом. Таким образом, есть все основания

утверждать, что огибающая линий характеристик и в первом (рис. 4.4,В), и во втором случае (рис. 4.4,С) выходит из точки  $R^d$  под одним и тем же по отношению к горизонтали углом  $\frac{1}{4}\pi$ , как показано на рисунках.

Чтобы выбрать, какая из приведенных на рис. 4.4,В и 4.4,С схем расстановки главных нормальных напряжений  $\sigma_1|_{R^d}$  и  $\sigma_3|_{R^d}$  является правильной, следует обратиться к соответствующим рис. 4.4,Д и 4.4,Е, и провести согласование схем действия главных нормальных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  для всей замкнутой границы  $L^m R^u R^d$  области предельного равновесия, включающей: кривую свободного контура  $L^m R^u$ ; линию пятна контакта  $R^u R^d$ ; огибающую характеристику или опережающую трещину  $L^m R^d$ .

Начнем с первого, отвечающего рис. 4.4,В и 4.4,Д случая.

По мере перемещения вдоль кривой свободного контура от точки  $R^u$  к точке  $L^m$  группа векторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  незначительно поворачивается по часовой стрелке ровно настолько, что бы векторы большего из главных нормальных напряжений  $\sigma_3$  оставались касательными к  $L^m R^u$ . Так продолжается вплоть до точки  $L^m$ , в которой векторы  $\sigma_3|_{L^m}$  ориентируются горизонтально. Другого варианта развития событий для линии  $L^m R^u$  нет.

На пятне контакта  $R^u R^d$  ситуация развивается подобным образом. По мере перемещения от верхней точки  $R^u$  к нижней  $R^d$  группа векторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  также согласовано поворачивается по часовой стрелке вплоть до горизонтальной ориентации векторов  $\sigma_3|_{R^d}$  в точке  $R^d$ . По сравнению с кривой свободного контура разница состоит в том, что в процессе перехода от  $R^u$  к  $R^d$  ни один из векторов  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  не может стать касательным к  $R^u R^d$ . Иначе это будет означать, что на пятне контакта  $R^u R^d$  между точками  $R^u$  к  $R^d$  найдена главная площадка, на которой касательные напряжения равны нулю. Переход через эту точку будет означать смену знаков касательных напряжений, действующих на  $R^u R^d$ , а это исключено исходя из уже приведенных выше соображений. Такая же невозможная ситуация случится, если в процессе перехода от  $R^u$  к  $R^d$  поворот группы векторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  осуществлять не по часовой стрелке, а против нее.

Дальнейшее перемещение группы векторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  от нижней точки  $R^d$  к верхней точке  $L^m$  огибающей характеристики  $L^m R^d$  имеет специфику. Она состоит в том, что по отношению к векторам  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  характеристика ориентируется всегда бисектрально, а это в свою очередь означает, что поворот группы векторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  обязательно сопровождается искривлением характеристики. Таким образом, если огибающая характеристика  $L^m R^d$ , в процессе перехода от точки  $R^d$  к  $L^m$ , изгибается на  $\frac{1}{2}\pi$  (видно из рис. 4.4,Д) то и группа векторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  в процессе такого перехода должна повернуться на тот же угол  $\frac{1}{2}\pi$ . Но в таком случае векторы  $\sigma_3|_{L^m}$  приобретут вертикальную ориентацию, что невозможно, а, значит, невозможно и показанное на рис. 4.4,В и 4.4,Д напряженное состояние в целом.

Возвратимся ко второму случаю, соответствующему рис. 4.4,С и 4.4,Е.

Ситуация вдоль кривой свободного контура  $L^m R^u$  остается прежней. На пятне контакта  $R^u R^d$  переход от точки  $R^u$  к  $R^d$  сопровождается поворотом группы векторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  против часовой стрелки вплоть до вертикальной

ориентации  $\vec{\sigma}_3$  в точке  $R^d$ . Теперь дальнейший переход от  $R^d$  к  $L^m$  по огибающей  $L^m R^d$  с поворотом группы векторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  по часовой стрелке на угол  $\frac{1}{2}\pi$  становится возможным. В итоге в точке  $L^m$  получается горизонтальная ориентация векторов  $\sigma_3|_{L^m}$ , что и требовалось.

Таким образом, теоретически возможным следует считать соответствующий рис. 4.4,С и 4.4,Е второй случай первого варианта. Далее, имея в виду именно его, приведем некоторые замечания в отношении касательных напряжений  $\vec{\tau}|_{R^d}$ , действующих в нижней точке  $R^d$  пятна контакта  $R^u R^d$ .

Если бы нижняя часть деформатора не имела скоса рис. 4.5,А, то все векторы  $\vec{\tau}|_{R^d}$  были бы не нулевыми и ориентировались бы именно так, как показано на рисунке. В последнем случае примыкающие к точке  $R^d$  и совпадающие с  $R^u R^d$  и  $R^d D$  площадки стали бы не главными, и в процессе перехода от  $R^u$  к  $R^d$  векторы  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  следовало бы “несколько недовернуть” до вертикального положения  $\vec{\sigma}_3|_{R^d}$ , как это показано на рис. 4.4,Е. Дальнейшему переходу вдоль огибающей  $L^m R^d$  это не противоречит рис. 4.5,С.

• *Второй вариант* по своей сути созвучен с утверждением из последнего абзаца, но в основе имеет другую природу. Дело в том, что огибающая  $L^m R^d$  линий характеристик, которая выходит из точки  $R^d$  (рис. 4.4,В; 4.4,С; 4.5В) на самом деле является трещиной. Последнее обстоятельство позволяет полагать, что дальше нее состояние предельного равновесия не распространяется и, следовательно, уже цитированное правило парности касательных напряжений [149, 155, 157, 158, 167] в ближайших окрестностях точки  $R^d$  не выполняется. Из последнего вытекает, что условие (4.18) остается актуальным только для горизонтальной площадки  $R^d D$ :

$$\tau|_{R^d D} = 0, \quad (4.23)$$

а для нижней части пятна контакта  $R^u R^d$  будет справедливо обратное, т.е.

$$\tau|_{R^d} \neq 0. \quad (4.24)$$

В таком случае пятно контакта  $R^u R^d$  вообще не содержит главных площадок, включая свою нижнюю точку  $R^d$ , и в процессе перехода от  $R^u$  к  $R^d$  векторы  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  следует также “несколько недоворачивать” до вертикального положения  $\vec{\sigma}_3|_{R^d}$  (рис. 4.5,С).

Второй вариант, рассмотренный последним является наиболее правдоподобным. Причем его правомерность распространяется и на случай рис. 4.5А, когда деформатор имеет горизонтальный нижний торец. Учитывая сказанное в дальнейшем будем иметь ввиду именно их.

#### 4.4. Адаптация соотношений на координатных прямых

Сущность процесса адаптации соотношений на абсциссе (4.2)–(4.6) и ординате (4.7)–(4.12) состоит в выборе знаков (верхних или нижних) и уточнении интервала (4.17) возможных значений угла  $\varphi$ .

Для осуществления такого рода действий, принимая во внимание рис. 4.2,В и 4.4,С, 4.4,Е или 4.5, обратившись к рис. 4.3 определим возможные

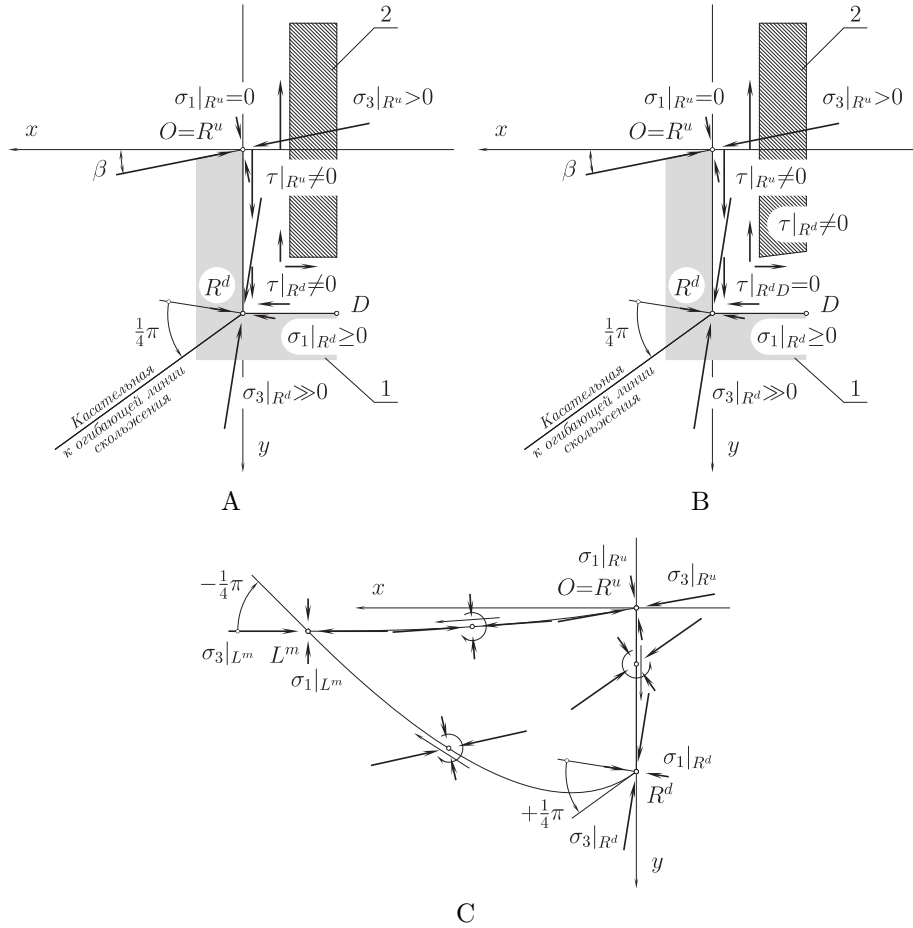


Рис. 4.5. Отвечающие рис. 4.2,В и 4.4,С схемы взаимодействия плоского вертикального деформатора 2 с массивом идеально-связной среды 1 в случае, когда действующие в нижней точке  $R^d$  пятна контакта  $R^u R^d$  касательные напряжения  $\tau|_{R^d}$  не равны нулю: А) — в отличие от рис. 4.2,В и 4.4,С нижний торец деформатора выполнен горизонтальным; В) — нижний торец деформатора выполнен скошенным, в точности, как на рис. 4.2,В и 4.4,С; С) — схема ориентации главных нормальных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  вдоль замкнутой границы области предельного равновесия  $L^m R^u R^d$

варианты значений  $\varphi^{ru} = \varphi|_{R^u}$ ,  $\varphi^{rd} = \varphi|_{R^d}$  и  $\varphi^{lm} = \varphi|_{L^m}$  угла  $\varphi$  в точках  $R^u$ ,  $R^d$  и  $L^m$ , соответственно (табл. 4.1).

Таблица 4.1

**Возможные варианты ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) определение угла**  
 $\varphi^{ru} = \varphi_i^{ru}$ ,  $\varphi^{rd} = \varphi_i^{rd}$  и  $\varphi^{lm} = \varphi_i^{lm}$

Определение углов				Номера соответствующих рисунков
$i$	$\varphi_i^{ru}$	$\varphi_i^{rd}$	$\varphi_i^{lm}$	
1	$\varphi_1^{ru} = \beta$	$\varphi_1^{ru} < \varphi_1^{rd} \leq \frac{1}{2}\pi$	$\varphi_1^{lm} \leq 0$	4.1А, 4.2В, 4.3А, 4.4С, 4.4Е, 4.5
2	$\varphi_2^{ru} = \beta - \pi$	$\varphi_2^{ru} < \varphi_2^{rd} \leq -\frac{1}{2}\pi$	$\varphi_2^{lm} \leq -\pi$	—", —", 4.3С, —", —", —"
3	$\varphi_3^{ru} = \pi + \beta$	$\varphi_3^{ru} < \varphi_3^{rd} \leq \frac{3}{2}\pi$	$\varphi_3^{lm} \leq \pi$	—", —", 4.3Е, —", —", —"
4	$\varphi_4^{ru} = -\beta$	$-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi_4^{rd} < \varphi_4^{ru}$	$\varphi_4^{lm} \leq 0$	4.1В, —", 4.3В, —", —", —"
5	$\varphi_5^{ru} = \pi - \beta$	$-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi_5^{rd} < \varphi_5^{ru}$	$\varphi_5^{lm} \leq \pi$	—", —", 4.3D, —", —", —"
6	$\varphi_6^{ru} = -(\beta + \pi)$	$-\frac{3}{2}\pi \leq \varphi_6^{rd} < \varphi_6^{ru}$	$\varphi_6^{lm} \leq -\pi$	—", —", 4.3F, —", —", —"

Теперь перебрав все варианты определения  $\varphi^{ru} = \varphi_i^{ru}$ ,  $\varphi^{rd} = \varphi_i^{rd}$  и  $\varphi^{lm} = \varphi_i^{lm}$  из табл. 4.1 в сочетании с двумя вариантами знаков в соотношениях (4.2)–(4.6), (4.7)–(4.12) и воспользовавшись графиками рис. 4.6, а также схемой переходов (рис. 4.7), следует определить какой из этих вариантов удовлетворяет текущей задаче.

Под переходом (рис. 4.7) условимся понимать мысленное перемещение вдоль прямых, параллельных осям системы координат  $Oxy$ .

Вначале такое перемещение осуществляется вдоль оси  $Oy$ . Любое текущее и/или конечное положение на  $Oy$  обозначает точка  $R^c$ , которой соответствует значения  $y^c = y|_{R^c}$  и  $\varphi^{rc} = \varphi|_{R^c}$  ординаты  $y$  и угла  $\varphi$ . Если имеется ввиду конкретный  $i$ -тый вариант из табл. 4.1, то угол  $\varphi^{rc}$  обозначается и с нижним индексом —  $\varphi_i^{rc}$ .

После того, как положение точки  $R^c$  фиксировано, осуществляется переход вдоль прямой  $R^cL^c$ , параллельной  $Ox$  оси абсцисс. Направление перемещения совпадает с положительным направлением  $Ox$ . Ордината точки  $L^c$ , располагающейся на огибающей линии скольжения  $R^dL^m$ , совпадает с таковой для  $R^c$ . Значение угла  $\varphi$  в точке  $L^c$  обозначим либо без нижнего индекса  $\varphi^{lc} = \varphi|_{L^c}$ , либо с ним  $\varphi_i^{lc} = \varphi|_{R^c}$ . Последнее обозначение предполагает конкретный  $i$ -тый вариант из табл. 4.1.

• Вариант № 1. Угол  $\varphi^{ru} = \varphi_1^{ru} = \beta$  — относительно малое (меньше  $\frac{1}{2}\pi$ ) положительное число.

По мере перехода (перемещения точки  $R^c$ , (рис. 4.7)) вдоль пятна контакта  $R^uR^d$  от верхней точки  $R^u$ , когда  $y|_{R^c} = y|_{R^u}$ , к нижней  $R^d$ , значение угла  $\varphi_1^{rc} = \varphi|_{R^c}$  в точке  $R^c$  возрастает от  $\varphi_1^{rc} = \varphi_1^{ru} = \beta$  до некоторого нового значения, не превышающего  $\varphi_1^{rd} \leq \frac{1}{2}\pi$ . Синхронно с этим должна увеличиваться и ордината  $y^c$  от минимального значения  $y^{ru} = y|_{R^u} = 0$  (в точке  $R^u$ ) до максимального  $y^d = y|_{R^d}$  (в точке  $R^d$ ). Мысленно остановим точку  $R^c$  на некотором удалении от  $R^d$ . На рис. 4.6,В такому переходу

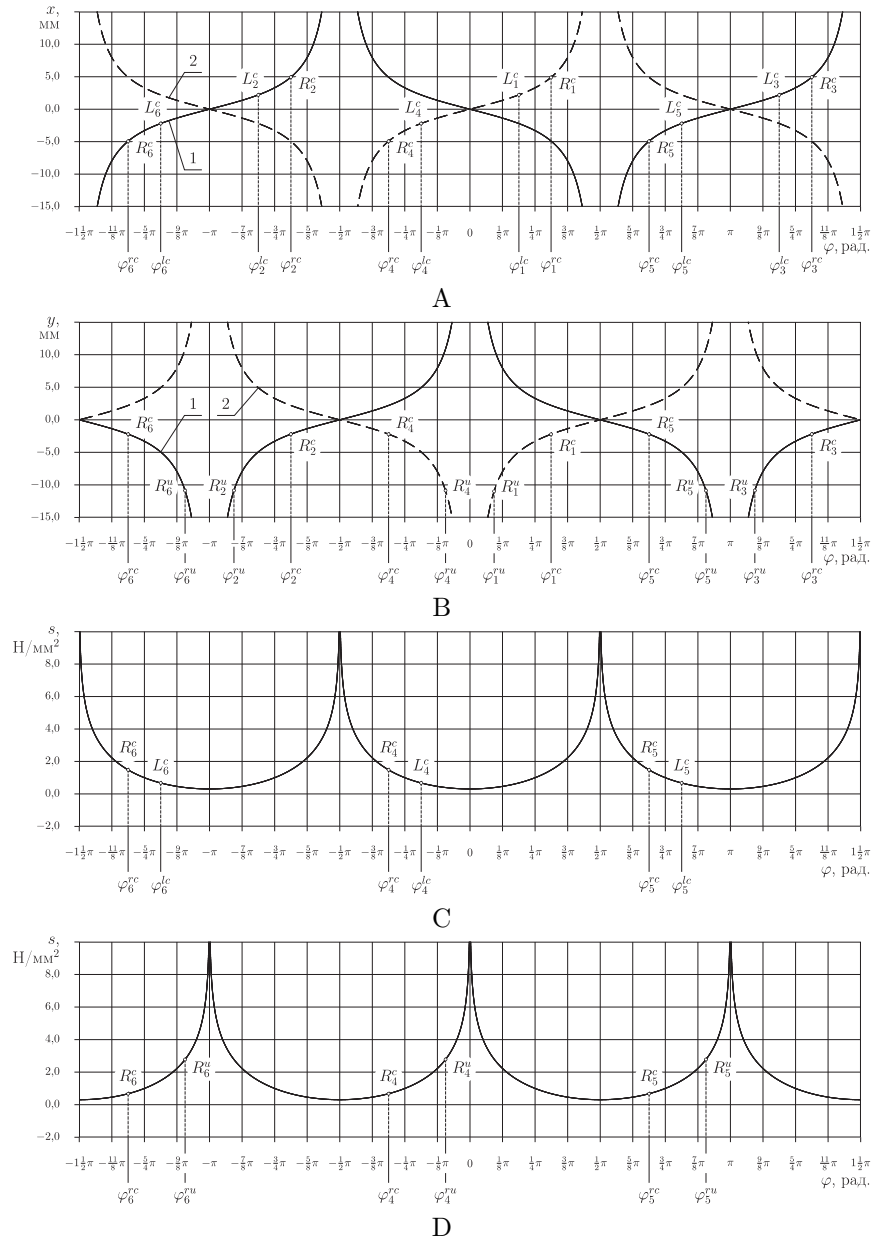


Рис. 4.6. Зависимости координат  $x$  (4.2) (А),  $y$  (4.7) (В) и полусуммы главных нормальных напряжений  $s$  (4.3) (С) и (4.9) (D) от величины угла  $\varphi$  если в (4.2) и (4.7) поочередно применяются верхние (1) и нижние (2) знаки, а параметры принимают следующие значения:  $\gamma = 0$  Н/мм<sup>3</sup>;  $k = 1$  Н/мм<sup>2</sup>;  $C_x^* = C_y^* = 0$  мм;  $\tilde{C}_x = \tilde{C}_y = 1$  Н/мм<sup>2</sup>;  $C^v = 1$ ;  $y = 0$  мм



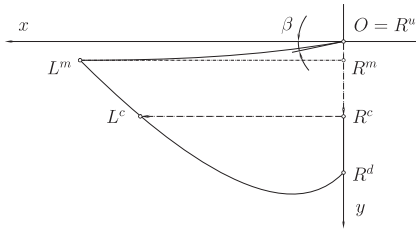


Рис. 4.7. Схема переходов по области  $L^m R^u R^d$

соответствует отрезок дуги  $R_1^u R_1^c$ , принадлежащей кривой № 2, построенной согласно соотношению (4.7) с нижним знаком, где видно, что возрастание угла  $\varphi$  сопровождается ростом ординаты  $y$ , как и должно быть.

В случае дальнейшего перехода от точки  $R^c$  к  $L^c$  (рис. 4.7) значение угла  $\varphi$  должно убывать от текущей величины  $\varphi_1^{rc}$ , вплоть до значения близкого к нулю. Ведь в точке  $L^m$  угол  $\varphi_1^{lm} = \varphi|_{L^m}$

равен нулю (табл. 4.1). Абсцисса  $x$  при этом, напротив, должна увеличиться от нулевого значения до некоторой положительной величины  $x^{lc} = x|_{L^c}$ , соответствующей абсциссе точки  $L^c$ . На рис. 4.6,А такому переходу соответствует отрезок дуги  $R_1^c L_1^c$ , принадлежащей кривой № 2, построенной согласно соотношению (4.2) с нижним знаком, где видно, что уменьшение угла  $\varphi$  сопровождается синхронным уменьшением абсциссы  $x$ , а должно быть наоборот, т.е. в ответ на убывание  $\varphi$  абсцисса  $x$  должна расти. Отсюда вывод: вариант № 1 текущей задаче не соответствует.

• Вариант № 2. Угол  $\varphi^{ru} = \varphi_2^{ru} = \beta - \pi$  — отрицательное число, попадающее в интервал  $[-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ . Анализ этого варианта почти совпадает с первым случаем. Разница состоит в том, что в соотношениях (4.7) и (4.2) теперь следует применить верхние знаки, а на рисунках 4.6,В и 4.6,А анализировать кривые № 1. Все углы  $\varphi_2^{ru}$ ,  $\varphi_2^{rc}$  и  $\varphi_2^{lc}$  на рис. 4.6 показаны. По сравнению с  $\varphi_1^{ru}$ ,  $\varphi_1^{rc}$  и  $\varphi_1^{lc}$  их значения смещены в отрицательную область (влево) на величину  $-\pi$ . В конечном итоге обнаруживаются те же противоречия, что и в предыдущем случае, и следует вывод, что вариант № 2 также не соответствует текущей задаче.

• Вариант № 3. Угол  $\varphi^{ru} = \varphi_3^{ru} = \pi + \beta$  — положительное число, попадающее в интервал  $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ . Этот вариант, почти полностью повторяет предыдущий. Имеющаяся разница состоит в том, что углы  $\varphi_3^{ru}$ ,  $\varphi_3^{rc}$  и  $\varphi_3^{lc}$  смещены по отношению к  $\varphi_2^{ru}$ ,  $\varphi_2^{rc}$  и  $\varphi_2^{lc}$  в положительную область на величину  $2\pi$ . Все они показаны на рис. 4.6. Вывод: вариант № 3 текущей задаче не соответствует.

• Вариант № 4. Угол  $\varphi^{ru} = \varphi_4^{ru} = -\beta$  — отрицательное число, попадающее в интервал  $[-\frac{1}{2}\pi, 0]$ . Этому случаю соответствуют соотношения (4.7) и (4.2) с нижними знаками, и кривые № 2, которые на рис. 4.6,В и 4.6,А изображены пунктиром.

Понятно, что в текущем случае по мере перемещения точки  $R^c$  вниз по лобовой поверхности  $R^u R^d$  значение угла  $\varphi$  должно убывать от текущей величины  $\varphi_4^{ru}$ , вплоть до  $-\frac{1}{2}\pi$  если точка  $R^c$  совпадет с  $R^d$ . Ордината  $y^c$ , наоборот, при этом должна увеличиваться от минимального значения  $y^{ru} = y|_{R^u} = 0$  (в точке  $R^u$ ) до максимального  $y^d = y|_{R^d}$  (в точке  $R^d$ ). Обратившись к рис. 4.6,В, проанализировав отрезок  $R_4^u R_4^c$  кривой № 2, не трудно убедиться, что это именно так и происходит.

Более того, если положение точки  $R^c$  фиксировать в некотором промежуточном состоянии между точками лобовой поверхности  $R^u$ ,  $R^d$  и далее проследить изменение значения угла  $\varphi$  по мере перехода вдоль  $R^cL^c$  (рис. 4.7) по горизонтали (на рис. 4.6,А такому переходу соответствует отрезок  $R_4^cL_4^c$  кривой № 2), то окажется, что и угол  $\varphi$  и абсцисса  $x$  растут согласовано достигая максимума в точке  $L^c$ . Так и должно быть, значит, вариант № 4 удовлетворяет физической сути рассматриваемой задачи.

• Вариант № 5. Угол  $\varphi_5^{ru} = \pi - \beta$  — положительное число, попадающее в интервал  $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ . От предыдущего случая он отличается тем, что ему соответствуют соотношения (4.7) и (4.2) с верхними знаками, и сплошные кривые № 1 на рис. 4.6,В и 4.6,А. Углы  $\varphi_5^{ru}$ ,  $\varphi_5^{rc}$  и  $\varphi_5^{lc}$  теперь смещены по отношению к  $\varphi_4^{ru}$ ,  $\varphi_4^{rc}$  и  $\varphi_4^{lc}$  в положительную область на величину  $\pi$ . В остальном все закономерности сохраняются, а сам случай № 5 также удовлетворяет физической сути рассматриваемой задачи.

• Вариант № 6. Угол  $\varphi_6^{ru} = -(\beta + \pi)$  — отрицательное число, попадающее в интервал  $[-\frac{3}{2}\pi, -\pi]$ . Этот вариант практически полностью повторяет предыдущий, с той лишь разницей, что углы  $\varphi_6^{ru}$ ,  $\varphi_6^{rc}$  и  $\varphi_6^{lc}$  теперь смещены по отношению к  $\varphi_5^{ru}$ ,  $\varphi_5^{rc}$  и  $\varphi_5^{lc}$  в отрицательную область на  $-2\pi$ , и также удовлетворяет физической сути поставленной задачи.

Теперь обратимся к рис. 4.6,С и 4.6,Д. На них показаны графики полусуммы главных нормальных напряжений  $s$ , как функции угла  $\varphi$ , построенные в соответствии с соотношениями (4.3) и (4.9).

Отрезки  $R_i^cL_i^c$ , где  $(i = 4, 5, 6)$ , (рис. 4.6,С) иллюстрируют зависимость  $s(\varphi)$ , реализующуюся вдоль прямых  $R^cL^c$  (рис. 4.7), параллельных оси  $Ox$ . Как видим, по мере удаления от деформатора (точки  $R^c$ ) интенсивность напряжений падает, что также удовлетворяет физической сути задачи.

Такая же взаимосвязь  $s(\varphi)$  наблюдается и вдоль отрезков  $R_i^uR_i^c$ , где  $(i = 4, 5, 6)$ , (рис. 4.6,Д) относящимся к пятну контакта  $R^uR^d$  (рис. 4.7). Чем ближе к нижней точке  $R^d$  пятна контакта, тем напряжения меньше. Это, вероятно, справедливо для невесомой среды. Как будут вести себя упомянутые закономерности в случае, когда среда будет обладать некоторым удельным весом, изучим несколько позже.

Вывод — варианты 4, 5 и 6 в физическом смысле являются достоверными и эквивалентными. Между ними можно и нужно осуществить выбор. Из соображений удобства, чтобы не иметь дела с углами  $\varphi < 0$ , остановимся на варианте № 5 (табл. 4.1). Он предполагает использование соотношений (4.2) и (4.7) с верхними знаками и следующие значения углов:

$$\varphi^{ru} = \pi - \beta, \quad \varphi^{rd} \in \left[ \frac{1}{2}\pi, \pi - \beta \right], \quad \varphi^{lm} = \pi, \quad (4.25)$$

которым соответствует полный интервал

$$\varphi \in \left[ \frac{1}{2}\pi, \pi \right]. \quad (4.26)$$

Теперь, принимая во внимание вышесказанное, из выражений (4.2)–(4.12) получим рабочий вариант соотношений:

а) соотношения на абсциссе ( $y = \text{const}$ )

$$x|_{y=\text{const}} = 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y}{2k} \text{tg } \varphi + C_y^*, \quad (4.27)$$

$$s|_{y=\text{const}} = -k \ln (\cos^2 \varphi) + C_y^-; \quad (4.28)$$

где

$$C_y^- = \tilde{C}_y - k \ln (2(C^v)^2), \quad (4.29)$$

$\varphi$  попадает в интервал (4.26), а  $\tilde{C}_y$ ,  $C_y^*$ ,  $C_y^-$  и  $C^v$  — постоянные величины;

б) соотношения на ординате ( $x = \text{const}$ )

$$y|_{x=\text{const}} = 2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \text{ctg } \varphi + C_x^*, \quad (4.30)$$

$$s|_{x=\text{const}} = -k \ln (\sin^2 \varphi) + \gamma y - k \ln (2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (4.31)$$

$$s|_{x=\text{const}} = -k \ln (\sin^2 \varphi) + 2k \gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \text{ctg } \varphi + C_x^-, \quad (4.32)$$

где

$$C_x^- = \gamma C_x^* - k \ln (2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (4.33)$$

$\varphi$  попадает в интервал (4.26), а  $\tilde{C}_x$ ,  $C_x^*$  и  $C_x^-$  — постоянные величины.

Применительно к задаче рис. 4.2,В, когда напряженное состояние соответствует рис. 4.4,С и 4.4,Е, в отношении угла  $\beta$  можно утверждать, что  $\beta \neq 0$ . В противном случае задача будет соответствовать случаю рис. 4.2,А, когда внешнее силовое воздействие отсутствует ( $\mathbf{P} = 0$ ). В отношении угла  $\varphi^{rd}$  (4.25) следует заметить, что его можно определить строго:

$$\varphi^{rd} = \frac{1}{2}\pi, \quad (4.34)$$

а можно приближенно:

$$\varphi^{rd} = \frac{1}{2}\pi + \varepsilon, \quad (4.35)$$

где  $\varepsilon$  — бесконечно малое (приемлемое для ЭВМ) положительное число.

В случае, когда угол  $\varphi^{rd}$  определяется точно (4.34), то в процессе решения задачи алгоритмы придется строить, обходя необходимость вычисления  $x$  (4.27) и  $s$  (4.28) в точке  $\varphi = \varphi^{rd}$ . Такая возможность есть, поскольку абсцисса  $x|_{\varphi^{rd}} = x|_{R^d}$  известна (равна нулю) по условию задачи, а полусумму главных нормальных напряжений  $s|_{\varphi^{rd}} = s|_{R^d}$ , действующих в точке  $R^d$  можно вычислить, воспользовавшись соотношениями (4.31) или (4.32).

Вариант (4.35) не накладывает ограничений на вычисление  $x$  (4.27) и  $s$  (4.28) в точке  $\varphi = \varphi^{rd}$ , хотя и является менее строгим.

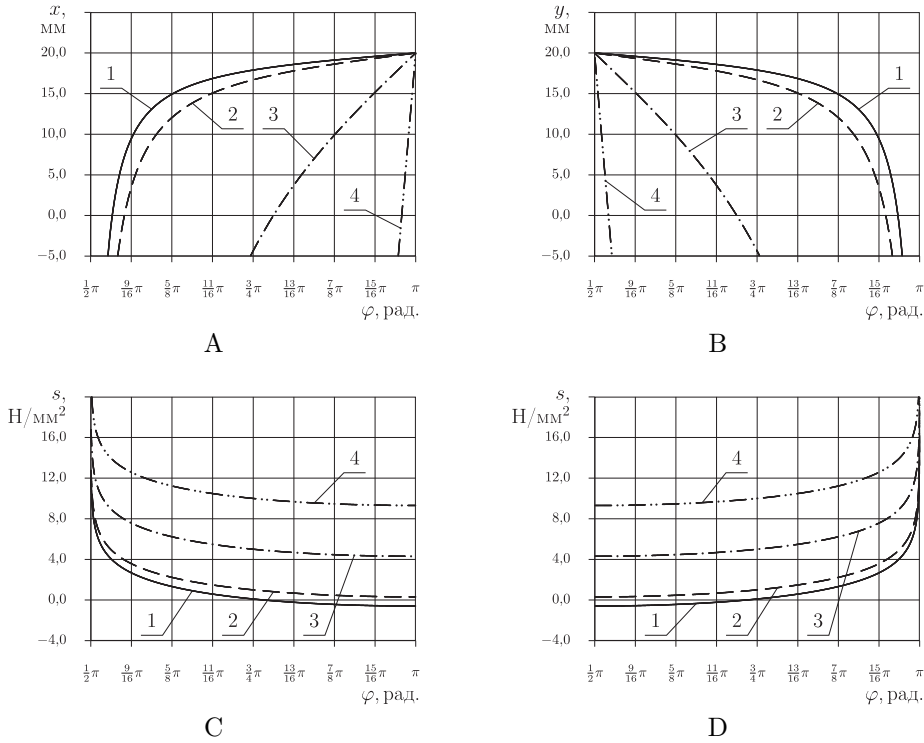


Рис. 4.8. Зависимости координат  $x$  (4.27) (А),  $y$  (4.30) (В) и полусуммы главных нормальных напряжений  $s$  (4.28) (С) и (4.32) (D) от величины угла  $\varphi$ , если:  $\gamma = 0,0 \text{ Н/мм}^3$ ,  $k = 1,0 \text{ Н/мм}^2$ ,  $C_x^* = C_y^* = 20,0 \text{ мм}$ ,  $C^v = 1,0$ ,  $y = 0,0 \text{ мм}$  (только для выражения (4.27)), а  $\tilde{C}_x = \tilde{C}_y$  и принимают ряд фиксированных значений (в  $\text{Н/мм}^2$ ): 0,1 (1); 1,0 (2); 5,0 (3); 10,0 (4)

4.4.1. Анализ рабочего варианта соотношений на декартовых координатах. На рис. 4.8 представлены отвечающие текущему случаю графики функциональных зависимостей  $x = x(\varphi)$  (4.27),  $s = s(\varphi)$  (4.28),  $y = y(\varphi)$  (4.30) и  $s = s(\varphi)$  (4.31). Из соотношения (4.27) и рис. 4.8,А следует, что в ответ на монотонное увеличение угла  $\varphi$ , когда тот пробегает весь свой допустимый интервал (4.26), абсцисса  $x(\varphi)$  также монотонно увеличивается, что и требовалось. Интервал возможных значений  $x(\varphi)$  при одних и тех же значениях  $\varphi$  определяется величиной постоянной  $\tilde{C}_y$ . Чем она больше, тем интенсивнее изменяется  $x$  в ответ на изменение  $\varphi$ . Изменение постоянной  $C_y^*$  приводит к пропорциональному вертикальному смещению графиков на рис. 4.8,А.

Функциональная связь ординаты  $y$  с углом  $\varphi$  (4.30) рис. 4.8,В практически совпадает с  $x(\varphi)$ . Разница состоит только в том, что по мере увеличения значения  $\varphi$  ордината  $y$  убывает. Интенсивность роста ординаты  $y$  также за-

висит от величины постоянной  $\tilde{C}_x$ , а минимально возможное ее значение — от  $C_x^*$ . Чем больше постоянная  $C_x^*$ , тем больше значение  $y(\varphi)$ .

Адекватность графиков полусуммы главных нормальных напряжений  $s(\varphi)$  (4.28) (рис. 4.8,С) вполне очевидна. Ведь понятно, что в реальной ситуации (рис. 4.2,В) по мере роста абсциссы  $x$  или, что то же самое, по мере удаления от оси  $Oy$  влево, полусумма главных нормальных напряжений  $s$  должна убывать. Влияние постоянной  $\tilde{C}_y$  на функциональную связь  $s(\varphi)$  понятна из соотношения (4.28) и выражения (4.29), определяющего постоянную  $C_y^-$ . Увеличение значения  $\tilde{C}_y$  приводит к смещению графиков  $s(\varphi)$  вверх. Если же  $\tilde{C}_y$  уменьшается, то графики  $s(\varphi)$  опускаются. Форма кривых  $s(\varphi)$  при этом остается неизменной.

Теперь обратимся к оценке достоверности зависимости  $s(\varphi)$  (4.32), показанной на рис. 4.8,Д. Из анализа рис. 4.8,В и 4.8,Д следует, что величина  $s$  растет по мере уменьшения  $y$ . Применительно к задаче (рис. 4.2,В), такая закономерность представляется не совсем адекватной. Чтобы убедиться в обратном, следует дополнительно исследовать, как на нее влияет вес среды  $\gamma$ , ведь сейчас рассматривается невесомая среда. Влияние величины постоянной  $\tilde{C}_x$  на функциональную связь  $s(\varphi)$  (4.32) (рис. 4.8,Д) совпадает с предыдущем случаем. Изменение величины  $\tilde{C}_x$  приводит к пропорциональному смещению графиков  $s(\varphi)$  (4.32) (рис. 4.8,Д) по вертикали.

Далее рассмотрим случай, когда  $\gamma > 0$ . Из рис. 4.9 видно, что закономерности  $s(\varphi)|_{x=\text{const}}$  меняют свой характер в зависимости от величины  $\gamma$ . Если среда невесомая, то значение  $s(\varphi)$  прямо пропорционально величине  $\varphi$ . Если же среда, наоборот, имеет значительный удельный вес, например,  $\gamma \geq 1,0 \text{ Н/мм}^3$ , то функциональная связь  $s(\varphi)$  становится обратно пропорциональной. При средних значениях  $\gamma$ , в области больших значений  $\varphi$  близких к  $\pi$ , функция  $s(\varphi)$  имеет локальный максимум.

На первый взгляд столь сложная зависимость функциональной связи  $s(\varphi)$  (4.32) от удельного веса среды  $\gamma$  с реальным физическим смыслом не согласуется. На самом деле это не так. Когда среда имеет большой удельный вес, то она способна к самоподжатию. Величина  $s$  растет пропорционально росту ординаты, т.е. когда  $\varphi$  убывает (рис. 4.8,В). Процессу самоподжатия препятствует связность среды (сцепление  $k$ ). Чем меньше удельный вес среды, тем меньше самоподжатие, и тем больше противодействие от проявления связности. Результатом такого противодействия является появление упоминавшегося локального максимума. В случае невесомой среды эффект самоподжатия отсутствует вовсе, а проявление связности приводит к затуханию интенсивности напряженного состояния по мере удаления от области внешнего воздействия на среду (от пятна контакта), причем неважно в какую сторону, например, в сторону увеличения ординаты  $y$ . Значит в таком случае  $s$  должно убывать в ответ на увеличение  $y$ . Сопоставив между собой рис. 4.8,В и 4.9 убеждаемся, что так оно и есть.

Влияние постоянной  $\tilde{C}_x$  на функциональную связь  $s = s(\varphi)$  (4.32) также иллюстрирует рис. 4.9. Увеличение  $\tilde{C}_x$  приводит: во-первых, к смещению

графиков вверх или, что то же, к увеличению минимально возможного значения  $s$  и, во-вторых, к растягиванию графиков по вертикали вдоль оси  $s$ , т.е. к увеличению темпов изменения  $s(\varphi)$  при том же изменении  $\varphi$ .

Вывод — исходя из физической сути решаемой задачи (рис. 4.2,В), закономерности  $s(\varphi)|_{x=\text{const}}$  (4.32) (рис. 4.9) являются адекватными.

4.4.2. Компоненты тензора напряжений на осях декартовых координат. Используя соотношения на абсциссе (4.28) и выражения (2.31), получаем зависимости  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  от угла  $\varphi$ :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} = -k [\ln(\cos^2 \varphi) \mp \cos 2\varphi] + C_y^-, \quad (4.36)$$

$$\sigma_{xy} = k \sin 2\varphi,$$

выполняющиеся вдоль координатных прямых  $y = \text{const}$ . Графики  $s(\varphi)$  (4.28),  $\sigma_{xx}(\varphi)$ ,  $\sigma_{yy}(\varphi)$  и  $\sigma_{xy}(\varphi)$  (4.36) представлены на рис. 4.10.

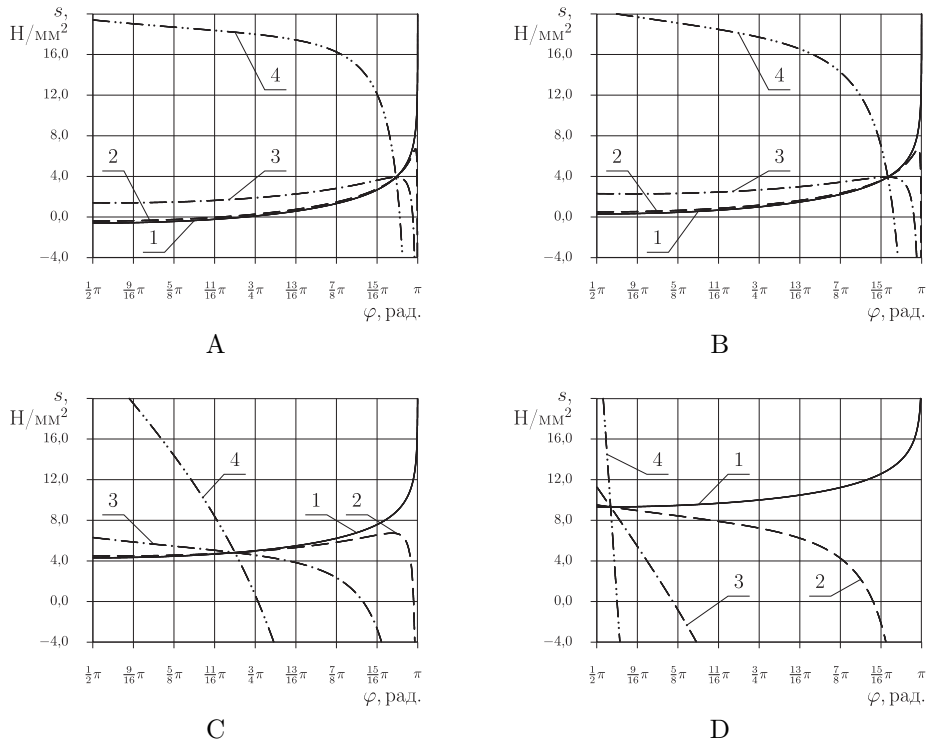


Рис. 4.9. Зависимости полусуммы главных напряжений  $s$  (4.32) от величины угла  $\varphi$  для различных значений постоянной  $\tilde{C}_x$  (0,1 (А); 1,0 (В); 5,0 (С); 10,0 (D); (в  $\text{H}/\text{мм}^2$ )) и удельного веса среды  $\gamma$  (0,0 (1); 0,01 (2); 0,1 (3); 1,0 (4); (в  $\text{H}/\text{мм}^3$ )), если:  $k = 1,0 \text{ H}/\text{мм}^2$ ,  $C^v = 1,0$ , а  $C_x^* = 20,0 \text{ мм}$

Аналогичным образом, выполнив подстановку (4.32) в (2.31), получаем зависимости компонентов тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  от угла  $\varphi$ , выполняющиеся вдоль линий  $x = \text{const}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} = -k \left[ \ln(\sin^2 \varphi) - 2\gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi \mp \cos 2\varphi \right] + C_x^-, \quad (4.37)$$

$$\sigma_{xy} = k \sin 2\varphi.$$

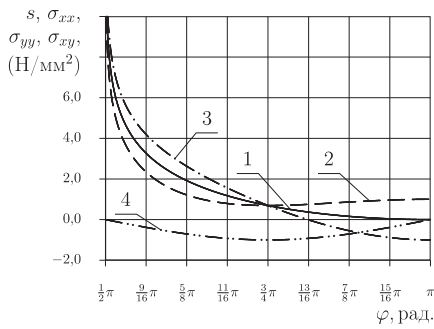


Рис. 4.10. Полусумма главных нормальных напряжений  $s$  (1) (4.28) и компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  (2),  $\sigma_{yy}$  (3) и  $\sigma_{xy}$  (4) (4.36) как функции угла  $\varphi$ , если:  $k = 1,0 \text{ Н/мм}^2$  и  $C_y^- = 0,0 \text{ мм}$

в интервале  $\varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi]$  (4.26) кривая  $\sigma_{xy}(\varphi)$  симметрична относительно значения  $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ , в котором достигает минимума. При этом же значении  $\varphi = \frac{3}{4}\pi$  графики  $s$  и нормальных компонентов  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  пересекаются. Это справедливо при любых значениях  $\gamma$ .

Решив соотношения на абсциссе  $x|_{y=\text{const}} = x(\varphi)$  (4.27) и ординате  $y|_{x=\text{const}} = y(\varphi)$  (4.30) относительно угла  $\varphi$ , учитывая возможный интервал значений  $\varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi]$  (4.26), соответственно получаем:

$$\varphi|_{y=\text{const}} = \pi + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{x - C_y^*}{2k} \exp \frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k} \right\}, \quad (4.38)$$

$$\varphi|_{x=\text{const}} = \pi + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2k}{y - C_x^*} \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \right\}. \quad (4.39)$$

Теперь предварительно выполнив подстановку  $\varphi$  из выражения (4.38) в уравнения (4.28), (4.36), а также  $\varphi$  из (4.39) в (4.32), (4.37), построим два комплекта графиков: первый, для  $s(x)$ ,  $\sigma_{xx}(x)$ ,  $\sigma_{yy}(x)$ ,  $\sigma_{xy}(x)$  и  $\varphi(x)$  рис. 4.12, а второй, для  $s(y)$ ,  $\sigma_{xx}(y)$ ,  $\sigma_{yy}(y)$ ,  $\sigma_{xy}(y)$  и  $\varphi(y)$  рис. 4.13.

Графики для полусуммы главных нормальных напряжений  $s(\varphi)$  (4.32) и компонентов тензора напряжений  $\sigma_{xx}(\varphi)$ ,  $\sigma_{yy}(\varphi)$  и  $\sigma_{xy}(\varphi)$  (4.37) представлены на рис. 4.11. Рисунки 4.11 хорошо согласуются с рис. 4.9 и не содержат особенностей. Нормальные компоненты  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  (4.37) в общем повторяют закономерности, обнаруженные для полусуммы главных напряжений  $s$  (4.32) и связанные, в частности, с зависимостью  $s$  от  $\gamma$ . Впрочем, это не удивительно, ведь выражения  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  (4.37) совпадают с таковыми для  $s$  (4.32) с точностью  $\pm k \cos 2\varphi$ . Зависимость касательной компоненты  $\sigma_{xy}$  (4.37) от угла  $\varphi$  принципиально иная и никак не связана ни с  $\gamma$ , ни с  $s$ . На интервале

Анализ графиков рис. 4.12 показывает, что изменение  $\tilde{C}_y$  ведет к горизонтальному масштабированию кривых  $s(x)$ ,  $\sigma_{xx}(x)$ ,  $\sigma_{yy}(x)$  и  $\sigma_{xy}(x)$ , а также  $\varphi(x)$ . Чем больше  $\tilde{C}_y$ , тем сильнее перечисленные кривые вытягиваются вдоль оси абсцисс. Постоянная  $C_y^*$  отвечает за горизонтальное перемещение графиков. Чтобы при  $x = 40,0$  мм значение угла  $\varphi(x)$  равнялось  $\pi$ , необходимо положить, что  $C_y^* = 40,0$  мм. В таком случае в точке  $x = 40,0$  кривые  $s(x)$  и  $\sigma_{yy}(x)$  достигают минимума. Значения  $s(x)$  и  $\sigma_{yy}(x)$  тем больше, чем меньше  $x$ . Функция  $\varphi(x)$  ведет себя монотонно и на всем охваченном отрезке  $x$  экстремумов не имеет, что согласуется с рис. 4.8,А. Зависимости  $\sigma_{xx}(x)$  и  $\sigma_{xy}(x)$ , напротив, имеют локальные экстремумы.

Важным является тот факт, что большим значениям  $x$  соответствуют меньшие значения  $s(x)$  и  $\sigma_{yy}(x)$ . При надлежащем подборе постоянных, в частности  $C_y^-$ , можно добиться того, что компонента  $\sigma_{yy}(x)$  будет достигать своего нулевого значения, когда угол  $\varphi(x) = \pi$  и абсцисса  $x = x|_{L^m}$ , т.е. соответствуют точке  $L^m$  выхода на дневную поверхность огибающей характеристики рис. 4.4,Е.  $\sigma_{xx}$  при этом останется положительным. Все приведенное согласуется с реальностью. Ранее говорилось, что при удалении

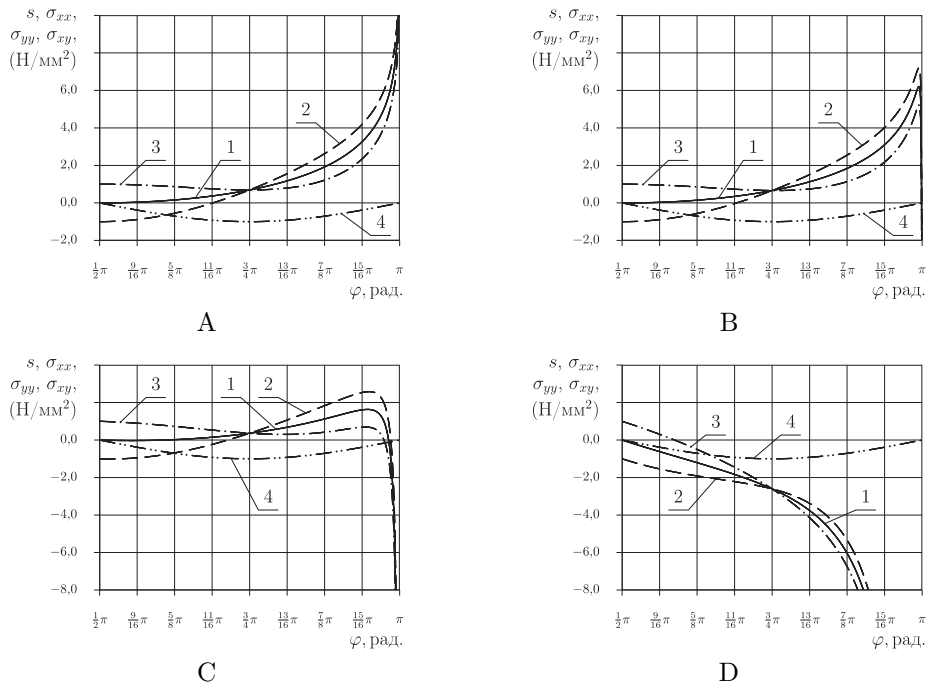


Рис. 4.11. Полусумма главных напряжений  $s$  (1) (4.32) и компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  (2),  $\sigma_{yy}$  (3) и  $\sigma_{xy}$  (4) (4.37) как функции угла  $\varphi$  для:  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\tilde{C}_x = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $C_x^- = 0,0$  мм и четырех значений удельного веса среды  $\gamma$  (в Н/мм<sup>3</sup>): А — 0,0; В — 0,01; С — 0,1; D — 1,0



от деформатора интенсивность действующих напряжений должна падать, в то время как вдоль огибающей характеристики предельное равновесие должно сохраняться. В данном случае оно достигается за счет неравенства  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ , которые в точке  $L^m$  совпадают с  $\sigma_3|_{L^m}$  и  $\sigma_1|_{L^m}$ . На последнее указывает напряжение  $\sigma_{xy}(x)$ , которое в точке  $x = x|_{L^m}$  равно нулю.

Детально в этом вопросе сможем разобраться после того, как построим сетку линий скольжения и рассчитаем компоненты тензора напряжений для всей области предельного равновесия  $L^m R^u R^d$  (рис. 4.4).

Наиболее важной особенностью функциональных связей  $s(y)$ ,  $\sigma_{xx}(y)$  и  $\sigma_{yy}(y)$  (рис. 4.13) является их зависимость от величины удельного веса  $\gamma$ . Если при малых значениях  $\gamma$ , например, как на рис. 4.13,А ( $\gamma = 0$ ), 4.13,В ( $\gamma = 0,01 \text{ Н/мм}^3$ ), полусумма главных напряжений  $s(y)$  и горизонтальная компонента  $\sigma_{xx}(y)$  монотонно убывают, то при большом удельном

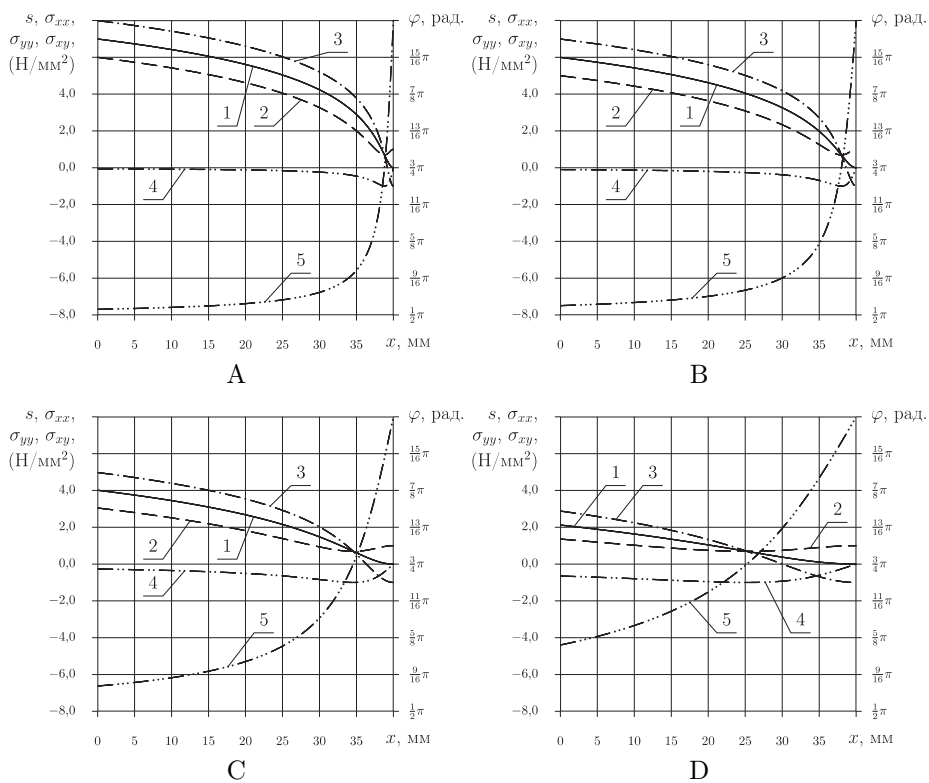


Рис. 4.12. Полусумма главных нормальных напряжений  $s$  (1) (4.28), компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  (2),  $\sigma_{yy}$  (3) и  $\sigma_{xy}$  (4) (4.36), а также угол  $\varphi$  (5) (4.38) как функции абсциссы  $x$  для:  $y = 0,0 \text{ мм}$ ,  $k = 1,0 \text{ Н/мм}^2$ ,  $\gamma = 0,00001 \text{ Н/мм}^3$ ,  $C_y^* = 40,0 \text{ мм}$ ,  $C_y^- = 0,0 \text{ мм}$  и четырех значений постоянной  $\tilde{C}_y$  (в  $\text{Н/мм}^2$ ): А —  $-1,0$ ; В —  $0,0$ ; С —  $2,0$ ; D —  $4,0$

весе, например, когда  $\gamma = 1,0 \text{ Н/мм}^3$  (рис. 4.13,D) они монотонно возрастают. В случае промежуточной величины удельного веса, например, когда  $\gamma = 0,1 \text{ Н/мм}^3$  (рис. 4.13,C), в ответ на увеличение ординаты  $y$  величины  $s(y)$  и  $\sigma_{xx}(y)$  сначала возрастают, а потом убывают. Вертикальная компонента  $\sigma_{yy}(y)$  во взаимосвязи с ординатой  $y$  ведет себя подобно  $s(y)$  и  $\sigma_{xx}(y)$ , с той лишь разницей, что когда  $\sigma_{xx}(y) > s(y)$  то  $\sigma_{yy}(y) < s(y)$  и, наоборот, если  $\sigma_{xx}(y) < s(y)$  то  $\sigma_{yy}(y) > s(y)$ . Кроме этого, при небольших значениях удельного веса среды, вертикальная компонента тензора напряжений  $\sigma_{yy}(y)$  в области больших значений  $y$  может иметь локальный минимум.

Все общие закономерности проявления функциональных связей  $s(y)$ ,  $\sigma_{xx}(y)$  и  $\sigma_{yy}(y)$  обусловлены балансом между реализацией упоминавшегося ранее процесса самоподжатия и проявления связности и вполне согласо-

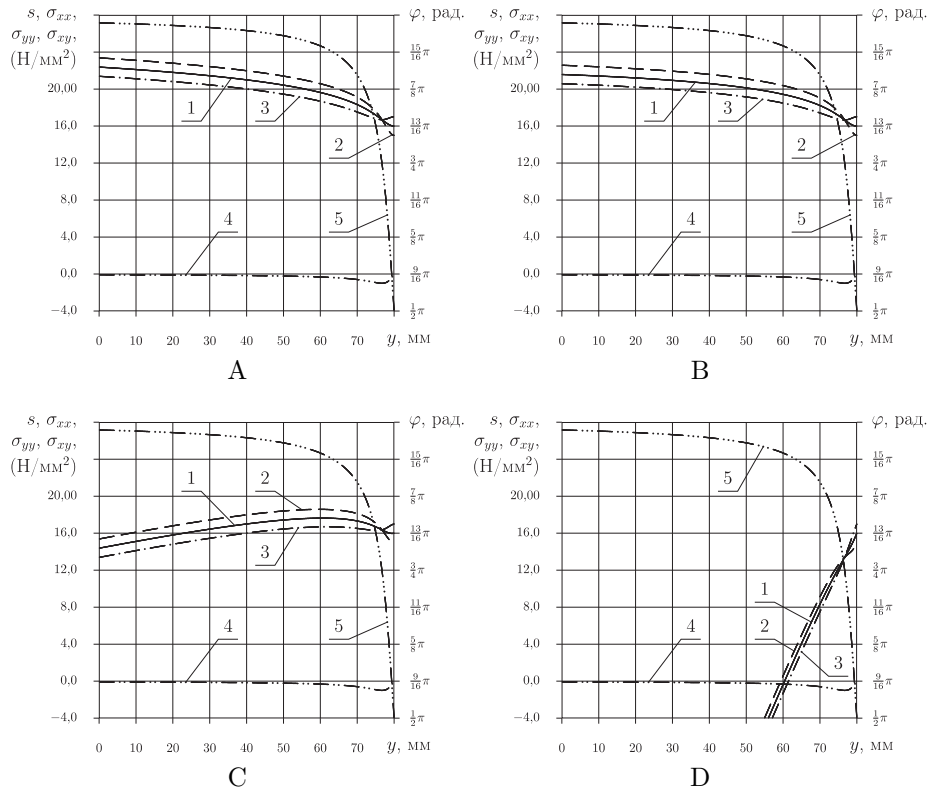


Рис. 4.13. Полусумма главных нормальных напряжений  $s$  (1) (4.32), компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  (2),  $\sigma_{yy}$  (3) и  $\sigma_{xy}$  (4) (4.37), а также угол  $\varphi$  (5) (4.39) как функции ординаты  $y$  для:  $k = 1,0 \text{ Н/мм}^2$ ,  $\tilde{C}_x = 1,0 \text{ Н/мм}^2$ ,  $C_x^* = 80,0 \text{ мм}$ ,  $C_x^- = 16,0 \text{ мм}$  и четырех значений удельного веса среды  $\gamma$  (в  $\text{Н/мм}^3$ ): А — 0,0; В — 0,01; С — 0,1; D — 1,0

ется с ранее рассмотренными закономерностями, касающихся  $s(\varphi)|_{x=\text{const}}$ ,  $\sigma_{xx}(\varphi)|_{x=\text{const}}$ ,  $\sigma_{yy}(\varphi)|_{x=\text{const}}$  (рис. 4.11) и  $y(\varphi)|_{x=\text{const}}$  (рис. 4.8,В).

В отношении связи напряжения  $\sigma_{xy}(y)$  с ординатой  $y$  заметим, что имеющийся минимум существенно смещен в сторону больших значений  $y$ . Зависимость угла  $\varphi(y)$  от  $y$  — монотонно убывающая (рис. 4.13). Изменение  $C_x^-$  приводит к плоскопараллельному переносу кривых  $s(y)$ ,  $\sigma_{xx}(y)$  и  $\sigma_{yy}(y)$  по вертикали, а изменение  $C_x^*$  к подобному смещению их по горизонтали.

Увеличение постоянной  $\tilde{C}_x$  влечет за собой масштабирование (растяжение) всех графиков зависимостей  $s(y)$ ,  $\sigma_{xx}(y)$ ,  $\sigma_{yy}(y)$ ,  $\sigma_{xy}(y)$  и  $\varphi(y)$  по ординате (рис. 4.14) и одновременное смещение левых частей графиков напряжений  $s(y)$ ,  $\sigma_{xx}(y)$  и  $\sigma_{yy}(y)$  вниз. В частности, приводит к смещению точки пересечения кривых  $s(y)$ ,  $\sigma_{xx}(y)$  и  $\sigma_{yy}(y)$ , а также максимума касательного напряжения  $\sigma_{xy}(y)$  в область меньших значений  $y$  и напряжений.

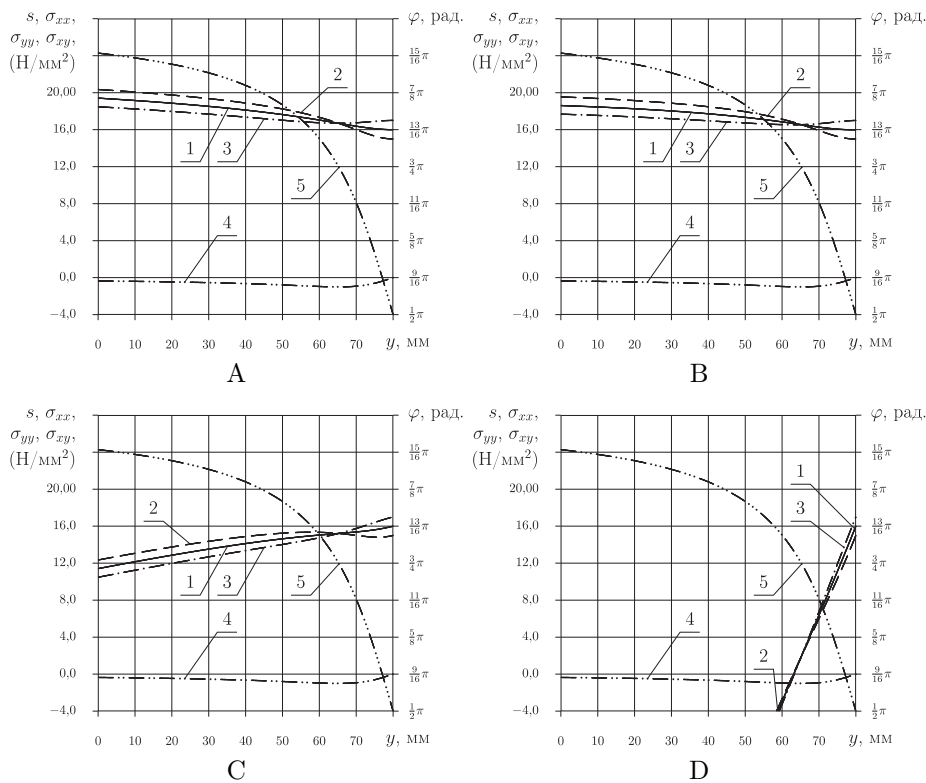


Рис. 4.14. Полусумма главных нормальных напряжений  $s$  (1) (4.32), компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  (2),  $\sigma_{yy}$  (3) и  $\sigma_{xy}$  (4) (4.37), а также угол  $\varphi$  (5) (4.39) как функции ординаты  $y$  для:  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\tilde{C}_x = 4,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $C_x^* = 80,0$  мм,  $C_x^- = 16,0$  мм и четырех значений удельного веса среды  $\gamma$  (в Н/мм<sup>3</sup>): А — 0,0; В — 0,01; С — 0,1; D — 1,0

Более подробные комментарии в отношении адекватности рис. 4.10–4.14 реальным процессам отложим до полного решения задачи (рис. 4.2,В).

4.5. Формулировка граничных условий,  
действующих вдоль пятна контакта

Граничные условия, действующие вдоль пятна контакта  $R^u R^d$  среды с деформатором (рис. 4.2,В и 4.4,С), по существу, являются условиями трения, сформулировать которые можно, воспользовавшись работой [167].

Очевидно, что касательные напряжения, развивающиеся на элементарных площадках в приповерхностном слое вдоль пятна контакта  $R^u R^d$ , уравновешиваются силами трения, действующими на ближайших внешних параллельных им поверхностях деформатора (рис. 4.4,С). Следовательно, первые не могут превышать последних, а, значит, для  $R^u R^d$  записываем:

$$|\sigma_{xy}| \leq f \sigma_{xx}, \quad (4.40)$$

где  $f$  — коэффициент внешнего трения среды по материалу деформатора, а  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{xx}$  — компоненты тензора напряжений (2.31).

Принимая во внимание (4.25), поскольку возможно, что  $\beta$  весьма малое положительное число, заключаем:

$$\varphi|_{R^u R^d} \in \left[ \frac{1}{2}\pi, \pi \right]. \quad (4.41)$$

В таком случае

$$\sigma_{xy} = k \sin 2\varphi \leq 0, \quad (4.42)$$

т.е., действующие вдоль пятна контакта  $R^u R^d$  касательные напряжения всегда отрицательные. Такой же вывод можно получить, воспользовавшись принятым правилом знаков касательных напряжений (п. 4.3.2).

Теперь, воспользовавшись обстоятельством (4.42), выполнив подстановку выражений (2.31) в условие (4.40), можно избавиться от знака модуля. В результате получаем

$$s \geq -k \left( \frac{1}{f} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \right), \quad (4.43)$$

где  $s$  — полусумма главных нормальных напряжений определяется соотношениями (4.31) или (4.32).

В отношении свободного контура  $L^m R^u$  уже говорилось п. 128, что он полностью состоит из главных площадок, и ближайшие окрестности точки  $R^u$  не исключение, а, значит, на основании (4.14) записываем:

$$\sigma_1|_{R^u} = 0. \quad (4.44)$$

Из [167] известно, что главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  можно определить через компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  по формуле:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \mp \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right]. \quad (4.45)$$

Принимая во внимание (4.45), с учетом (2.31), условие (4.44) дает:

$$s|_{R^u} = s^{ru} = k, \quad (4.46)$$

где  $s^{ru}$  — полусумма главных напряжений, действующих в точке  $R^u$ . Определяется  $s^{ru}$  одним из соотношений (4.28), (4.31) или (4.32).

Из последнего, учитывая определение  $s$  (2.29), получаем:

$$\sigma_3|_{R^u} = 2s^{ru} = 2k. \quad (4.47)$$

Поскольку очевидно, что в точке  $R^u$  должны выполняться оба условия (4.43) и (4.44), то учитывая определение  $s$  (2.29), получаем

$$\sigma_3|_{R^u} \geq -2k \left( \frac{1}{f} \sin 2\varphi^{ru} + \cos 2\varphi^{ru} \right). \quad (4.48)$$

Теперь не трудно убедиться, что значение угла  $\varphi^{ru}$  не может быть меньше некоторого значения  $\varphi_{\min}^{ru}$ , которое можно найти из условия (4.48), рассматривая его как строгое равенство и выполнив подстановку в него значения  $\sigma_3|_{R^u} = 2k$  (4.47). После замены  $\varphi$  на  $\varphi_{\min}^{ru}$  получаем:

$$\frac{1}{f} \sin 2\varphi_{\min}^{ru} + \cos 2\varphi_{\min}^{ru} = -1, \quad (4.49)$$

откуда находим

$$\varphi_{\min}^{ru} = \pi - \operatorname{arctg} f. \quad (4.50)$$

Т.е., угол  $\varphi_{\min}^{ru}$  определяется через коэффициент внешнего трения изучаемой идеально-вязкой среды по материалу лобовой поверхности деформатора.

Теперь, учитывая (4.25), (4.41) и (4.50), определяем интервал возможных значений угла  $\varphi^{ru}$ :

$$\varphi^{ru} \in [\varphi_{\min}^{ru}, \pi[. \quad (4.51)$$

4.5.1. Определение постоянных, вошедших в соотношения на ординате, выполняющиеся вдоль пятна контакта. В начале воспользуемся соотношением (4.30), которое при должном подборе постоянных  $C_x^*$  и  $\tilde{C}_x$  выполняется вдоль граничного отрезка  $R^u R^d$  пятна контакта деформатора с массивом сплошной среды (рис. 4.2,В или рис. 4.4,А). При этом помним, что вдоль  $R^u R^d$  угол  $\varphi$  укладывается в интервал  $\varphi|_{R^u R^d} \in [\frac{1}{2}\pi, \pi[$  (4.41), а ординаты  $y^{ru} = y|_{R^u}$ ,  $y^d = y|_{R^d}$  точек  $R^u$ ,  $R^d$  и значения  $\varphi^{ru} = \varphi|_{R^u}$  (4.25), (4.51),  $\varphi^{rd} = \varphi|_{R^d}$  (4.25) угла  $\varphi$  в этих же точках равны следующему:

$$y^{ru} = 0, \quad y^d > 0, \quad \varphi^{ru} > 0, \quad \varphi^{ru} \in [\varphi_{\min}^{ru}, \pi[, \quad \varphi^{rd} \in \left[ \frac{1}{2}\pi, \varphi^{ru} \right]. \quad (4.52)$$

Чтобы вычислить значение  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$  постоянной  $\tilde{C}_x$ , которая используется в соотношении (4.30), выполняющемся вдоль пятна контакта  $R^u R^d$ , необходимо в (4.30) поочередно выполнить пару подстановок. Сначала  $y = y^{ru}$  и  $\varphi = \varphi^{ru}$ :

$$y^{ru} = 2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi^{ru} + C_x^*, \quad (4.53)$$

а затем  $y = y^d$  и  $\varphi = \varphi^{rd}$ :

$$y^d = 2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi^{rd} + C_x^*. \quad (4.54)$$

Теперь из (4.54) вычитаем (4.53). В результате получаем:

$$y^d - y^{ru} = 2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} (\operatorname{ctg} \varphi^{rd} - \operatorname{ctg} \varphi^{ru}). \quad (4.55)$$

Далее, решив (4.55) относительно постоянной  $\tilde{C}_x$ , находим:

$$\tilde{C}_x|_{R^u R^d} = 2k \ln \left( \frac{y^d - y^{ru}}{2k (\operatorname{ctg} \varphi^{rd} - \operatorname{ctg} \varphi^{ru})} \right). \quad (4.56)$$

Значение  $C_x^*|_{R^u R^d}$  второй постоянной  $C_x^*$  находим, решив относительно нее выражение (4.53), после подстановки конкретного значения ординаты  $y^{ru} = 0$  (4.52):

$$C_x^*|_{R^u R^d} = -2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi^{ru}, \quad (4.57)$$

где  $\tilde{C}_x = \tilde{C}_x|_{R^u R^d}$  (4.56) предполагается уже известной.

Далее выполним подстановку  $s = s^{ru} = k$  (4.46),  $\varphi = \varphi^{ru}$  (4.25), (4.52) и  $y = y^{ru} = 0$  (4.52) в соотношение (4.31) для точки  $R^u$  получаем:

$$k = -k \ln (\sin^2 \varphi^{ru}) - k \ln (2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (4.58)$$

или с учетом (4.33) и формальных преобразований:

$$C_x^-|_{R^u R^d} = k [1 + \ln (\sin^2 \varphi^{ru})] + \gamma C_x^*, \quad (4.59)$$

где предполагается, что постоянная  $C_x^*$  уже известна (4.57).

4.5.2. Преобразование граничного условия, действующего вдоль пятна контакта. Запишем условие (4.43) в развернутом виде, т.е. заменив  $s$  его выражением (4.32):

$$-k \ln (\sin^2 \varphi) + 2k\gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^- \geq -k \left( \frac{1}{f} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \right). \quad (4.60)$$

Поскольку в соответствии с тригонометрическими формулами:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} \quad (4.61)$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad (4.62)$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{ctg} \varphi}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} \quad \cos 2\varphi = -\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}, \quad (4.63)$$

то, выполнив подстановку в уравнение (4.60) выражений  $\sin^2 \varphi$  (4.61),  $\sin 2\varphi$  (4.63) и  $\cos 2\varphi$  (4.63), после формальных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} k \ln(1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) + 2k\gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^- &\geq \\ &\geq k \left( \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} - \frac{2}{f} \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} \right). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Развернутое представление (4.60) и (4.64) граничного условия (4.43) записано в виде функциональной зависимости от угла  $\varphi$ . Далее они пригодятся для анализа и решения конкретных задач, а сейчас представим то же самое условие (4.43), но в виде функциональной связи с ординатой  $y$ . Для этого воспользуемся соотношением (4.30), которое перепишем следующим образом:

$$y = C_x \operatorname{ctg} \varphi + C_x^*. \quad (4.65)$$

где

$$C_x = 2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k}. \quad (4.66)$$

Из (4.65) получаем:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{y - C_x^*}{C_x}. \quad (4.67)$$

Далее, последовательно выполнив замену  $\operatorname{ctg} \varphi$  на (4.67), а затем постоянную  $C_x$  на (4.66) из (4.64), имеем:

$$\begin{aligned} k \ln \left( 1 + \frac{(y - C_x^*)^2}{4k^2 \exp \frac{\tilde{C}_x}{k}} \right) + \gamma(y - C_x^*) + C_x^- &\geq \\ &\geq k \left( \frac{4k^2 \exp \frac{\tilde{C}_x}{k} - (y - C_x^*)^2 - \frac{4k}{f} \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} (y - C_x^*)}{4k^2 \exp \frac{\tilde{C}_x}{k} + (y - C_x^*)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Полученное таким образом граничное условие не имеет явной зависимости от  $s$  и  $\varphi$ , а связывает ординату  $y$ , три константы  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$  и  $C_x^-$ , два параметра среды — плотность  $\gamma$  и сцепление  $k$ , а также коэффициент внешнего трения  $f$  среды по материалу деформатора.

По условию задачи (п.г. 4.2) параметры среды  $\gamma$ ,  $k$  и коэффициент трения  $f$  являются известными, а постоянные  $\tilde{C}_x$ ,  $C_x^*$  и  $C_x^-$  можно определить в соответствии с формулами (4.56), (4.57) и (4.59) через углы  $\varphi^{ru}$  и  $\varphi^{rd}$  (4.52).

4.5.3. Анализ и графическая интерпретация граничного условия, действующего вдоль пятна контакта. Теперь, когда постоянные интегрирования  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$  (4.56),  $C_x^*|_{R^u R^d}$  (4.57) и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  (4.59) определены, можно приступить к анализу граничного условия (4.43), которое выше представлено в двух формах (4.60) и (4.68). Первая форма (4.60) реализует функциональные связи непосредственно с углом  $\varphi$ , а вторая (4.68) — с ординатой  $y$ . Введем обозначения:

$$s_{al}(\varphi) = s(\varphi) = -k \ln(\sin^2 \varphi) + 2k\gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^-, \quad (4.69)$$

и

$$s_{ar}(\varphi) = -k \left( \frac{1}{f} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \right), \quad (4.70)$$

где  $s(\varphi)$  предполагается использовать, когда выражение (4.69) рассматривается как соотношение на ординате (4.32) или, что то же — левая часть условия (4.43), а  $s_{al}(\varphi)$  — когда акцентируется внимание на том, что речь идет о левой части граничного условия (4.43) в форме (4.60).

С учетом таких обозначений предельное условие (4.60) выглядит так:

$$s_{al}(\varphi) \geq s_{ar}(\varphi). \quad (4.71)$$

Подобным образом преобразуем предельное условие в форме (4.68). Для этого снова вводим новые обозначения

$$s_{bl}(y) = k \ln \left( 1 + \frac{(y - C_x^*)^2}{4k^2 \exp \frac{\tilde{C}_x}{k}} \right) + \gamma (y - C_x^*) + C_x^-, \quad (4.72)$$

$$s_{br}(y) = k \left( \frac{4k^2 \exp \frac{\tilde{C}_x}{k} - (y - C_x^*)^2 - \frac{4k}{f} \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} (y - C_x^*)}{4k^2 \exp \frac{\tilde{C}_x}{k} + (y - C_x^*)^2} \right), \quad (4.73)$$

и, применив их, переписываем (4.68) в подобном неравенству (4.71) виде:

$$s_{bl}(\varphi) \geq s_{br}(\varphi). \quad (4.74)$$

На рис. 4.15 показаны графики полусумм главных напряжений  $s_{al}$  (4.69) и  $s_{ar}$  (4.70), представляющих собой левую и правую части условия (4.71), а также напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  (4.45) и ординаты  $y$  (4.30), которые рассматриваются как функции  $\varphi$  при заданных значениях других величин.  $s_{al}$ ,  $s_{ar}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  и  $y$  иллюстрируют то напряженное состояние, которое складывается в области пятна контакта  $R^u R^d$  в результате взаимодействия деформатора со средой, реализующегося согласно рис. 4.4,А. В процессе построения



графиков рис. 4.15,А и 4.15,В постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитывали по формулам (4.56), (4.57) и (4.59), соответственно.

Из рис. 4.15,А и 4.15,В видно, что в пределах пятна контакта  $R^u R^d$ , где  $\varphi \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$  выполняются как граничное условие (4.71) — действительное для всей границы  $R^u R^d$ , так и требование (4.44), которое в отличие от условия (4.71) действительно только для одной единственной точки  $R^u$ . Последний тезис подтверждает значение  $\sigma_1|_{\varphi^{ru}} = 0$ .

Рис. 4.15,В иллюстрирует случай наименьшего удельного веса среды  $\gamma$ , при котором будет выполняться все сказанное до этого. Разумеется понятие “наименьший удельный вес” тут следует рассматривать в неразрывной связи с остальными параметрами, относящимися к рассматриваемой зада-

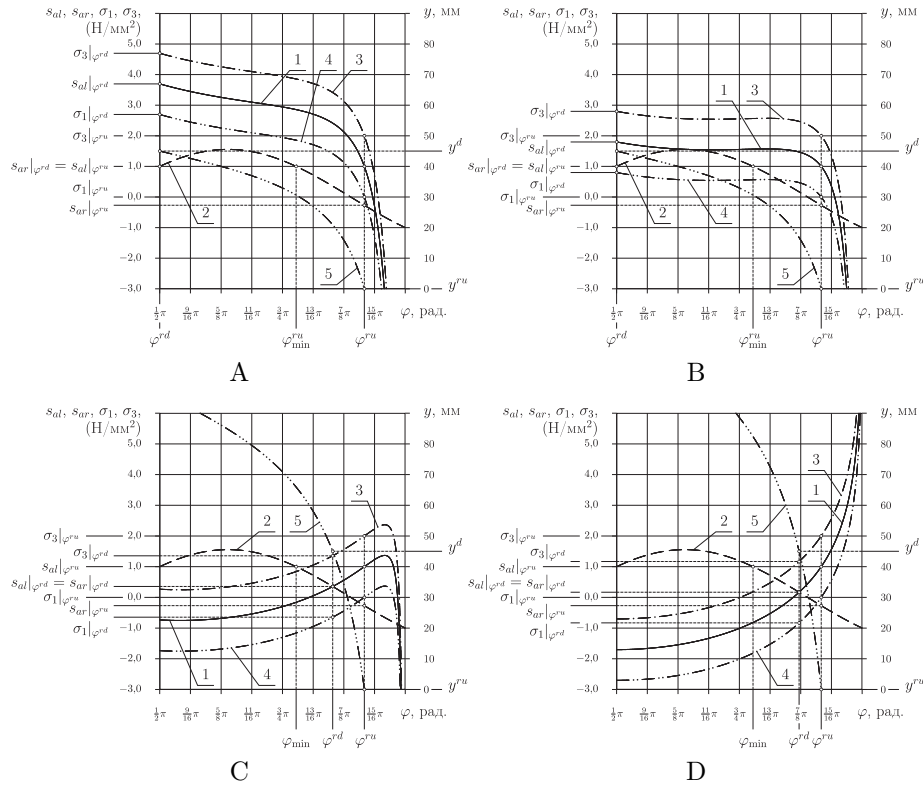


Рис. 4.15. Графики полусумм главных напряжений  $s_{al}$  (4.69) (1) и  $s_{ar}$  (4.70) (2) составляющих сущность левой и правой частей граничного условия (4.71, а также главных напряжений  $\sigma_3$  (4.45) (3),  $\sigma_1$  (4.45) (4) и ординаты  $y$  (4.30) (5), рассматриваемых как функции угла  $\varphi$  для четырех значений удельного веса среды (А) —  $\gamma = 0,12$  Н/мм<sup>3</sup>; В) —  $\gamma = 0,07784$  Н/мм<sup>3</sup>; С) —  $\gamma = 0,01$  Н/мм<sup>3</sup>; D) —  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>); если:  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад.;  $y^{ru} = 0,0$  мм;  $y^d = 45,0$  мм;  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>;  $f = 0,8391$

че. Главным из них является угол  $\varphi^{ru}$ , который при заданном значении  $\varphi^{rd} = \frac{1}{2}\pi + \varepsilon$  (4.35) или  $\frac{1}{2}\pi$  (4.34), а также известных  $k$ ,  $\gamma$ ,  $f$  однозначно определяет величины всех постоянных  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$ .

Нетрудно видеть, что если при прочих равных еще уменьшить удельный вес среды, то кривая 1  $s_{al}(\varphi)$  (4.69) пересечет кривую 2  $s_{ar}(\varphi)$  (4.70) еще пару раз и в интервале  $\varphi \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$  появится участок, где условие (4.71) не выполняется. Это обстоятельство указывает на тот факт, что при малых значениях удельного веса среды, в данном случае при  $\gamma = 0,01$  Н/мм<sup>3</sup> (рис. 4.15,С) или  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup> (рис. 4.15,Д) и еще меньших, интервал возможных значений угла  $\varphi|_{R^u R^d}$  значительно уже ранее определенного (4.41) и укладывается в пределы следующего:

$$\varphi|_{R^u R^d} \in [\varphi_{\min}, \pi[, \quad (4.75)$$

где угол

$$\varphi_{\min} = \pi - \operatorname{arctg} f, \quad (4.76)$$

определяется также, как и  $\varphi_{\min}^{ru}$  (4.65).

Угол  $\varphi^{rd} \geq \varphi_{\min}$  теперь не может быть равным  $\frac{1}{2}\pi$  (4.34) или  $\frac{1}{2}\pi + \varepsilon$  (4.35) и должен определяться из условия строгого равенства в (4.71), когда  $\varphi = \varphi^{rd}$ . Алгоритм **FindPhiRD** (рис. 4.16) вычисления угла  $\varphi^{rd}$  в пространственных пояснениях не нуждается. Строгое равенство в (4.71) достигается в точке пересечения кривых  $s_{al}(\varphi)$  (4.69) и  $s_{ar}(\varphi)$  (4.70). При этом должно выполняться требование  $\varphi = \varphi^{rd}$ , и такому значению  $\varphi^{rd}$  должны соответствовать постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$  (4.56),  $C_x^*|_{R^u R^d}$  (4.57) и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  (4.59). Поиск точки пересечения кривых  $s_{al}(\varphi)$  (4.69) и  $s_{ar}(\varphi)$  (4.70) осуществляется методом “деления отрезка пополам” [296].

Интересен тот факт, что значение удельного веса среды  $\gamma$ , коэффициенты связности  $k$  и внешнего трения  $f$ , а также величину угла  $\varphi^{ru}$ , который должен укладываться в интервал (4.51), всегда можно согласовать таким образом (рис. 4.17, 4.18), чтобы кривая  $s_{al}(\varphi)$  (1) касалась кривой  $s_{ar}(\varphi)$  (2) по типу рис. 4.15,В. Постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  при этом рассчитывают по формулам (4.56), (4.57) и (4.59).

На рис. 4.17 такое согласование выполнялось путем подбора подходящего значения  $\gamma$ , т.е. удельный вес среды последовательно рассматривался как функция двух аргументов:  $\gamma = \gamma(k, \varphi^{ru})$  (рис. 4.17,А);  $\gamma = \gamma(f, \varphi^{ru})$  (рис. 4.17,В);  $\gamma = \gamma(f, k)$  (рис. 4.17,С).

На рис. 4.18 согласование величин  $\gamma$ ,  $k$ ,  $f$  и  $\varphi^{ru}$  выполнялось путем подбора подходящего значения  $k$ , т.е. коэффициент сцепления среды последовательно рассматривался как функция двух аргументов:  $k = k(\gamma, \varphi^{ru})$  (рис. 4.18,А);  $k = k(f, \varphi^{ru})$  (рис. 4.18,В);  $k = k(f, \gamma)$  (рис. 4.18,С). Выполнялись такие действия путем применения подпрограммы **FindK** (рис. 4.19), которая содержит обращение к подпрограмме **FindPhiDeltaS** (рис. 4.20).

Принцип работы подпрограмм **FindK** и **FindPhiDeltaS** понятен из соответствующих рисунков и во многом повторяет уже рассмотренную ранее подпрограмму **FindPhiRD** (рис. 4.16). В основе всех их лежит алгоритм

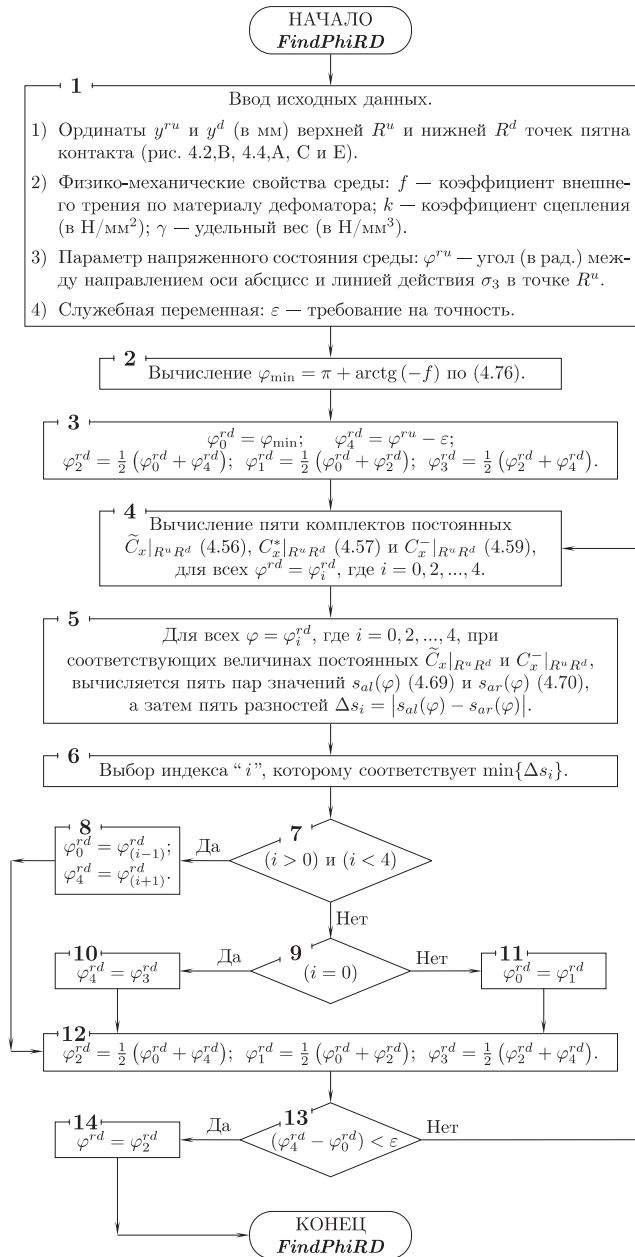


Рис. 4.16. Алгоритм подпрограммы *FindPhiRD*, вычисления значения угла  $\varphi^{rd}$ , при котором в (4.71), когда  $\varphi = \varphi^{rd}$ , достигается строгое равенство

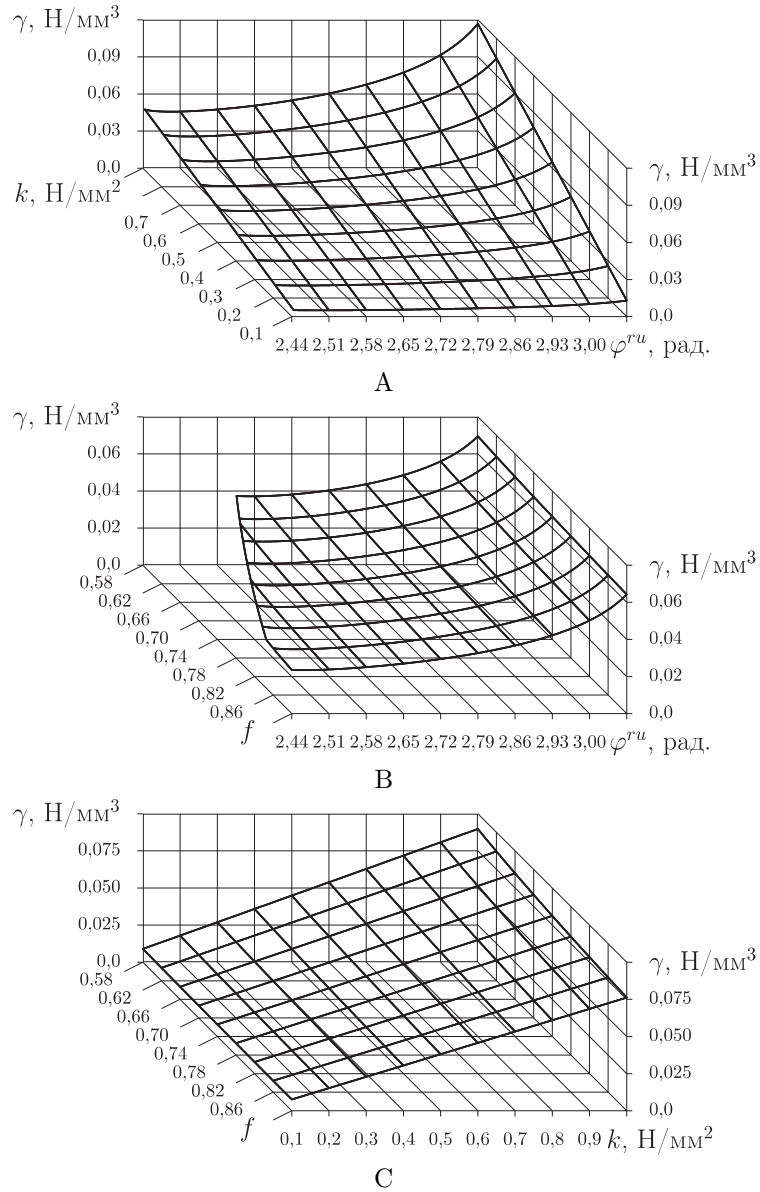


Рис. 4.17. Случай, когда равенство в (4.71) достигается по касанию кривых  $s_{al}(\varphi)$  (4.69) и  $s_{ar}(\varphi)$  (4.70) в области где  $\varphi < \varphi_{\min}$  (т.е. по типу рис. 4.15,В), а значение  $\varphi^{rd} = \frac{1}{2}\pi$  рад. определяется выражением (4.34): А)  $f = 0,8391$ ,  $y^{ru} = 0,0$  мм и  $y^d = 45,0$  мм; В)  $k = 0,5$  Н/мм<sup>2</sup>,  $y^{ru} = 0,0$  мм и  $y^d = 45,0$  мм; С)  $\varphi^{ru} = 2,8798$  рад.,  $y^{ru} = 0,0$  мм и  $y^d = 45,0$  мм

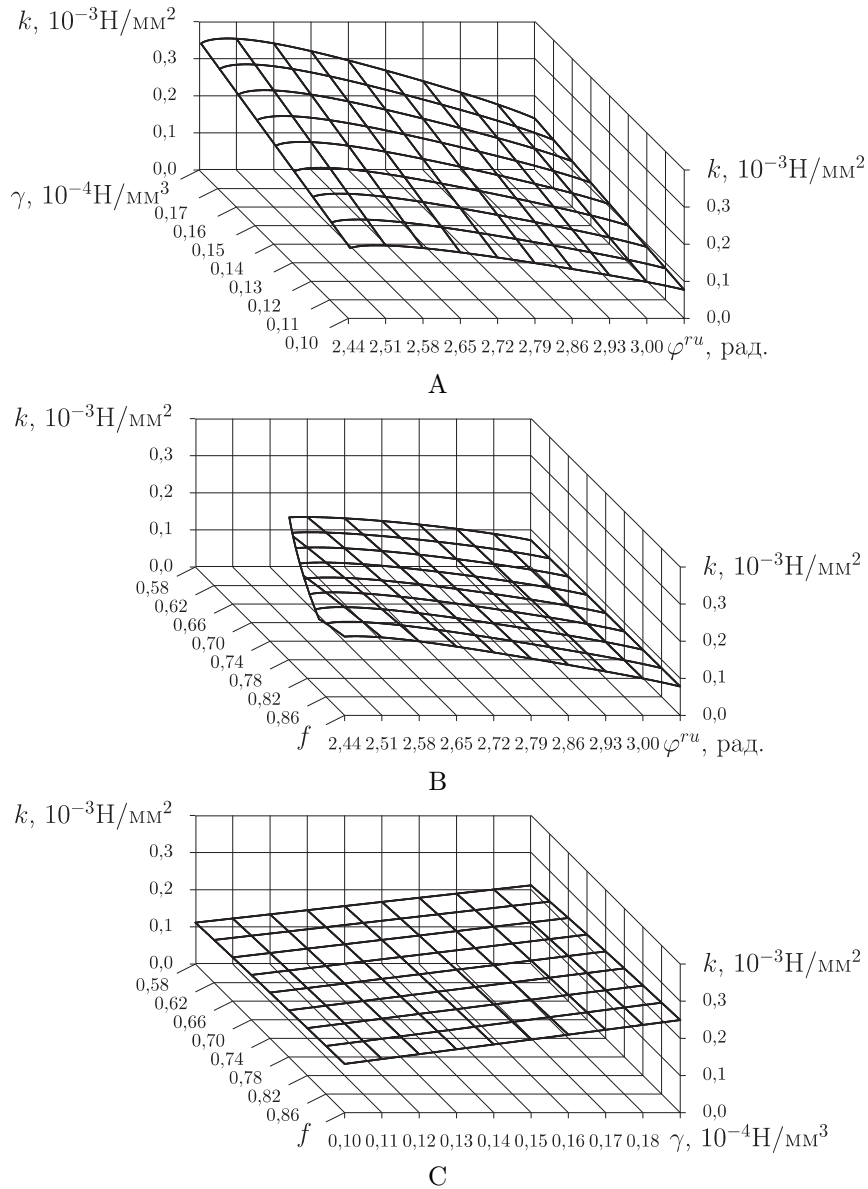


Рис. 4.18. Случай, когда равенство в (4.71) достигается по касанию кривых  $s_{al}(\varphi)$  (4.69) и  $s_{ar}(\varphi)$  (4.70) в области где  $\varphi < \varphi_{\min}$  (т.е. по типу рис. 4.15,В), а значение  $\varphi^{rd} = \frac{1}{2}\pi$  рад. определяется выражением (4.34): А)  $f = 0,8391$ ,  $y^{ru} = 0,0$  мм и  $y^d = 45,0$  мм; В)  $\gamma = 0,10 \cdot 10^{-4} \text{H}/\text{MM}^3$ ,  $y^{ru} = 0,0$  мм и  $y^d = 45,0$  мм; С)  $\varphi^{ru} = 2,8798$  рад.,  $y^{ru} = 0,0$  мм и  $y^d = 45,0$  мм

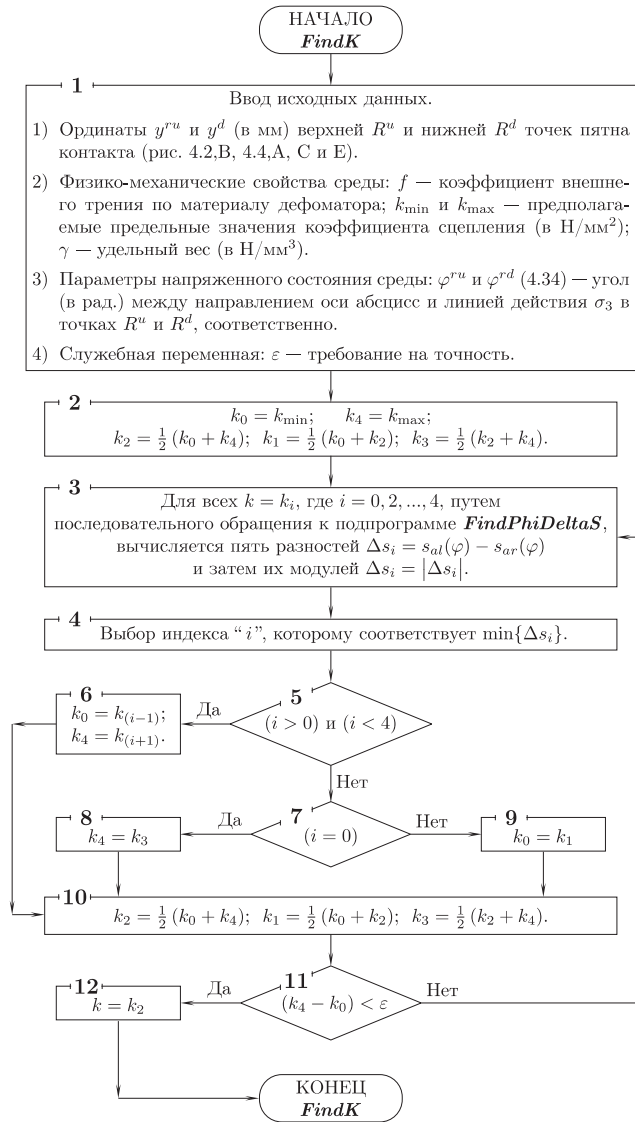


Рис. 4.19. Алгоритм подпрограммы **FindK** вычисления значения коэффициента связности среды  $k$ , при котором в (4.71) равенство достигается по касанию кривых  $s_{al}(\varphi)$  (4.69) и  $s_{ar}(\varphi)$  (4.70) в области, где  $\varphi < \varphi_{\min}$ , как на рис. 4.15,В, а значение  $\varphi^{rd} = \frac{1}{2}\pi$  рад. определяется выражением (4.34)

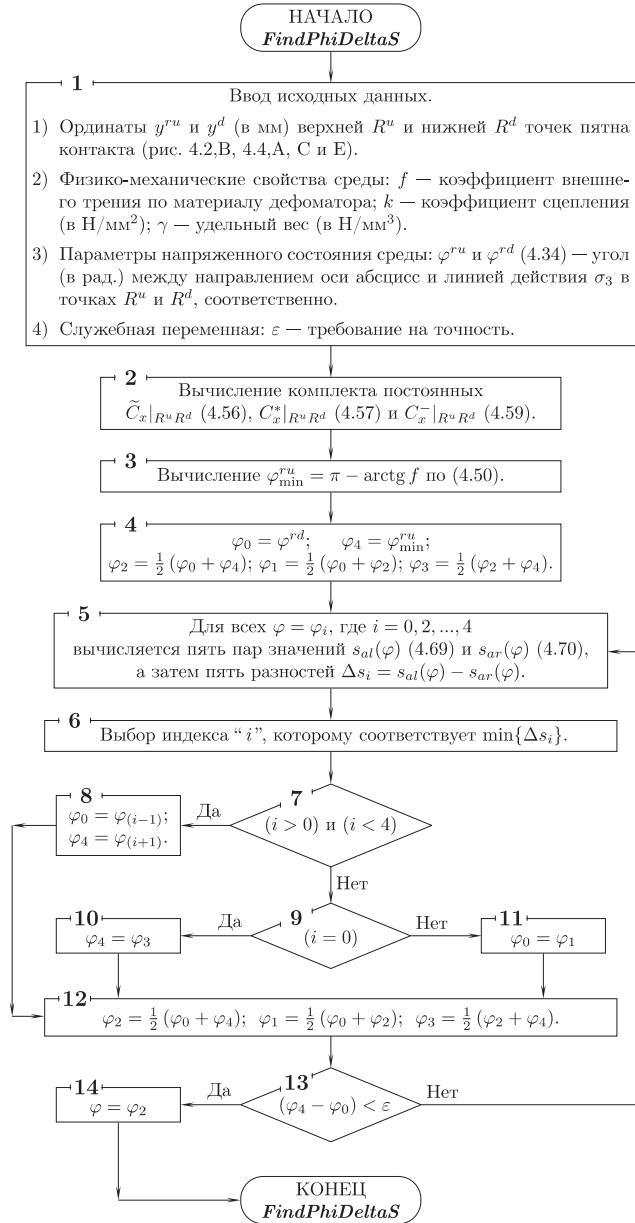


Рис. 4.20. Алгоритм подпрограммы **FindPhiDeltaS** вычисления минимума разности  $\delta_s = s_{al}(\varphi) - s_{ar}(\varphi)$  и угла  $\varphi$ , при котором он достигается, если  $\varphi \in [\varphi^{rd}, \varphi_{\min}^{ru}]$ , а  $\varphi^{rd} = \frac{1}{2}\pi$  рад. (4.34)

“деления отрезка пополам” [296]. После запуска **FindK** и выполнения действий в соответствии с операторами 1 и 2 выполняется серия из пяти обращений к **FindPhiDeltaS**. Путем выполнения последней для каждого значения коэффициента сцепления  $k = k_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, 5$  вычисляется минимум разности:

$$\Delta_s = s_{al}(\varphi) - s_{ar}(\varphi) \quad (4.77)$$

и значение угла  $\varphi$ , при котором он достигается, если:

$$\varphi \in [\varphi^{rd}, \varphi_{\min}^{ru}], \quad (4.78)$$

а значение угла  $\varphi^{rd} = \frac{1}{2}\pi$  определяется выражением (4.34).

Дальше последовательность операторов 4–9 осуществляют выбор того значения  $k_i$ , которому соответствует минимум модуля  $\Delta_s$ . Так повторяется до тех пор, пока ширина интервала возможных значений  $k$  сузится до ограниченной малой величины  $\varepsilon$ . Затем среднее значение этого интервала отождествляется с искомым значением  $k$ , при котором с машинной точностью в (4.71) достигается строгое равенство. Выполняется это в точке касания кривых  $s_{al}(\varphi)$  (4.69) и  $s_{ar}(\varphi)$  (4.70), как на рис. 4.15,В.

На рис. 4.21 представлены графики, построенные с применением подпрограммы **FindK** в случае, когда значения угла  $\varphi^{rd}$  последовательно назначались равным  $\frac{1}{2}\pi$  (рис. 4.21,А),  $\frac{9}{16}\pi$  (рис. 4.21,В),  $\frac{5}{8}\pi$  (рис. 4.21,С) и  $\frac{11}{16}\pi$  (рис. 4.21,Д). Как видим рост значения угла  $\varphi^{rd}$  приводит к ответному, весьма незначительному росту вычисленного значения коэффициента связности  $k$ . Анализ этих рисунков позволяет предположить, что ситуация, которую они отражают, либо не реальна совсем, либо характерна для весьма малосвязных сред. Тот и другой случай не интересуют.

Из всех вариантов, нашедших отражение на рис. 4.15, 4.17, 4.18 и 4.21 наиболее реалистичным представляются случай, как на рис. 4.15С и/или 4.15,Д. Его спецификой являются: а) относительно большие значения угла  $\varphi^{rd}$ , когда законным есть интервал (4.75) значений  $\varphi|_{RuRd}$ ; б) отрицательные значения наименьшего из главных нормальных напряжений  $\sigma_1|_{\varphi^{rd}}$ ; в) отличная от нуля величина модуля касательного напряжения  $\tau|_{Rd}$  (4.18). Все это соответствует напряженному состоянию, как на рис. 4.5.

Случаю, как на рис. 4.15,С и/или 4.15,Д отвечает ситуация, которую отражают графики на рис. 4.22. Разница состоит в том, что при построении рис. 4.22 удельный вес среды  $\gamma$  принят фиксированным и близким к реальному, а коэффициент сцепления  $k$  изменяется. Значение угла  $\varphi^{rd}$  рассчитывается с применением подпрограммы **FindPhiRD**.

Следующий рис. 4.23, по сути аналог предыдущего, но представленные на нем величины рассматриваются как функции ординаты  $y$ . Так, левую  $s_{bl}$  и правую  $s_{br}$  части условия (4.74) вычисляли в соответствии с выражениями (4.72) и (4.73). Главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  рассчитывали по тем же формулам (4.45), но при вычислении вошедших в них  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  (4.37) значения угла  $\varphi$  не назначали, а вычисляли по формуле (4.39). С помощью той же формулы (4.39) был построен график  $\varphi(y)$ .



Из рис. 4.23 видно, что все вышеперечисленные параметры по мере увеличения ординаты от  $y^{ru}$  до  $y^d$  изменяются почти линейно. Величина коэффициента связности  $k$  существенно влияет только на номинальные значения напряжений и почти не изменяет качественную сторону закономерностей. При оценке “на глаз” все рисунки 4.23 не различимы. Очевидная разница имеется только в масштабах шкал напряжений. Причем если при переходе от рис. 4.23,А к 4.23,В и т.д. коэффициент связности уменьшается на порядок, то и масштаб шкалы напряжений уменьшается на столько же.

Далее изучим, как влияет на характер изменения  $s$  положение (ордината  $y$ ) расчетной точки на пятне контакта  $R^u R^d$  в зависимости от величины

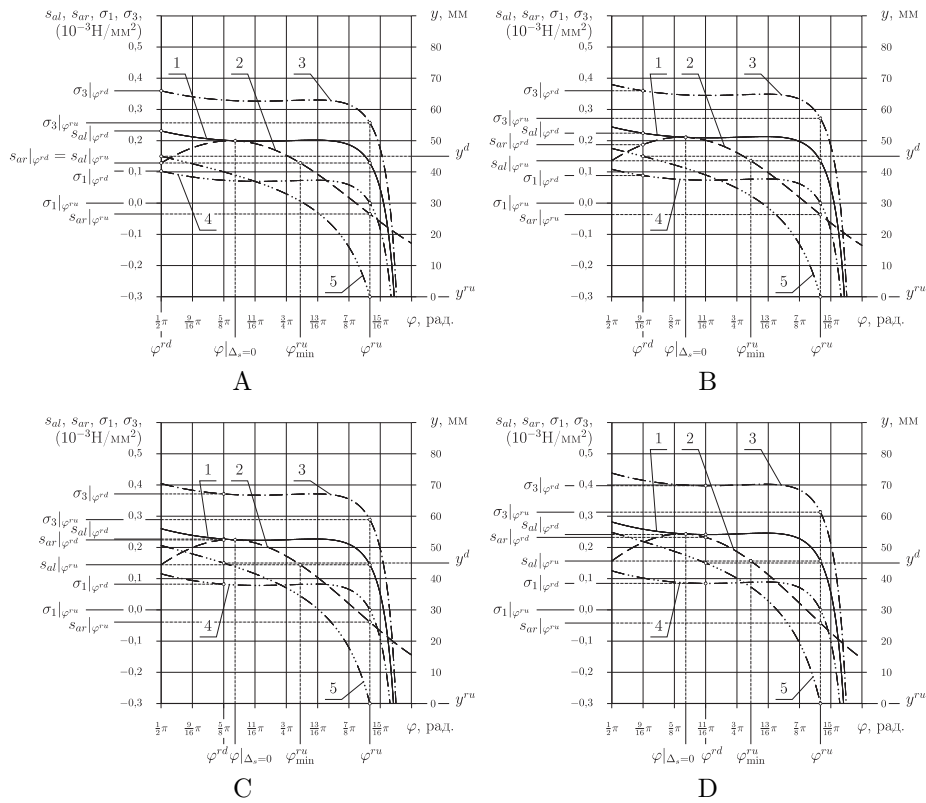


Рис. 4.21. Графики полусумм главных напряжений  $s_{al}$  (4.69) (1) и  $s_{ar}$  (4.70) (2) из левой и правой частей граничного условия (4.71), а также главных напряжений  $\sigma_3$  (4.45) (3),  $\sigma_1$  (4.45) (4) и ординаты  $y$  (4.30) (5), рассматриваемых как функции угла  $\varphi$  для четырех значений угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента  $k$  (А) —  $\varphi^{rd} = \frac{1}{2}\pi$  рад.,  $k = 0,000128469$  Н/мм<sup>2</sup>; В) —  $\varphi^{rd} = \frac{1}{16}\pi$  рад.,  $k = 0,0001357$  Н/мм<sup>2</sup>; С) —  $\varphi^{rd} = \frac{5}{8}\pi$  рад.,  $k = 0,00014451$  Н/мм<sup>2</sup>; D) —  $\varphi^{rd} = \frac{11}{16}\pi$  рад.,  $k = 0,00015649$  Н/мм<sup>2</sup>), если:  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад.;  $y^{ru} = 0,0$  мм;  $y^d = 45,0$  мм;  $f = 0,8391$

коэффициента связности  $k$  (рис. 4.24,А), угла трения  $f$  (рис. 4.24,В) и угла  $\varphi^{rd}$  (рис. 4.24,С), если

$$\varphi^{rd} \in [\varphi|_{\Delta_s=0}, \varphi^{ru}], \quad (4.79)$$

где  $\varphi|_{\Delta_s=0}$  — вычисленное с помощью подпрограммы **FindPhiDeltaS** значение угла  $\varphi$ , при котором в соответствии с определением  $\Delta_s$  (4.77) в граничном условии (4.74) достигается (если это возможно) строгое равенство.

Если последнее невозможно, то значение  $\varphi^{rd}$  должно определяться интервалом (4.52). Такой случай на рис. 4.24 не отражен. Для построения рис. 4.24,А применялся следующий алгоритм вычисления  $s$ : а) назначается  $y$ ,  $k$  и все другие переменные и фиксированные параметры; б) для каждого

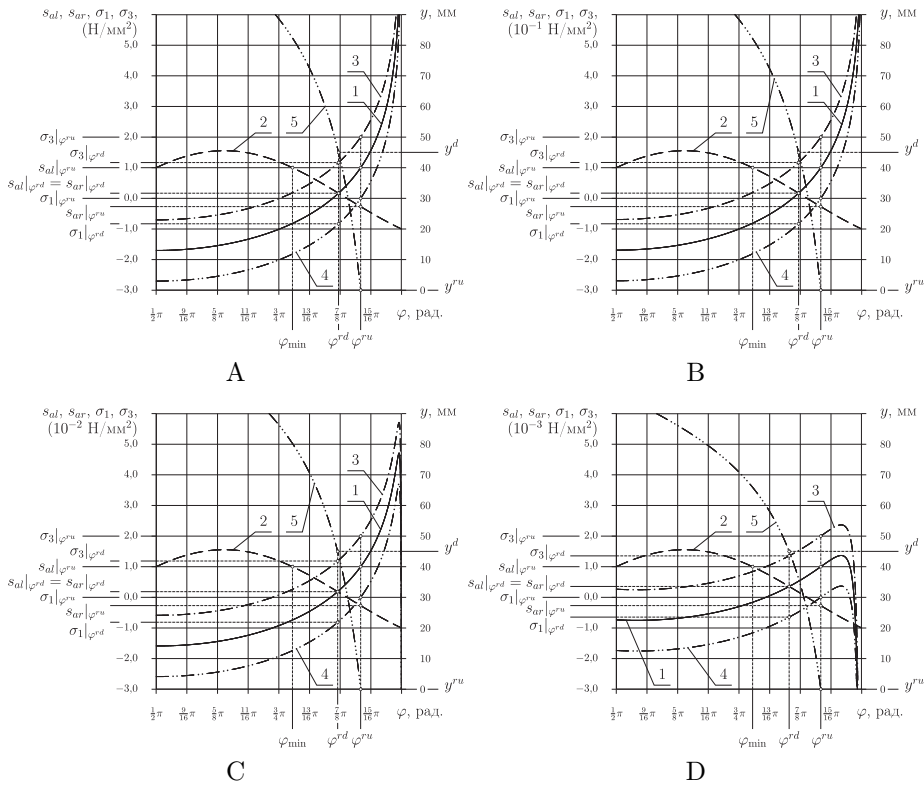


Рис. 4.22. Графики полусумм главных напряжений  $s_{al}$  (4.69) (1) и  $s_{ar}$  (4.70) (2) из левой и правой частей граничного условия (4.71), а также главных напряжений  $\sigma_3$  (4.45) (3),  $\sigma_1$  (4.45) (4) и ординаты  $y$  (4.30) (5), рассматриваемых как функции угла  $\varphi$  для трех значений коэффициента связности  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$  (А) —  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} = 2,73836$  рад.; В) —  $k = 0,1$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} = 2,7378$  рад.; С) —  $k = 0,01$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} = 2,7326$  рад.; Д) —  $k = 0,001$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} = 2,6775$  рад.), если:  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад.;  $y^{ru} = 0,0$  мм;  $y^d = 45,0$  мм;  $f = 0,8391$

нового значения коэффициент сцепления среды  $k$  по формулам (4.56), (4.57) и (4.59) вычисляются постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$ , что обеспечит выполнение граничных условий (4.43) и (4.44); в) для каждого нового значения  $k$  путем обращения к подпрограмме **FindPhiDeltaS** вычисляется угол  $\varphi^{rd}$ ; г) по формуле (4.39) вычисляется  $\varphi(y)$  и выполняется проверка на принадлежность полученного значения  $\varphi(y)$  интервалу  $\varphi \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$ ; д) по формуле (4.69) вычисляется  $s(\varphi)$ ; е) пункты а)–д) повторяются до тех пор, пока с заданным шагом не будут полностью пройдены назначенные интервалы значений  $y$  и  $k$ .

Для построения рис. 4.24,В применялся подобный первому случаю алгоритм вычисления  $s$ : а) назначается  $y$  и  $f$ , все другие переменные и фиксированные параметры; б) единожды по формулам (4.56), (4.57) и (4.59) вычисляются постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$ , что обеспечит выполнение

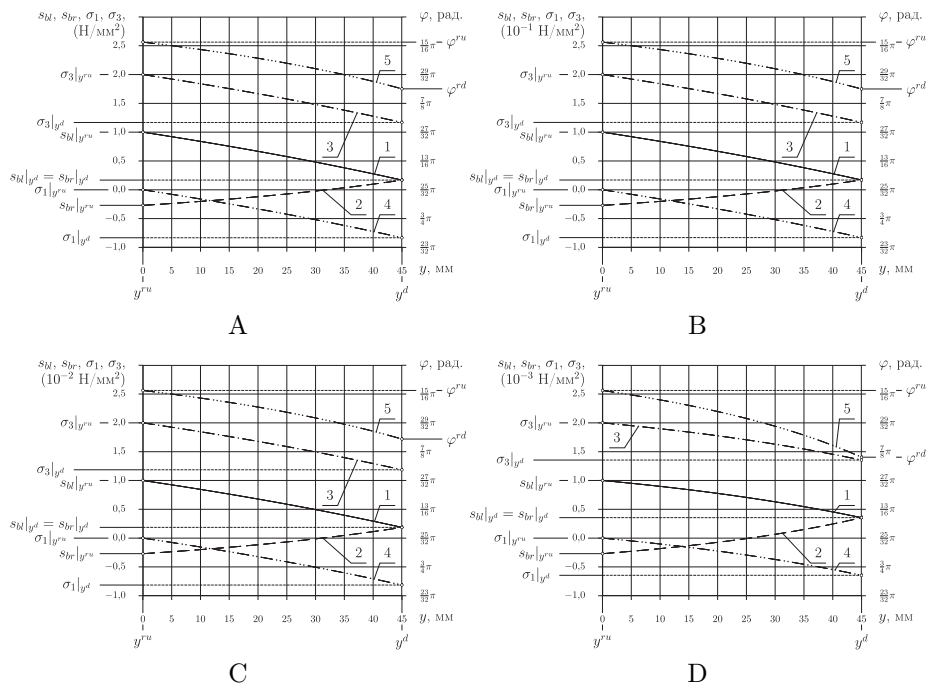


Рис. 4.23. Графики полусумм главных напряжений  $s_{bl}$  (4.72) (1) и  $s_{br}$  (4.73) (2) из левой и правой частей граничного условия (4.74), а также главных напряжений  $\sigma_3$  (4.45) (3),  $\sigma_1$  (4.45) (4) и угла  $\varphi$  (4.39) (5), рассматриваемых как функции ординаты  $y$ , для трех значений коэффициента  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$  (А) —  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} = 2,73836$  рад.; В) —  $k = 0,1$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} = 2,7378$  рад.; С) —  $k = 0,01$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} = 2,7326$  рад.; D) —  $k = 0,001$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} = 2,6775$  рад.), если:  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад.;  $y^{ru} = 0,0$  мм;  $y^d = 45,0$  мм;  $f = 0,8391$

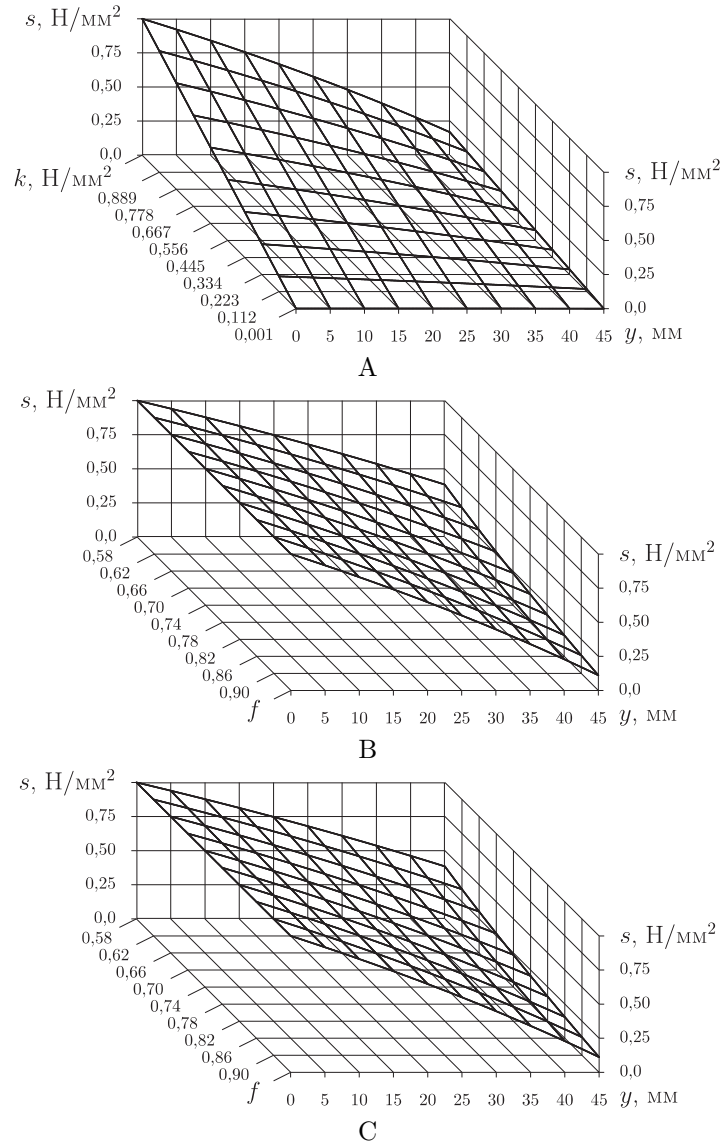


Рис. 4.24. Закономерности изменения  $s$  (4.69) в зависимости от положения (ординаты  $y$ ) расчетной точки на пятне контакта  $R^u R^d$  и величины ряда параметров, если  $\gamma = 0,00001 \text{ H}/\text{мм}^3$  и  $\varphi^{ru} = 2,87979 \text{ рад.}$ : А) угол  $\varphi^{rd}$  вычисляется из условия строгого равенства в (4.74) всякий раз, когда меняется  $k$ ;  $f = 0,8391$ ; В) угол  $\varphi^{rd}$  вычисляется из условия строгого равенства в (4.74) всякий раз, когда меняется  $f$ ;  $k = 1,0 \text{ H}/\text{мм}^2$ ; С) угол  $\varphi^{rd}$  непрерывно изменяется от  $2,7384 \text{ рад.}$ , при котором в условии (4.74) достигается строгое равенство, до  $2,8657 \text{ рад.}$ ;  $k = 1,0 \text{ H}/\text{мм}^2$ ;  $f = 0,8391$

граничных условий (4.43) и (4.44); в) для каждого нового значения угла трения  $f$  путем обращения к подпрограмме **FindPhiDeltaS** вычисляется угол  $\varphi^{rd}$ ; г) и д) как в предыдущем случае; е) пункты а) – д) повторяются до тех пор, пока с заданным шагом не будут полностью пройдены назначенные интервалы возможных значений  $y$  и  $f$ .

Для построения рис. 4.24,В также применялся подобный предыдущему случаю алгоритм вычисления  $s$ : а) назначается  $y$  и все другие переменные и фиксированные параметры; б) как в предыдущем случае; в) путем обращения к подпрограмме **FindPhiDeltaS** вычисляется  $\varphi|_{\Delta_s=0}$  и определяется интервал возможных значений  $\varphi^{rd}$  (4.79); г) в пределах интервала (4.79) возможных значений  $\varphi^{rd}$  углу  $\varphi^{rd}$  назначается фиксированное значение; д) повторяются пункты г) и д) первого случая; е) пункты а) – д) повторяются до тех пор, пока с заданным шагом не будут полностью пройдены интервалы возможных значений  $y$  и  $\varphi^{rd}$ .

Из рис. 4.24,А следует, чем меньше связность среды  $k$ , тем меньше сопротивление она оказывает деформатору. Кроме того, чем ближе к поверхности, (т.е., при  $y \rightarrow 0$ ), тем больше полусумма главных напряжений  $s$ . Это связано с тем, что  $\sigma_1$  на всем промежутке возможных значений  $y$  является растягивающей и по модулю убывает соразмерно с уменьшением  $y$  (рис. 4.24). Появление растягивающих нагрузок вызвано скольжением среды по деформатору вверх, и по модулю они тем больше, чем больше  $y$ . Все сказанное адекватно изучаемому физическому процессу.

Адекватность рис. 4.24,В также очевидна. Чем меньше трение, тем равномернее распределяются нагрузки вдоль поверхности контакта  $R^u R^d$ . Это справедливо, ведь именно трение препятствует релаксации напряжений. Столь же очевидна и адекватность рис. 4.24,С. Чем меньше интервал  $\varphi|_{R^u R^d} \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$ , тем равномернее напряжения вдоль  $R^u R^d$ .

На рис. 4.25 показано влияние величины угла  $\varphi^{ru}$  на характер распределения напряжений вдоль поверхности  $R^u R^d$ . При этом ширина интервала  $\varphi|_{R^u R^d} \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$  принята фиксированной:  $\varphi^{ru} - \varphi^{rd} = 0,043633$  (рис. 4.25,А);  $\varphi^{ru} - \varphi^{rd} = 0,087266$  (рис. 4.25,В). Постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (4.56), (4.57) и (4.59).

Чем больше значение угла  $\varphi^{ru}$ , тем шире диапазон напряжений действующих на пятне контакта  $R^u R^d$ , вплоть до разрывных, если диапазон  $\varphi|_{R^u R^d} \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$  широкий. На сколько это согласуется с физическим смыслом решаемой задачи пока сказать трудно.

#### 4.6. Интегралы нормальной и касательной компонент полного напряжения, действующего на пятне контакта

По своей сути далее речь пойдет об интегрировании компонент полного напряжения, действующего вдоль линии, совпадающей с осью ординат, а значит далее будут задействованы соотношения на ординатах (4.30) – (4.33). При этом следует напомнить о допущении № 4, из формулировки задачи (п.г. 4.2), в котором говорится, что вся область взаимодействия и сам деформатор имеют условную единичную толщину.

4.6.1. Интеграл нормальной составляющей полного напряжения. Запишем выражение интеграла  $I_{xx}^r$  нормальной компоненты  $\sigma_{xx}$  полного напряжения в области пятна контакта  $R^u R^d$  сплошной среды с лобовой поверхностью деформатора (рис. 4.2,В или рис. 4.4,А)

$$I_{xx}^r = \int_{R^u}^{R^d} \sigma_{xx} dy, \quad (4.80)$$

где интегрирование “сверху-вниз” определяется положительным направлением оси ординат, а сама ордината  $y$  и горизонтальная компонента  $\sigma_{xx}$  определяются соотношением (4.30) и выражением из (2.31).

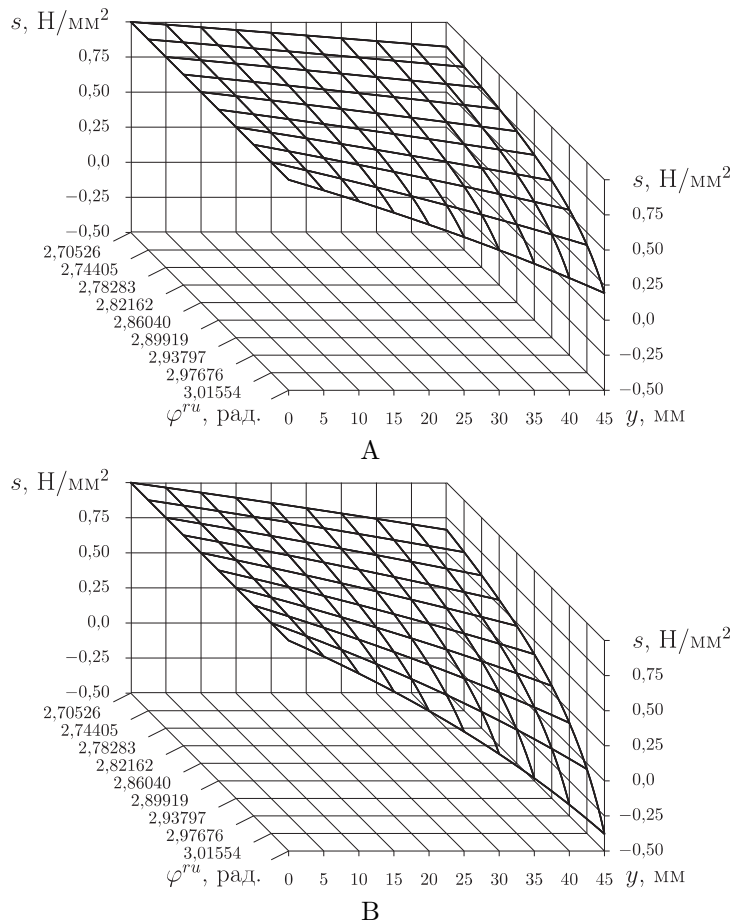


Рис. 4.25. Закономерности изменения  $s$  (4.69) в зависимости от положения (ординаты  $y$ ) расчетной точки на пятне контакта  $R^u R^d$  и от величины угла  $\varphi^{ru}$ , если:  $\varphi^{rd} = \varphi^{ru} - 0,043633$  рад. (А) или  $\varphi^{rd} = \varphi^{ru} - 0,087266$  рад. (В);  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>;  $f = 0,8391$ ;  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>

В начале выполним подстановку в (4.80) выражения  $\sigma_{xx}$  из (2.31):

$$I_{xx}^r = \int_{R^u}^{R^d} (s + k \cos 2\varphi) dy, \quad (4.81)$$

а затем  $s$  из (4.31):

$$I_{xx}^r = \int_{R^u}^{R^d} \left( -k \ln(\sin^2 \varphi) + \gamma y - k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x + k \cos 2\varphi \right) dy. \quad (4.82)$$

Поскольку из (4.33) следует, что

$$-k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x = C_x^- - \gamma C_x^*, \quad (4.83)$$

то (4.82) можно представить в виде суммы двух интегралов

$$I_{xx}^r = I_a^r + I_b^r, \quad (4.84)$$

где

$$I_a^r = \int_{R^u}^{R^d} (-k \ln(\sin^2 \varphi) + k \cos 2\varphi) dy, \quad (4.85)$$

$$I_b^r = \int_{R^u}^{R^d} (\gamma y + C_x^- - \gamma C_x^*) dy. \quad (4.86)$$

После интегрирования (4.86) получаем

$$I_b^r = \left[ \gamma \left( \frac{1}{2} y - C_x^* \right) + C_x^- \right] y \Big|_{R^u}^{R^d}. \quad (4.87)$$

Возвращаясь к интегрированию  $I_a^r$  (4.85), выполним замену переменной интегрирования  $y$  на  $\varphi$ . Для этого воспользуемся упрощенной формой (4.65) соотношения (4.30) и запишем выражение дифференциала

$$dy = -C_x \frac{1}{\sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.88)$$

Подстановка  $dy$  (4.88) в (4.85) дает

$$I_a^r = kC_x \int_{R^u}^{R^d} [\ln(\sin^2 \varphi) - \cos 2\varphi] \frac{1}{\sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.89)$$

Чтобы интегрировать (4.89) прибегнем к преобразованию  $\sin^2 \varphi$  по (4.61) и  $\cos 2\varphi$  по (4.63), а также замене:

$$u = \operatorname{ctg} \varphi, \quad du = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (4.90)$$

где  $u$  — рабочая переменная, не имеющая отношения к ранее введенным одноименным индексам. В результате после формальных преобразований из (4.89) получаем промежуточное выражение:

$$I_a^r = -kC_x \int_{R^u}^{R^d} \left[ \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} - \ln(1+u^2) \right] du, \quad (4.91)$$

которое после введения замены из ряда табличных [275, 276] интегралов

$$I_{a1}^r = \int_{R^u}^{R^d} \frac{1}{1+u^2} du, \quad I_{a2}^r = \int_{R^u}^{R^d} \frac{u^2}{1+u^2} du, \quad I_{a3}^r = \int_{R^u}^{R^d} \ln(1+u^2) du, \quad (4.92)$$

преобразуется к виду

$$I_a^r = -kC_x (I_{a1}^r - I_{a2}^r - I_{a3}^r). \quad (4.93)$$

После интегрирования  $I_{a1}^r$ ,  $I_{a2}^r$  и  $I_{a3}^r$  (4.92) получаем:

$$I_{a1}^r = \operatorname{arctg} u \Big|_{R^u}^{R^d}, \quad I_{a2}^r = (u - \operatorname{arctg} u) \Big|_{R^u}^{R^d}, \quad (4.94)$$

$$I_{a3}^r = [u \ln(1+u^2) - 2u + 2 \operatorname{arctg} u] \Big|_{R^u}^{R^d}.$$

Теперь выполним подстановку выражений (4.94) в (4.93):

$$I_a^r = kC_x [\ln(1+u^2) - 1] u \Big|_{R^u}^{R^d}. \quad (4.95)$$

Далее, выполнив подстановку  $u = \operatorname{ctg} \varphi$  (4.90) и замену  $1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi = 1/\sin^2 \varphi$  (4.61) из выражения интеграла  $I_a^r$  (4.95), получаем:

$$I_a^r = kC_x \left( \ln \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 \right) \operatorname{ctg} \varphi \Big|_{R^u}^{R^d}. \quad (4.96)$$

Возвращаясь к (4.84), выполним подстановку в него найденных выражений интегралов  $I_a^r$  (4.96),  $I_b^r$  (4.87):

$$I_{xx}^r = \left\{ kC_x \left( \ln \frac{1}{\sin^2 \varphi} - 1 \right) \operatorname{ctg} \varphi + \left[ \gamma \left( \frac{1}{2} y - C_x^* \right) + C_x^- \right] y \right\} \Big|_{R^u}^{R^d}. \quad (4.97)$$

Недостатком полученного выражения  $I_{xx}^r$  (4.97) является его зависимость от двух величин: угла  $\varphi$  и независимой переменной (ординаты)  $y$ . Поставим задачу избавиться от  $\varphi$ . Для этого, используя выражение (4.67), с учетом, что  $1/\sin^2 \varphi = 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi$  (4.61), имеем:

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = 1 + \left( \frac{y - C_x^*}{C_x} \right)^2. \quad (4.98)$$



Далее, выражения для  $\operatorname{ctg} \varphi$  (4.67) и  $1/\sin^2 \varphi$  (4.98) подставляем в (4.97) и в итоге, учитывая, что по условию задачи (п.г. 4.2) ордината точки  $R^d$  известна  $y|_{R^d} = y^d$  (4.52), а также то обстоятельство, что в текущем случае (рис. 4.2,В или рис. 4.4,А) ордината точки  $R^u$  равна нулю  $y^{ru} = y|_{R^u} = 0$  (4.52), после формальных преобразований получаем выражение для  $I_{xx}^r$ , как функции  $y^d$ :

$$\begin{aligned} I_{xx}^r(y^d) = k \times \\ \times \left\{ C_x^* \ln \left( 1 + \frac{(C_x^*)^2}{4k^2 \exp(\tilde{C}_x/k)} \right) + (y^d - C_x^*) \ln \left( 1 + \frac{(y^d - C_x^*)^2}{4k^2 \exp(\tilde{C}_x/k)} \right) \right\} + \\ + \left[ \gamma \left( \frac{y^d}{2} - C_x^* \right) + C_x^- - k \right] y^d. \end{aligned} \quad (4.99)$$

В это выражение вошли три постоянные коэффициента (константы)  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$ ,  $C_x^-$  и два параметра среды — плотность  $\gamma$  и сцепление  $k$ . По условию задачи (п.г. 4.2) параметры среды  $\gamma$  и  $k$  являются известными, равно как и само значение  $I_{xx0}^r$  искомого интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99).

Влияние величины коэффициента сцепления среды  $k$ , коэффициента трения  $f$ , угла  $\varphi^{ru}$ , а также высоты  $y^d$  пятна контакта  $R^u R^d$  на закономерности изменения интегрального значения  $I_{xx}^r$  (4.99) изучим на примере (рис. 4.26). При построении графиков этого рисунка, вошедшие в выражение  $I_{xx}^r$  (4.99) постоянные интегрирования  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (4.56), (4.57) и (4.59) с последующей проверкой выполнения граничных условий (4.43) и (4.44).

Наиболее простое и понятное влияние на величину  $I_{xx}^r$  оказывает высота  $y^d$  пятна контакта  $R^u R^d$  (рис. 4.26,А, 4.26,В и 4.26,С). Очевидно, что чем толще пласт захватывает деформатор, тем больше усилие необходимо для доведения среды до состояния предельного равновесия.

Также очевидно влияние величины коэффициента сцепления среды  $k$  (рис. 4.26,А). Тут связь между интегральным значением  $I_{xx}^r$  и коэффициентом  $k$  также пропорциональная. Чем больше  $k$ , тем среда прочнее, а, значит, тем лучше она “сопротивляется” воздействию деформатора. Следствием тому есть рост  $I_{xx}^r$  в ответ на увеличение  $k$ .

Менее очевидной является взаимосвязь между величиной  $I_{xx}^r$  и коэффициентом трения  $f$  (рис. 4.26,В). Из рисунка вытекает, что в случае роста  $f$ , величина  $I_{xx}^r$  убывает. Физический смысл такой взаимосвязи закрыт сложным характером влияния величины  $f$  на изучаемый процесс. Дело в том, что коэффициент трения  $f$  определяет величину проскальзывания среды вверх по лобовой поверхности  $R^u R^d$  деформатора. Т.е. уменьшение  $f$  должно сопровождаться ростом угла  $\varphi^{ru}$  и высоты  $y^d$ . В данном случае эти два параметра остаются фиксированными, а, значит, нет возможности оценить адекватность полученной взаимосвязи между изменением  $f$  и реакцией на нее со стороны  $I_{xx}^r$ . Ответить на этот вопрос можно, если дополнительным условием функционально связать значения  $f$ ,  $\varphi^{ru}$  и  $y^d$ , чем определить закон согласования этих величин друг с другом.

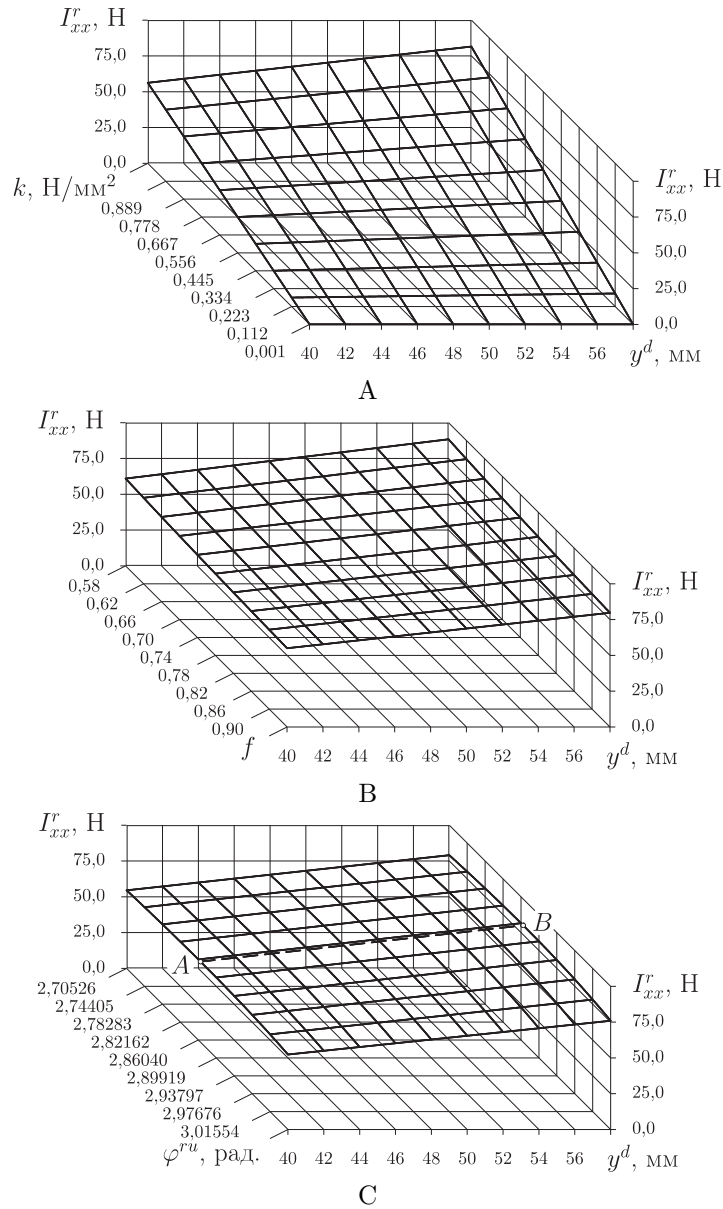


Рис. 4.26. Закономерности изменения величины интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) нормальной компоненты полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$  в зависимости от его высоты (ординаты  $y^d$ ) и от ряда параметров, если  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>, а угол  $\varphi^{rd}$  вычисляется из условия равенства в (4.74): А)  $f = 0,8391$ ;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад.; В)  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад.; С)  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>;  $f = 0,8391$

Анализ рис. 4.26,С по своей сути сходен с предыдущим в том смысле, что при изменении величины  $\varphi^{ru}$  должна изменяться и высота  $y^d$  пятна контакта  $R^u R^d$ . У нас же  $y^d$  принято фиксированным. Но, тем не менее, пояснить физический смысл рис. 4.26,С несколько проще. Прежде всего следует обратить внимание на линию  $AB$  максимума  $I_{xx}^r$ . Вероятно физически осмысленной является область значений  $\varphi^{ru}$ , где  $\varphi^{ru} \geq \varphi^{ru}|_{AB}$ . В пределах ее с ростом  $\varphi^{ru}$  величина  $I_{xx}^r$  несколько убывает. На самом деле так и должно происходить (см. рис. 4.2,В или рис. 4.4,А).

Анализ рис. 4.27 показывает, что увеличение угла  $\varphi^{rd}$  (приближение его значения к  $\varphi^{ru}$ ) приводит к росту величины интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99). Пока

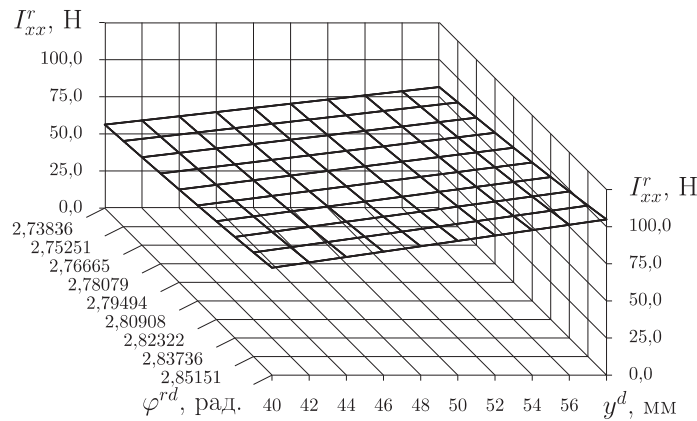


Рис. 4.27. Закономерности изменения величины интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) нормальной компоненты полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$  в зависимости от его высоты (ординаты  $y^d$ ) и от величины угла  $\varphi^{rd}$  (лежит в интервале вычисленного значения из условия равенства в (4.74) и заданного значения  $\varphi^{ru}$ ) если:  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $f = 0,8391$ ,  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад. и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>. Постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (4.56), (4.57) и (4.59)

нет оснований утверждать, что такая закономерность неадекватно отражает физическую сущность решаемой задачи. Ведь если  $\varphi^{rd} \rightarrow \varphi^{ru}$ , то это означает, что вдоль пятна контакта  $R^u R^d$  выравниваются значения всех параметров, включая компоненты тензора напряжений. Раньше из рис. 4.22 было видно, что полусумма главных нормальных напряжений  $s$  тем больше, чем ближе  $\varphi$  к  $\varphi^{ru}$ . То же самое можно сказать и в отношении нормальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$  (2.31). Значит все логично. С увеличением  $\varphi^{rd} \rightarrow \varphi^{ru}$  интегральное значение  $I_{xx}^r$  также должно расти.

4.6.2. Интеграл касательной составляющей полного напряжения. Аналогично предыдущему случаю, запишем выражение интеграла  $I_{xy}^r$  касательной (вертикальной) компоненты  $\sigma_{xy}$  полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$  сплошной среды 1 с

лобовой поверхностью деформатора 2 (рис. 4.2,В или рис. 4.4,А):

$$I_{xy}^r = \int_{R^u}^{R^d} \sigma_{xy} dy, \quad (4.100)$$

где напряжение  $\sigma_{xy}$  определяется нижним выражением (4.37), а дифференциал  $dy$  — выражением (4.88). Их подстановка в (4.100) с применением  $C_x$  (4.66) приводит к следующему развернутому виду:

$$I_{xy}^r = -2k^2 \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \int_{R^u}^{R^d} \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi = -kC_x \int_{R^u}^{R^d} \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (4.101)$$

где предполагается интегрирование по углу  $d\varphi$ .

Можно поступить по другому. Т.е. при подстановке  $\sigma_{xy} = k \sin 2\varphi$  (4.37) применить тригонометрическое преобразование  $\sin 2\varphi$  (4.63), а затем подстановку выражения  $\operatorname{ctg} \varphi$  (4.67):

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \frac{y - C_x^*}{C_x}}{1 + \frac{(y - C_x^*)^2}{(C_x)^2}} = \frac{2C_x (y - C_x^*)}{(C_x)^2 + (y - C_x^*)^2}. \quad (4.102)$$

В таком случае (4.100) приводится к виду:

$$I_{xy}^r = \int_{R^u}^{R^d} \frac{2kC_x (y - C_x^*)}{(C_x)^2 + (y - C_x^*)^2} dy, \quad (4.103)$$

где предполагается интегрирование по ординате  $dy$ .

Оба интеграла (4.101) и (4.103) могут быть приведенными к табличным. Начнем с первого. Для этого последовательно применим тригонометрическое преобразование  $\sin 2\varphi = 2 \operatorname{ctg} \varphi / (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi)$  (4.63) и замену переменной интегрирования (4.90). В результате из (4.101) получаем табличный интеграл [275, 276]:

$$I_{xy}^r = 2kC_x \int_{R^u}^{R^d} \frac{u}{1 + u^2} du = kC_x \ln (1 + u^2) \Big|_{R^u}^{R^d}. \quad (4.104)$$

Далее, возвращаясь к прежним переменным (4.90) и проведя простейшие тригонометрические преобразования, из (4.104) получаем окончательное выражение интеграла  $I_{xy}^r$ , как функции угла  $\varphi$ :

$$I_{xy}^r(\varphi) = kC_x \ln (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) \Big|_{R^u}^{R^d} = -2k^2 \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \ln (\sin^2 \varphi) \Big|_{R^u}^{R^d}. \quad (4.105)$$

Дальнейшее интегрирование (4.103) смысла не имеет, поскольку, для того, чтобы получить выражение интеграла  $I_{xy}^r$  как функции ординаты  $y$ , достаточно выполнить подстановку  $\operatorname{ctg} \varphi$  (4.67) в (4.105):

$$I_{xy}^r(y) = kC_x \ln \left( 1 + \left( \frac{y - C_x^*}{C_x} \right)^2 \right) \Big|_{R^u}^{R^d}. \quad (4.106)$$

В конечном итоге, выполнив подстановку пределов интегрирования и замену постоянной  $C_x$  (4.66) из (4.106), получаем окончательное выражение интеграла  $I_{xy}^r$ , как функции ординаты  $y^d$ :

$$I_{xy}^r(y^d) = 2k^2 \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \times \left\{ \ln \left( 1 + \frac{(y^d - C_x^*)^2}{4k^2 \exp(\tilde{C}_x/k)} \right) - \ln \left( 1 + \frac{(C_x^*)^2}{4k^2 \exp(\tilde{C}_x/k)} \right) \right\}. \quad (4.107)$$

В отличие от выражения (4.99) в текущее уравнение (4.107) вошло два постоянных коэффициента  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$  и только один параметр среды — т.е., ее сцепление  $k$ . По условию задачи (п.г. 4.2) значение  $I_{xy0}^r$  искомого интеграла  $I_{xy}^r$  (4.107) также известно.

Рис. 4.28 иллюстрирует зависимость интеграла  $I_{xy}^r$  (4.107) от величины ряда параметров. И по их числу, и по интервалу значений текущий рисунок повторяет рис. 4.26. Как раньше, постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (4.56), (4.57) и (4.59). Однако, что касается обнаруженных закономерностей, то между ними есть различия.

Начнем из рис. 4.28,А. Он практически полностью повторяет рис. 4.26,А. Разница состоит только в номинальных значениях  $I_{xx}^r$  и  $I_{xy}^r$ , а также в их знаках. Последнее диктуется выбранным способом определения углов  $\varphi$  (п.г. 4.4), принятым правилом в отношении ориентации векторов касательных напряжений (п.г. 3.6) и принятым правилом знаков касательных напряжений (п. 131). Увеличение коэффициента связности  $k$  приводит к увеличению модуля касательной компоненты  $\sigma_{xy}$  (4.37), а отсюда, закономерно, и модуля интеграла  $I_{xy}^r$  (4.107). При прочих равных, чем больше высота  $y^d$  пятна контакта  $R^u R^d$ , тем, соответственно, больше модуль величины  $I_{xy}^r$ . Все в точности, как для  $I_{xx}^r$  и рис. 4.26,А.

Рис. 4.28,В иллюстрирует зависимость  $I_{xy}^r$  от  $f$  и  $y^d$ . Тут наблюдается увеличение значений модуля  $I_{xy}^r$  пропорционально росту коэффициента трения  $f$ . Поясняется такая ситуация тем, что с увеличением  $f$  уменьшается величина угла  $\varphi^{rd}$ , а вместе с ней увеличивается и максимум, и среднее значение модуля касательной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xy}$ . В итоге увеличение модуля  $\sigma_{xy}$  естественно приводит к увеличению модуля  $I_{xy}^r$ .

Из рис. 4.28,С видно, что увеличение угла  $\varphi^{ru}$  приводит к уменьшению модуля интеграла  $I_{xy}^r$ . Это опять таки связано со смещением интервала  $\varphi|_{R^u R^d} \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$  в область больших значений, что влечет за собой уменьшение среднего значения модуля касательного напряжения  $\sigma_{xy}$ , а вместе с ним и модуля  $I_{xy}^r$ . Зависимость  $I_{xy}^r$  от величины угла  $\varphi^{rd}$  (рис. 4.29) похожа на только рассмотренную зависимость  $I_{xy}^r$  от угла  $\varphi^{ru}$ , рис. 4.28,С. Механизм проявления этих связей аналогичный. Увеличение угла  $\varphi^{rd}$  также приводит к смещению среднего значения  $\varphi$  в интервале  $\varphi|_{R^u R^d} \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$  в область больших значений и, как следствие, к увеличению модуля  $I_{xy}^r$ .

В заключение необходимо сказать, что из рис. 4.28 и 4.29 следует, что увеличение высоты  $y^d$  пятна контакта  $R^u R^d$  также приводит к увеличению

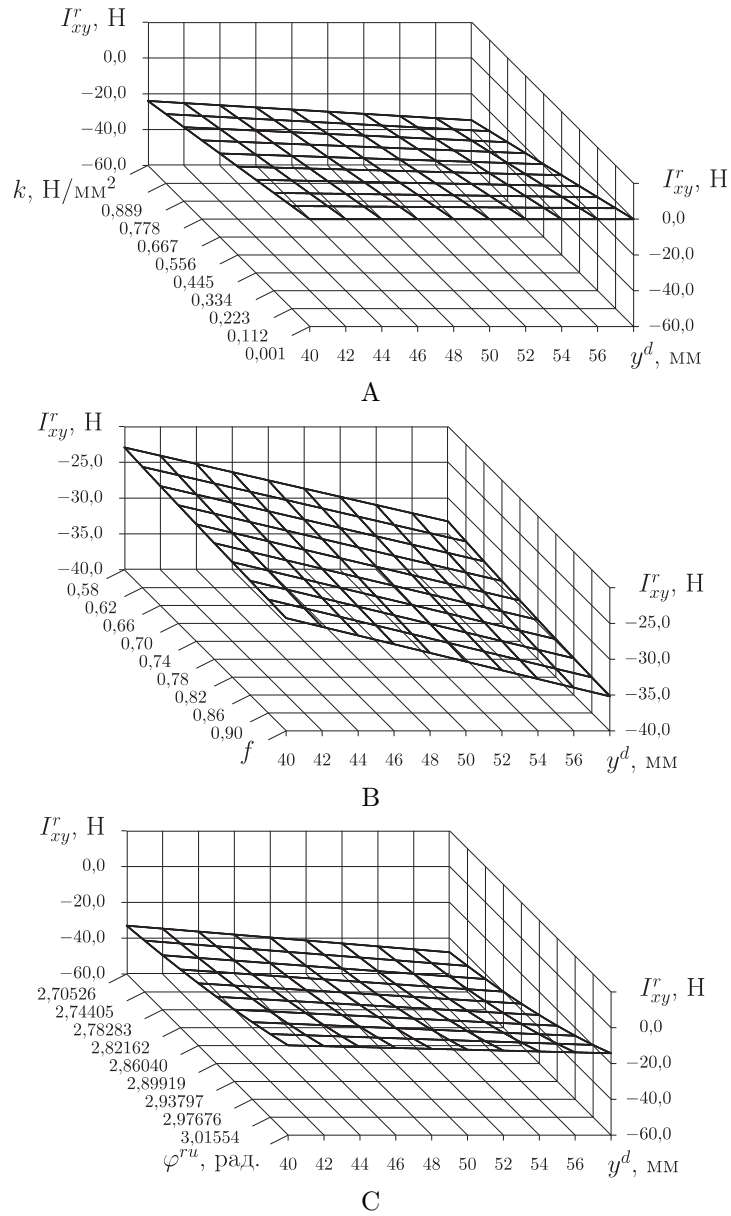


Рис. 4.28. Закономерности изменения величины интеграла  $I_{xy}^r$  (4.107) касательной компоненты полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$  в зависимости от его высоты (ординаты  $y^d$ ) и от ряда параметров, если  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>, а угол  $\varphi^{rd}$  вычисляется из условия равенства в (4.74): А)  $f = 0,8391$ ,  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад.; В)  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад.; С)  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $f = 0,8391$

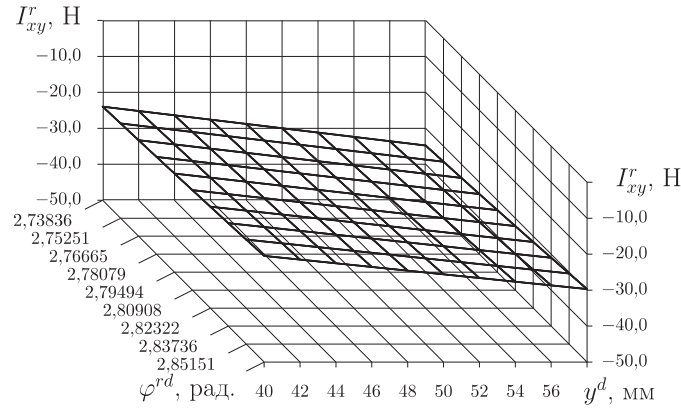


Рис. 4.29. Закономерности изменения величины интеграла  $I_{xy}^r$  (4.107) в зависимости от высоты пятна контакта  $R^u R^d$  (ординаты  $y^d$ ) и от величины угла  $\varphi^{rd}$  если:  $k = 1,0 \text{ Н/мм}^2$ ,  $f = 0,8391$ ,  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад. и  $\gamma = 0,00001 \text{ Н/мм}^3$ . Постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (4.56), (4.57) и (4.59) с последующей проверкой выполнения граничных условий (4.43) и (4.44)

модуля  $I_{xy}^r$ . Поясняется это тем, что при распространении одних и тех же напряжения  $\sigma_{xy}$  на большей площади, их результирующая увеличится.

#### 4.7. Интегралы нормальной и касательной компонент полного напряжения, действующего в текущем горизонтальном сечении гребня

В текущей подглаве снова обращаемся к рис. 4.4,А и его новой версии рис. 4.30. Методика вывода выражений для вычисления заявленных интегралов тоже в значительной мере повторяет два предыдущих случая. Сейчас речь идет о текущем горизонтальном сечении  $LR$  той части массива сплошной среды  $L^m R^u R^m$ , которая покоится перед деформатором выше начального уровня, т.е. линии  $MR^m$ .

4.7.1. Интеграл нормальной составляющей полного напряжения. Запишем выражение интеграла  $I_{yy}^{lr}$  нормальной компоненты  $\sigma_{yy}$  полного напряжения, действующего в сечении  $LR$  (рис. 4.4,А):

$$I_{yy}^{lr} = \int_R^L \sigma_{yy} dx, \quad (4.108)$$

где абсцисса  $x$  определяется соотношением (4.27), а нормальная компонента напряжения  $\sigma_{yy}$  — выражением (4.36). Подстановка в (4.108) выражения (4.36) и последующие преобразования приводят к следующему:

$$I_{yy}^{lr} = -k \int_R^L \left[ \ln(\cos^2 \varphi) + \cos 2\varphi - \frac{C_y^-}{k} \right] dx. \quad (4.109)$$

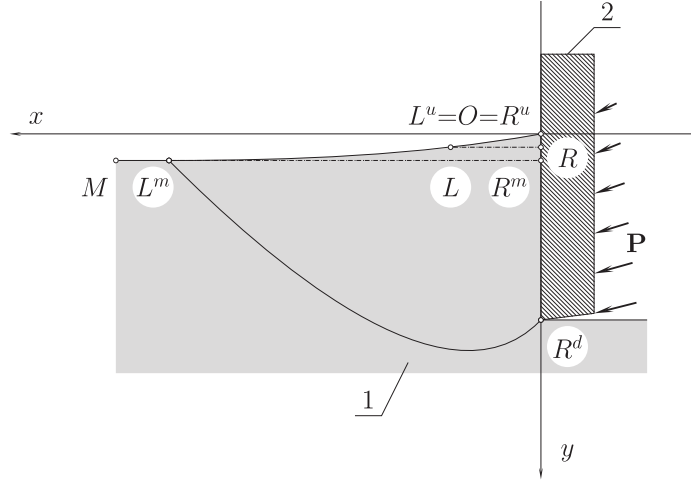


Рис. 4.30. Отвечающая рис. 4.2,В и 4.4,А схема воздействия на массив идеально-вязкой среды 1 плоского вертикального деформатора 2 в начальной фазе нагружения (при малых значениях  $P$ )

Для интегрирования (4.109) лучше избавиться от  $x$ , а не от угла  $\varphi$ . Следуя этому и заменив в соотношении (4.27) ординату  $y$  на соответствующее сечению  $LR$  фиксированное значение  $y^{lr}$ , дифференцируем его по  $x$ :

$$dx = 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k} \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi, \quad (4.110)$$

а затем, введя замену

$$C_y = 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k}, \quad (4.111)$$

подставляем (4.111) в (4.110) и полученное выражение в искомое (4.109)

$$I_{yy}^{lr}(\varphi) = -kC_y \int_R^L \left[ \ln(\cos^2 \varphi) + \cos 2\varphi - \frac{C_y^-}{k} \right] \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.112)$$

Как видим, полученное выражение искомого интеграла  $I_{yy}^{lr}$  (4.112) функционально зависимо только от угла  $\varphi$ .

Для интегрирования (4.112) сначала выполним подстановку в него

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \cos 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (4.113)$$

В результате получаем:

$$I_{yy}^{lr}(\varphi) = -kC_y \int_R^L \left[ \ln \left( \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \right) + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} - \frac{C_y^-}{k} \right] \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.114)$$



Затем применим замену

$$u = \operatorname{tg} \varphi, \quad du = \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.115)$$

В результате получаем:

$$I_{yy}^{lr} = -kC_y \int_R^L \left[ \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} - \ln(1+u^2) \right] du + C_y C_y^- \int_R^L du \quad (4.116)$$

Теперь, принимая во внимание аналогии между первым слагаемым из интегрального выражения (4.116) и с уже рассмотренным ранее выражением (4.91), а также пользуясь интегрированной формой (4.95) последнего, непосредственно записываем:

$$I_{yy}^{lr} = kC_y \left[ \ln(1+u^2) - 1 \right] u \Big|_R^L + C_y C_y^- u \Big|_R^L. \quad (4.117)$$

Далее, последовательно выполнив подстановку (4.115), (4.113) и (4.111) из (4.117), окончательно получаем:

$$I_{yy}^{lr}(\varphi) = 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k} \operatorname{tg} \varphi \left\{ C_y^- - k \left[ 1 + \ln(\cos^2 \varphi) \right] \right\} \Big|_R^L \quad (4.118)$$

— выражение интеграла  $I_{yy}^{lr}$  как функции угла  $\varphi$ . Заметим, что значения углов  $\varphi|_L$  и  $\varphi|_R$  изначально по условию задачи являются неизвестными. Хотя в эксперименте измерить угол  $\varphi|_L$  возможно (рис. 4.3).

Для получения интеграла  $I_{yy}^{lr}$  как функции абсциссы  $x$ , воспользуемся методом замены переменных в выражении (4.118). Для этого перепишем соотношение (4.27) с подстановкой  $C_y$  (4.111):

$$x = C_y \operatorname{tg} \varphi + C_y^*. \quad (4.119)$$

Решив последнее относительно  $\operatorname{tg} \varphi$  получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x - C_y^*}{C_y}, \quad (4.120)$$

а затем, выполнив подстановку  $\operatorname{tg} \varphi$  в (4.113), получаем:

$$\cos^2 \varphi = \frac{(C_y)^2}{(C_y)^2 + (x - C_y^*)^2}. \quad (4.121)$$

Далее выполняем подстановку  $\operatorname{tg} \varphi$  (4.120),  $\cos^2 \varphi$  (4.121) и  $C_y$  (4.111) в выражение (4.118):

$$I_{yy}^{lr}(x) = (x - C_y^*) \left\{ C_y^- - k + k \ln \left( 1 + \frac{(x - C_y^*)^2}{4k^2} \exp \frac{\gamma y^{lr} - \tilde{C}_y}{k} \right) \right\} \Big|_R^L. \quad (4.122)$$

В итоге получено выражение для интегрального значения  $I_{yy}^{lr}$  нормальной компоненты полного напряжения, действующего в горизонтальном сечении  $LR$  гребня. В представлении (4.122)  $I_{yy}^{lr}$  рассматривается как функция абсциссы  $x$ . Преимущество выражения (4.122) над ранее полученным (4.118) состоит в том, что абсцисса точки  $R$  известна и равна нулю.

Для исследования выражения  $I_{yy}^{lr}$  (4.122) необходимо прежде разобраться, как согласуются между собой постоянные  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$ ,  $C_x^-$  и  $C_y^*$ ,  $\tilde{C}_y$ ,  $C_y^-$ . Это связано с тем, что для обоснования первой группы постоянных  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$  и  $C_x^-$ , относящихся к соотношениям на ординате, использовались граничные условия (4.43) и (4.44), а для обоснования значений постоянных второй группы  $C_y^*$ ,  $\tilde{C}_y$  и  $C_y^-$ , относящейся к соотношениям на абсциссе, аналогичных условий нет. Следовательно, рассмотрев вывод интеграла  $I_{xy}^{lr}$  касательной компоненты полного напряжения, действующего в горизонтальном сечении гребня  $LR$ , необходимо разработать алгоритм согласования упомянутых постоянных, а уже затем прибегнуть к анализу выражения  $I_{yy}^{lr}$  (4.122) и следующего далее выражения для  $I_{xy}^{lr}$ .

4.7.2. Интеграл касательной составляющей полного напряжения. Запишем выражение интеграла  $I_{xy}^{lr}$  касательной компоненты  $\sigma_{xy}$  полного напряжения, действующего в сечении  $LR$  (рис. 4.4,А):

$$I_{xy}^{lr} = \int_R^L \sigma_{xy} dx. \quad (4.123)$$

Далее выполняем подстановку  $\sigma_{xy}$  (4.36) и  $dx$  (4.110). В итоге получаем:

$$I_{xy}^{lr} = 2k^2 \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k} \int_R^L \sin 2\varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (4.124)$$

Чтобы интегрировать в (4.124) следует провести замену (4.115), а, значит, выразить  $\sin 2\varphi$  через  $\operatorname{tg} \varphi$ . Из тригонометрии известно:

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (4.125)$$

Последовательно выполнив подстановку  $\sin 2\varphi$  (4.125) и замену (4.115) из (4.124) получаем:

$$\begin{aligned} I_{xy}^{lr} &= 4k^2 \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k} \int_R^L \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 4k^2 \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k} \int_R^L \frac{u}{1 + u^2} du. \end{aligned} \quad (4.126)$$

В результате пришли к табличному интегралу [275, 276], а поэтому, возвратившись к прежним переменным, непосредственно записываем результат

интегрирования:

$$I_{xy}^{lr}(\varphi) = 2k^2 \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \Big|_R^L. \quad (4.127)$$

Далее, воспользовавшись заменой (4.120) и (4.111), получаем функциональную связь интеграла  $I_{xy}^{lr}$  с абсциссой  $x$ :

$$I_{xy}^{lr}(x) = 2k^2 \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k} \ln \left( 1 + \frac{(x - C_y^*)^2}{4k^2} \exp \frac{\gamma y^{lr} - \tilde{C}_y}{k} \right) \Big|_R^L. \quad (4.128)$$

Опять таки, преимущество последнего выражения  $I_{xy}^{lr}(x)$  (4.128) над предыдущим  $I_{xy}^{lr}(\varphi)$  (4.127) состоит в том, что абсцисса  $x$  для правой точки  $R$  известна всегда для любого сечения  $LR$ . В отношении угла  $\varphi|_R$  этого сказать нельзя. Хотя в эксперименте возможно измерить второй угол  $\varphi|_R$  в точке  $L$ . Этими особенностями определяется применимость выражений (4.127) и (4.128). Анализ выражения  $I_{xy}^{lr}$  (4.127) откладываем до разработки алгоритма согласования постоянных  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$ ,  $C_x^-$  и  $C_y^*$ ,  $\tilde{C}_y$ ,  $C_y^-$ .

#### 4.8. Согласование величин, определяющих напряженное состояние среды в области пятна контакта

Возвращаясь к определению постоянных  $C_x^*$  (4.56),  $\tilde{C}_x$  (4.57) и  $C_x^-$  (4.59) и рис. 4.15, напомним только, что для их вычисления необходимо знать:  $k$  — коэффициент связности (сцепления) среды;  $\gamma$  — плотность среды;  $y^{ru}$  и  $y^d$  — ординаты верхней  $R^u$  и нижней  $R^d$  точек пятна контакта (рис. 4.2,В, 4.4,А или 4.30);  $\varphi^{ru}$  и  $\varphi^{rd}$  — значения угла  $\varphi$  в  $R^u$  и  $R^d$ . Из перечисленных величин наиболее сложно определить коэффициент связности  $k$  и угол  $\varphi^{rd}$ . Первый по условию задачи (п.г. 4.2) считается известным.

Есть много вариантов определения угла  $\varphi^{rd}$  (п. 4.5.3), Но наиболее правдоподобным является метод определения  $\varphi^{rd}$  из условия строгого равенства в условии (4.43) или других его формах (4.71) и (4.74). Такое действие выполняет подпрограмма **FindPhiRD** (рис. 4.16).

Теперь, когда есть выражения интегралов нормальной  $I_{xx}^r(y^d)$  (4.99) и касательной  $I_{xy}^r(y^d)$  (4.107) составляющих полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$ , а также их заданные по условию задачи (стр. 127–128) действительные значения  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$ , следует сосредоточиться на разработке алгоритмов, позволяющих определять угол  $\varphi^{rd}$  и коэффициент связности  $k$  аналитическим путем. Наперед скажем, что тут есть два варианта. Оба они базируются на развитии алгоритма **FindPhiRD** (рис. 4.16). Что бы их разработать и оценить, сначала изучим функциональные связи  $I_{xx}^r = I_{xx}^r(k, \varphi^{rd})$  (рис. 4.31) и  $I_{xy}^r = I_{xy}^r(k, \varphi^{rd})$  (рис. 4.32). Из анализа рис. 4.31 и 4.32 следует пара основных выводов.

*Первый* относится к рис. 4.31. Его суть состоит в однозначности положения линии  $A_x B_x$ , когда каждому значению интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) соответствует уникальная пара значений коэффициента связности  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$ .

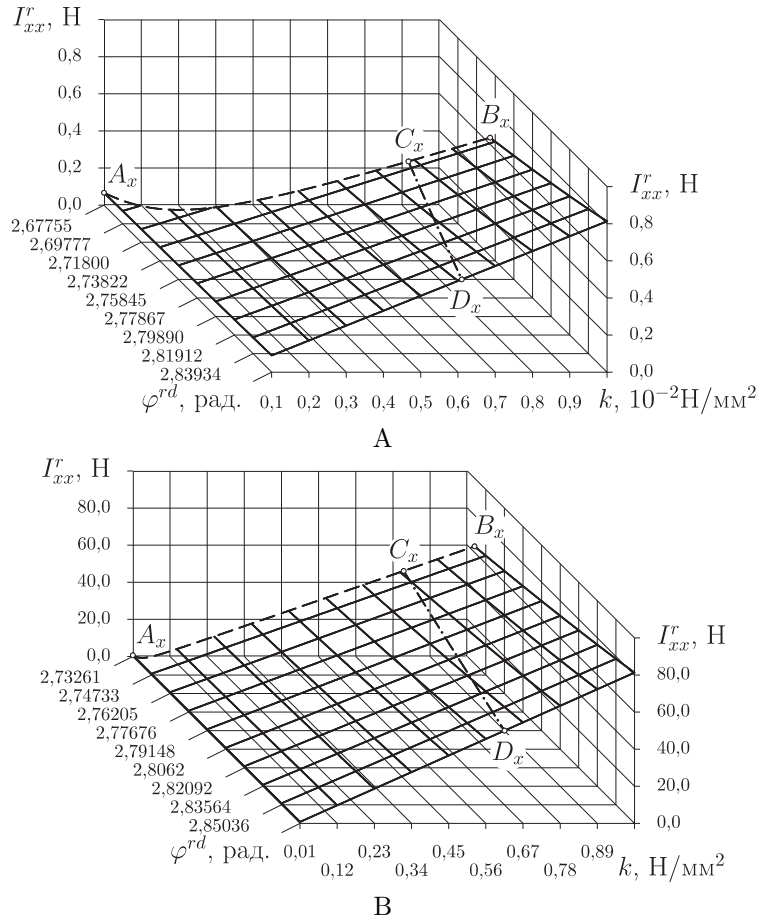


Рис. 4.31. Закономерности изменения интегрального значения  $I_{xx}^r$  (4.99) нормальной компоненты полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$  в зависимости от величин коэффициента сцепления среды  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$  если  $k \in [0,001; 0,01]$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} \in [2,67755; 2,85957]$  рад. (А) или  $k \in [0,01; 1,0]$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} \in [2,73261; 2,86507]$  рад. (В), а все остальные параметры остаются фиксированными:  $y^d = 45,0$  мм;  $f = 0,8391$ ;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад. и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>.  $A_x B_x$  — огибающая кривая, за которой выполнение граничных условий (4.43) и (4.44) невозможно.  $C_x D_x$  — изолиния: А)  $I_{xx}^r = 0,5$  Н; В)  $I_{xx}^r = 50,0$  Н. Постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (4.56), (4.57) и (4.59)

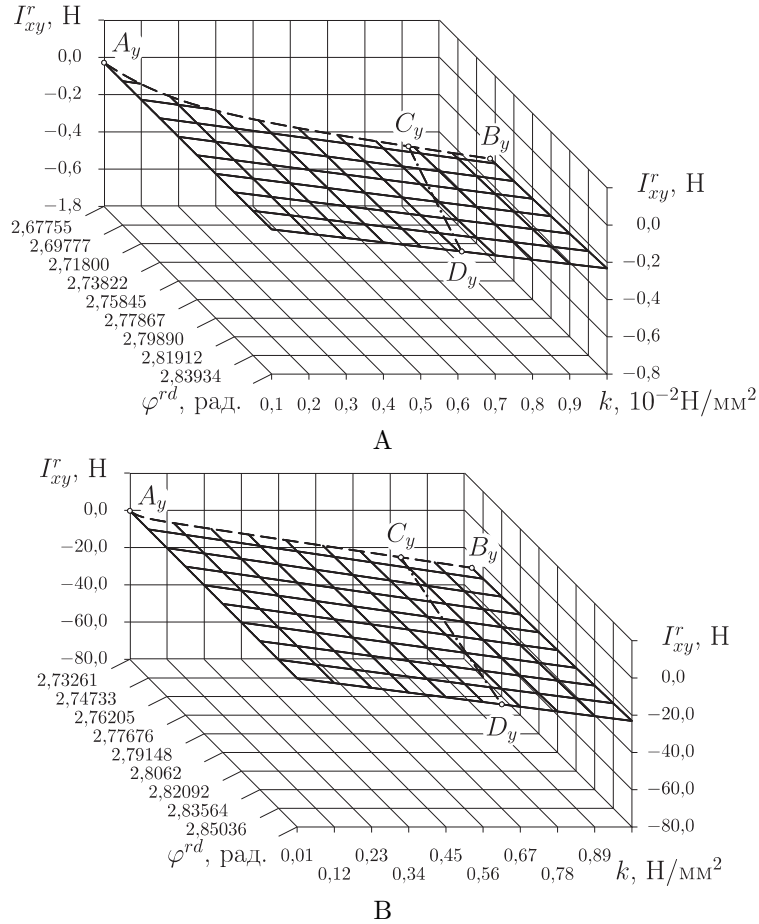


Рис. 4.32. Закономерности изменения интегрального значения  $I_{xy}^r$  (4.107) касательной компоненты полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$  в зависимости от величин коэффициента  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$  если  $k \in [0,001; 0,01]$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} \in [2,67755; 2,85957]$  рад. (А) или  $k \in [0,01; 1,0]$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\varphi^{rd} \in [2,73261; 2,86507]$  рад. (В), а следующие параметры остаются фиксированными:  $y^d = 45,0$  мм;  $f = 0,8391$ ;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад. и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>;  $A_y B_y$  — огибающая кривая, за которой выполнение граничных условий (4.43) и (4.44) невозможно.  $C_y D_y$  — линия, вдоль которой интегральное значение  $I_{xx}^r$  остается фиксированным: А)  $I_{xx}^r = 0,5$  Н; В)  $I_{xx}^r = 50,0$  Н. Постоянные  $C_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (4.56), (4.57) и (4.59)

Их уникальность объясняется тем, что они соответствуют случаю, когда в граничном условии (4.71) или (4.74) при  $\varphi = \varphi^{rd}$  достигается строгое равенство. Таким образом, если этот случай считать достоверным, то, разработав соответствующий алгоритм, неизвестные величины  $k$  и  $\varphi^{rd}$  можно вычислить. Экспериментально следует определить значения  $\gamma$ ,  $f$ ,  $y^d$ ,  $\varphi^{ru}$  и разумеется  $I_{xx0}^r$ . Измерять величину интеграла  $I_{xy0}^r$  при этом не нужно.

*Второй* вывод относится к обоим рис. 4.31 и 4.32. Его суть в следующем: если величина интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) нормальной компоненты полного напряжения остается фиксированной, в то время, как коэффициент сцепления среды  $k$  и угол  $\varphi^{rd}$  согласовано изменяются (например, при перемещении вдоль линий  $C_x D_x$  (рис. 4.31)), то величина интеграла  $I_{xy}^r$  (4.107) касательной компоненты полного напряжения при этом варьирует в широких пределах. Так, при перемещении вдоль  $C_y D_y$  на рис. 4.31,А, которая соответствует фиксированному значению  $I_{xx}^r = 0,5$  Н, величина  $I_{xy}^r$  изменяется от  $-0,21325$  до  $-0,14195$  Н, а при перемещении вдоль  $C_y D_y$  на рис. 4.31,В ( $I_{xx}^r = 50,0$  Н) — от  $-21,327$  до  $-14,187$  Н. Это обстоятельство открывает другой путь построения алгоритма для вычисления  $\varphi^{rd}$  и  $k$ .

В соответствии с двумя приведенными выше выводами были разработаны два алгоритма подпрограмм **FindPhiRDK-I** и **FindPhiRDK-II**, которые предназначены для поиска значений угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента  $k$ .

• Начнем с более простого алгоритма подпрограммы **FindPhiRDK-I** (рис. 4.33). Блок операторов 1 осуществляет ввод исходных данных. Величины  $k_{\min}$  и  $k_{\max}$  предполагаются такими, при которых интервал  $[k_{\min}, k_{\max}]$  охватывал бы предполагаемое значение коэффициента связности  $k$ , которое будет вычислено в **FindPhiRDK-I**.

Оператор 2 осуществляет вычисление  $\varphi_{\min}^{ru}$  (4.65), а следующий оператор 3 выполняет проверку на корректность исходного значения угла  $\varphi^{ru}$ . Если  $\varphi^{ru}$  не попадает в интервал (4.51), то после вывода сообщения об ошибке (оператор 14) выполнение **FindPhiRDK-I** завершается.

Если условный оператор 3 сработал в направлении “Да” то выполнение подпрограммы **FindPhiRDK-I** продолжается с оператора 4, который вызывает другую подпрограмму **FindKmax** (рис. 4.34). Именно **FindKmax**, на которой остановимся позже, выполняет поиск такого значения коэффициента сцепления  $k$ , при котором величина угла  $\varphi^{rd}$  получается такой, что в (4.71), когда  $\varphi = \varphi^{rd}$  достигается строгое равенство, а вычисленное значение интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) горизонтальной составляющей внешней силовой нагрузки  $\mathbf{P}$  равно заданному  $I_{xx0}^r$  (п.г. 4.2).

Далее, обращением к подпрограмме **FindPhiRD** (оператор 5) для найденного коэффициента сцепления  $k$  вычисляется угол  $\varphi^{rd}$ . Как работает подпрограмма **FindPhiRD** (рис. 4.16) уже знаем.

Следующие 5 операторов (6–10) предназначены для проверки корректности экспериментальных исходных данных и то, как они соотносятся с вычисленными значениями коэффициента связности  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$ .

Суть проверки вытекает из рис. 4.26,С. Исходные данные, а также вычисленные  $k$  и  $\varphi^{rd}$  должны быть такими, при которых расчетное значение

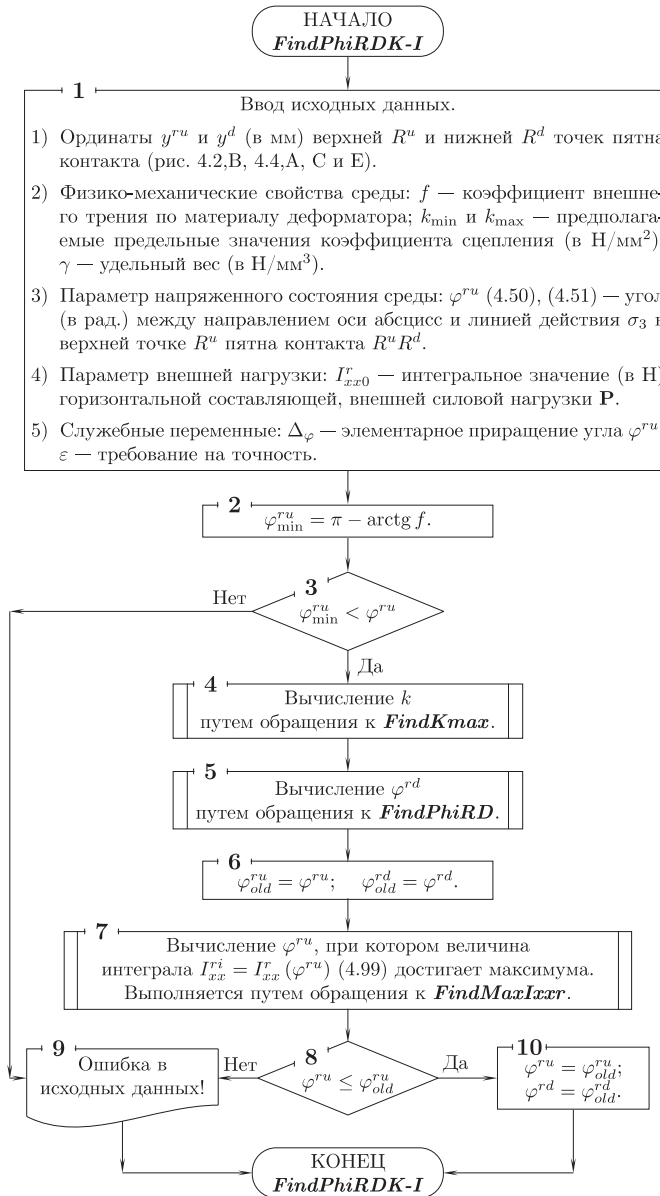


Рис. 4.33. Алгоритм подпрограммы *FindPhiRDK-I* поиска такого значения угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ , при которых вычисленное значение интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) равно заданному  $I_{xx0}^r$ , а в граничном условии (4.71) или (4.74) при  $\varphi = \varphi^{rd}$  достигается равенство

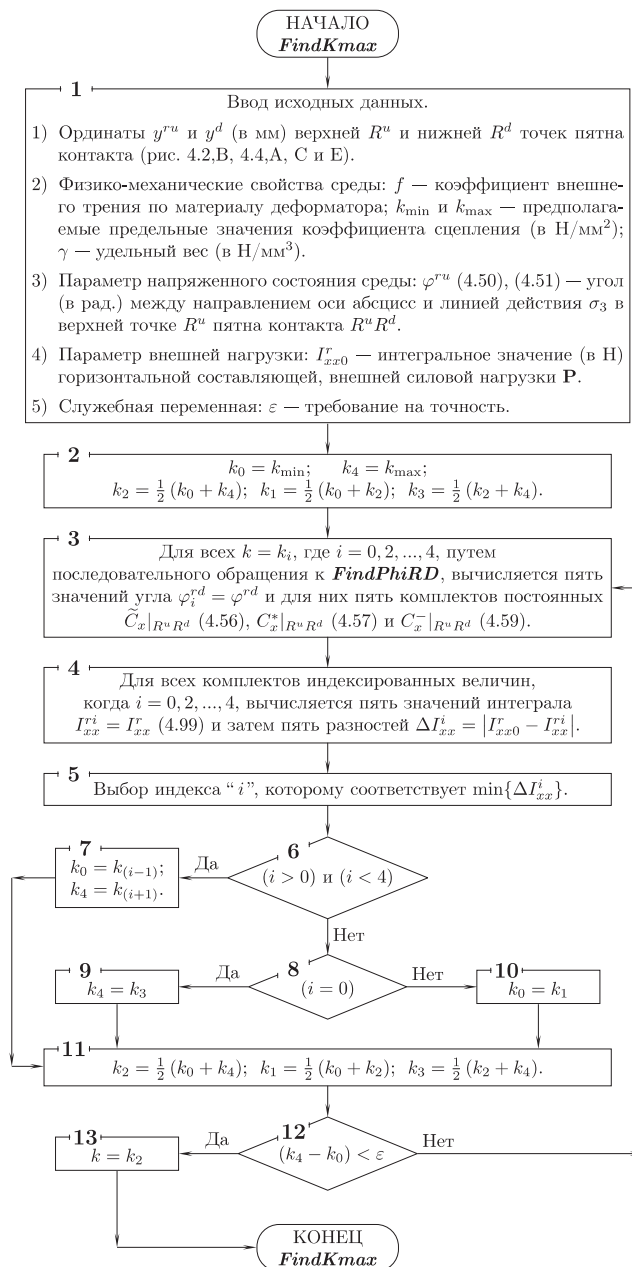


Рис. 4.34. Алгоритм подпрограммы **FindKmax** поиска коэффициента сцепления  $k$ , при котором значение угла  $\varphi^{rd}$  получается таким, что в (4.71), когда  $\varphi = \varphi^{rd}$  достигается равенство, а вычисленное значение интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) равно заданному  $I_{xx0}^r$  (стр. 127–128)



$I_{xx}^r = I_{xx}^r(\varphi^{ru})$  (4.99) лежит справа от линии  $AB$ , т. е. в области больших значений угла  $\varphi^{ru}$  по отношению к максимуму  $I_{xx}^r(\varphi^{ru})$ . Поиск этого максимума выполняет оператор 7 путем вызова **FindMaxIxxr** (рис. 4.35), но прежде заданное изначально значение угла  $\varphi^{ru}$  и вычисленное значение угла  $\varphi^{rd}$  запоминаются в переменных  $\varphi_{old}^{rd}$  и  $\varphi_{old}^{ru}$  (оператор 6).

Теперь, когда известно значение угла  $\varphi^{ru}$ , при котором  $I_{xx}^r(\varphi^{ru})$  достигает своего максимума, выполняется оператор 8. Если он срабатывает в направлении “Да”, то это означает, что с исходными данными все в порядке. После этого оператор 10 восстанавливает начальную величину угла  $\varphi^{ru}$  и вычисленное значение угла  $\varphi^{rd}$ , после чего подпрограмма **FindPhiRDK-I** завершает свою работу, либо передав упомянутые данные в дальнейший вычислительный процесс, либо выполнив операции вывода, открывает их значения пользователю. На рисунке операторы, выполняющие эти операции не показаны. Если условный оператор 8 срабатывает в направлении “Нет”, то в исходных данных имеется некорректность. Поскольку в этом случае необходимо вмешательство исследователя (пользователя), то выполнив вывод 9 подпрограмма **FindPhiRDK-I** завершает свою работу.

Подпрограмма **FindKmax** (рис. 4.34) реализует алгоритм деления отрезка пополам. Логика ее построения опирается на первый вывод (п.г. 4.8) в отношении рисунков рис. 4.31 и 4.32 и понятна без комментариев.

Принцип работы подпрограммы **FindMaxIxxr** также основан на методе деления отрезка пополам и понятен из рис. 4.35.

- Следующая подпрограмма **FindPhiRDK-II** (рис. 4.36 и 4.37) предназначена для поиска такого значения угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ , при которых вычисленные значения интегралов  $I_{xx}^r$  (4.99) и  $I_{xy}^r$  (4.107) горизонтальной и вертикальной составляющих внешней силовой нагрузки  $\mathbf{P}$  соответственно равны заданным величинам  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$  (п.г. 4.2).

По части формирования пакета исходных данных (оператор 1) она идентична первому оператору подпрограммы **FindPhiRDK-I**.

Как и раньше, часть цифр получают экспериментально (перечислены в п.г. 127), а часть — назначаются из физических соображений, пользуясь интуицией и знаниями исследователя. Так, интервал  $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$  изначально должен быть существенно более широким, т.е. таким, который гарантированно включает искомое значение  $k$ . В дальнейшем (операторы 2–9) значения  $k_{\min}$  и  $k_{\max}$  аналитическим способом уточняются, и при этом интервал  $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$  существенно сужается. В отличие от пакета исходных данных **FindPhiRDK-I** сейчас их больше. Добавилось значение  $I_{xy0}^r$  вертикальной составляющей внешней силовой нагрузки  $\mathbf{P}$ . Это непосредственно вытекает из назначения подпрограммы **FindPhiRDK-II**.

Логическое построение алгоритма **FindPhiRDK-II** (рис. 4.36, 4.37) базируется на анализе рисунков рис. 4.31 и 4.32 из текущей подглавы, а точнее, на втором из выводов (стр. 184).

Изолиния  $C_x D_x$  на рис. 4.31 соответствует заданной величине  $I_{xx}^r = I_{xx0}^r$ . Попасть на нее удобнее всего двигаясь вдоль огибающей кривой  $A_x B_x$ , вдоль которой в граничном условии (4.71) или (4.74) достигается строгое

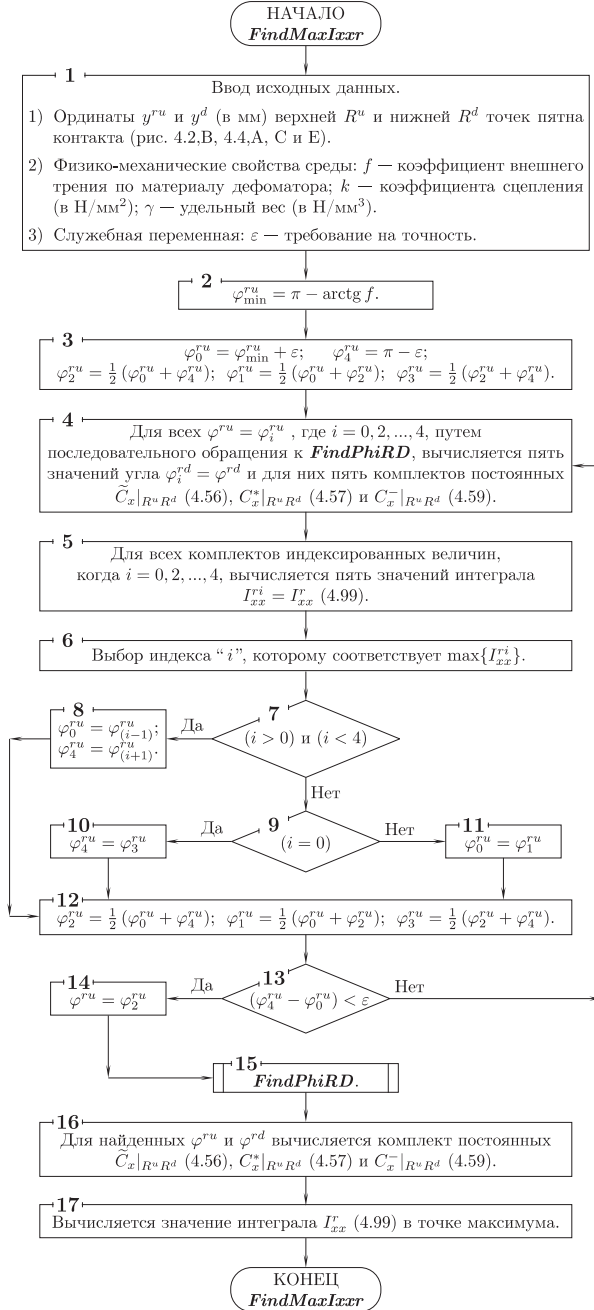


Рис. 4.35. Алгоритм подпрограммы *FindMaxIxxr* поиска такого значения угла  $\varphi^{ru}$ , при котором расчетное значение интеграла  $I_{xx}^r = I_{xx}^r(\varphi^{ru})$  (4.99) достигает максимума

равенство. В *FindPhiRDK-II* это достигается выполнением операторов 2 и 3. Первый из них вызывает подпрограмму *FindKmax* (рис. 4.34), а второй — запоминает найденное значение  $k$  в переменной  $k_{\max}$ , которому соответствует точка  $C_x$  на рис. 4.31. Индекс “max” при  $k$  выбран по той причине, что в дальнейшем вычисления будут идти вдоль линии  $C_x D_x$ , а вдоль нее именно  $k|_{C_x}$  является наибольшим, а  $k|_{D_x}$  — наименьшим.

Оператор 4 подпрограммы *FindPhiRDK-II* выполняет обращение к уже известной подпрограмме *FindPhiRD* (рис. 4.16), которая методом деления отрезка пополам для  $k = k_{\max}$  находит такое значение угла  $\varphi^{rd} = \varphi$ , при котором в (4.71) достигается равенство. Далее (оператор 5) найденное значение  $\varphi^{rd}$  присваивается переменной  $\varphi_{\min}^{rd}$ . Индекс “min” при  $\varphi^{rd}$  тут сно-

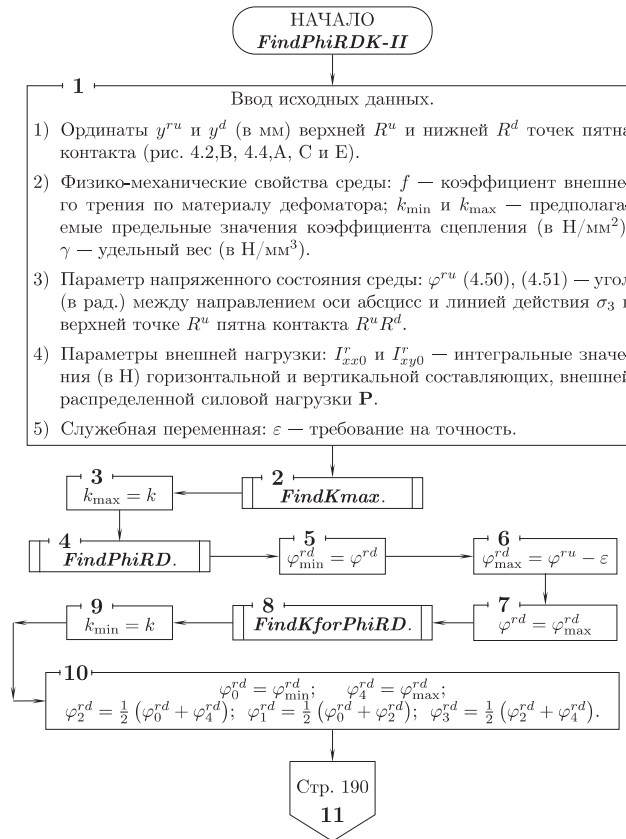


Рис. 4.36. Алгоритм подпрограммы *FindPhiRDK-II* (начало) поиска такого значения угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ , при которых вычисленные значения интегралов  $I_{xx}^r$  (4.99) и  $I_{xy}^r$  (4.107) соответственно равны заданным  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$  (п.г. 4.2)

ва связан с интерпретацией рис. 4.31, из которого следует, что для линии значение  $C_x D_x$  значение  $\varphi^{rd}|_{C_x}$  является минимальным.

Поскольку  $\varphi^{rd}$  всегда меньше  $\varphi^{ru}$ , то логично ограничить интервал возможных значений  $\varphi^{rd}$  величиной  $\varphi_{\max}^{rd} = \varphi^{rd}|_{D_x} = \varphi^{ru} - \varepsilon$ . Это выполняет

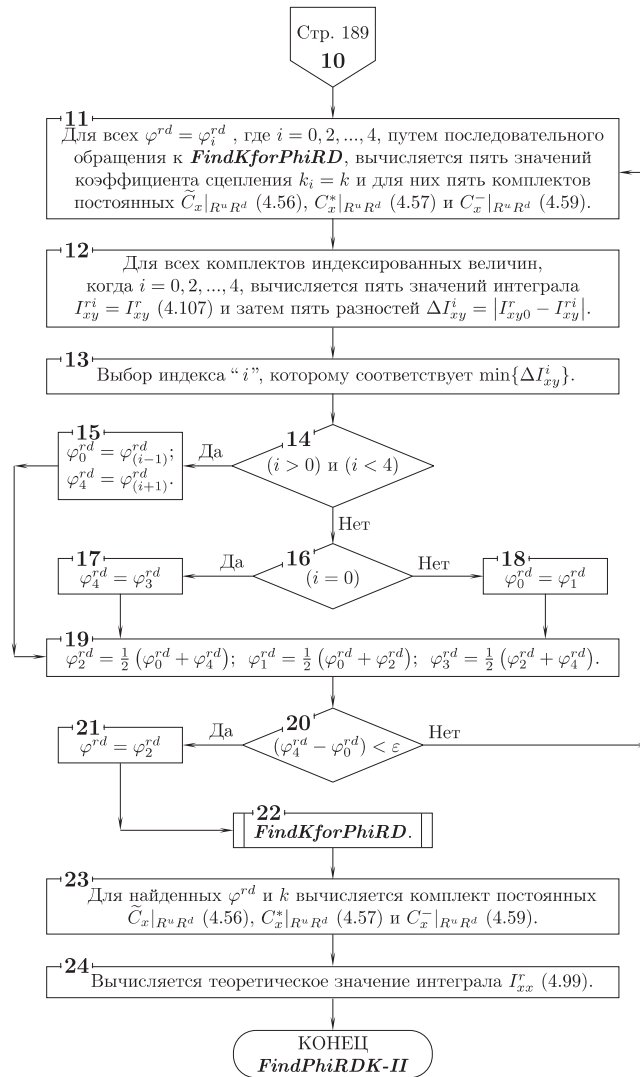


Рис. 4.37. Алгоритм подпрограммы **FindPhiRDK-II** (окончание) поиска такого значения угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ , при которых вычисленные значения интегралов  $I_{xx}^r$  (4.99) и  $I_{xy}^r$  (4.107) соответственно равны заданным  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$  (п.г. 4.2)

оператор 6. Тут переменная  $\varepsilon$  — весьма малое положительное число, которое должно быть как можно ближе к машинному нулю. Теперь интервал  $\varphi^{rd} \in [\varphi_{\min}^{rd}, \varphi_{\max}^{rd}]$  становится определенным.

Дальше, для поиска такого значения коэффициента  $k|_{D_x}$ , которое соответствует  $\varphi^{rd} = \varphi_{\max}^{rd}$  (оператор 7) и при которых  $I_{xx}^r = I_{xx0}^r$ , выполняется вызов (оператор 8) подпрограммы **FindKforPhiRD** (рис. 4.38). Найденное значение  $k$  присваивается переменной  $k_{\min}$  (оператор 9). Применение индекса “min” тут снова вытекает из анализа рис. 4.31. На этом переопределение интервала  $[k_{\min}, k_{\max}]$  возможных значений  $k$  заканчивается.

Дальше группа операторов 10–21 методом деления отрезка пополам находит такое значение  $\varphi^{rd} \in [\varphi_{\min}^{rd}, \varphi_{\max}^{rd}]$ , при котором достигается равенство вычисленного значения интеграла  $I_{xy}^r$  (4.107) касательной компоненты полного напряжения, действующего в пределах пятна контакта  $R^u R^d$  и его заданной величины  $I_{xy0}^r$ . Затем, для найденного финального значения угла  $\varphi^{rd}$  путем обращения к подпрограмме **FindKforPhiRD** (оператор 22) уточняется величина коэффициента сцепления  $k$ .

Последующие два оператора 23 и 24 выполняют проверочный расчет величины  $I_{xy}^r$ , которая не должна отличаться от  $I_{xy0}^r$  более чем на заданную величину  $\varepsilon$ , определяющую требование на точность вычислений. На этом алгоритм подпрограммы **FindPhiRDK-II** (рис. 4.36, 4.37) заканчивается.

Две другие подпрограммы **FindKmax** (рис. 4.34) и **FindKforPhiRD** (рис. 4.38) также работают по методу деления отрезка пополам. О назначении их уже говорилось, а логика их построения понятна из рисунков.

Ценность алгоритма **FindPhiRDK-II** состоит в том, что его применение позволяет вычислить трудноопределимые экспериментально величины — угол  $\varphi^{rd}$  и коэффициент сцепления  $k$  с учетом известной величины интеграла  $I_{xy0}^r$  вертикальной составляющей внешней силовой нагрузки **P**.

Алгоритм **FindPhiRDK-II** также содержит проверки по принципу операторов 2, 3 и 6–10 подпрограммы **FindPhiRDK-I** (рис. 4.33). С целью упрощения на рис. 4.36 и 4.37 они не показаны.

- Прежде чем прибегнуть к анализу расчетов, полученных путем применения алгоритмов **FindPhiRDK-I** и **FindPhiRDK-II** напомним об их назначении и принципиальных различиях. Оба алгоритма предназначены для вычисления угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ . Но **FindPhiRDK-I** не учитывает  $I_{xy0}^r$  и выполняет поиск такого значения коэффициента  $k$ , при котором величина угла  $\varphi^{rd}$  получается такой, что в (4.71), когда  $\varphi = \varphi^{rd}$  достигается строгое равенство, а вычисленное значение интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) равно заданному  $I_{xx0}^r$  (п.г. 4.2). Алгоритм **FindPhiRDK-II**, напротив, учитывает  $I_{xy0}^r$ , но при поиске значений  $\varphi^{rd}$  и  $k$  не требует достижения равенства в граничном условии (4.71), когда  $\varphi = \varphi^{rd}$ .

Чтобы выяснить какой из этих алгоритмов больше соответствует физической сущности решаемой задачи обратимся к результатам расчетов. Рис. 4.39 и 4.40 построены с применением алгоритма **FindPhiRDK-I** и соответствуют трем значениям коэффициент трения  $f$  — 0,83910 (A), 0,70021

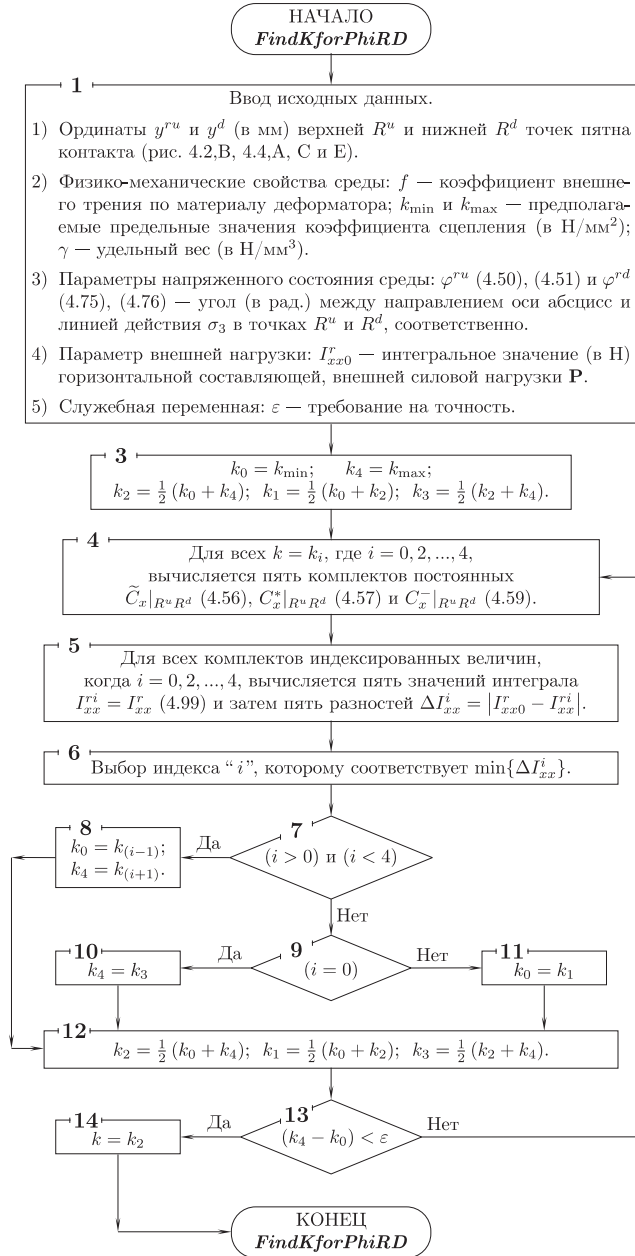


Рис. 4.38. Алгоритм подпрограммы *FindKforPhiRD*, которая для заданного значения угла  $\varphi^{rd}$  выполняет поиск такого значения коэффициента сцепления  $k$ , при котором вычисленное значение интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) равно заданному  $I_{xx0}^r$  (п.г. 4.2)

(В) и 0,57735 (С). Исходя из физической природы решаемой задачи (п.г. 4.2) сформулируем ряд очевидных закономерностей.

1) Если фиксировать все величины, кроме значения интеграла  $I_{xx0}^r$  и коэффициента  $k$ , то с увеличением  $I_{xx0}^r$  соответствующая ему величина  $k$  также должна расти. Иначе не может быть, поскольку в таком случае горизонтальная составляющая  $I_{xx0}^r$  нагрузки  $\mathbf{P}$  не будет уравниваться.

2) Если фиксировать все величины, исключая коэффициент внешнего трения  $f$  и угол  $\varphi^{ru}$ , то с уменьшением  $f$  соответствующий угол  $\varphi^{ru}$  должен уменьшаться. Это поясняется возрастающим проскальзыванием среды по лобовой поверхности деформатора.

3) При прочих равных увеличение коэффициента связности  $k$  должно приводить к увеличению угла  $\varphi^{ru}$ . Поясняется это тем, что более жесткая среда, очевидно, хуже продвигается вверх по лобовой поверхности деформатора, а, значит, ей будет соответствовать и больший угол  $\varphi^{ru}$ .

4) Причины, приводящие к уменьшению угла  $\varphi^{ru}$ , должны так же сказываться и на значении  $\varphi^{rd}$ . Этот тезис поясняется тем, что уменьшение перечисленных углов всегда есть следствием: а) увеличения силового воздействия на среду ( $I_{xx0}^r$ ); б) уменьшения реактивности среды ( $k$ ); в) уменьшения трения в области пятна контакта ( $f$ ) среды с деформатором.

На рис. 4.39 и 4.40 наблюдаем полное подтверждение всех закономерностей, перечисленных выше в пунктах 1)–4).

Теперь обратимся к рис. 4.41 и 4.42, которые построены путем применения подпрограммы **FindPhiRDK-II** и также соответствуют трем значениям коэффициента трения  $f = 0,83910$  (А),  $0,70021$  (В) и  $0,57735$  (С). Для этих рисунков, снова таки опираясь на физическую сущность решаемой задачи (п.г. 4.2), можно также сформулировать ряд закономерностей.

1) При прочих равных, увеличение интегралов нормальной  $I_{xx0}^r$  и модуля касательной  $I_{xy0}^r$  компонент полного напряжения, действующего на поверхности пятна контакта  $R^u R^d$ , должно приводить к увеличению коэффициента сцепления  $k$  среды. Поясняется это тем, что увеличенной интенсивности силового воздействия должна приводиться в соответствие увеличенная сопротивляемость среды, т.е. ее коэффициент сцепления.

2) При фиксированных значениях остальных величин, увеличение  $I_{xx0}^r$  и модуля  $I_{xy0}^r$  должно приводить к уменьшению угла  $\varphi^{rd}$ . В этом случае сопротивляемость среды ( $k$ ) фиксирована, а, значит, рост интенсивности силового воздействия должен сказаться на геометрии предельной области и, в частности, на величинах углов  $\varphi^{ru}$  и  $\varphi^{rd}$ . Анализ этого пункта затрудняется по той причине, что при фиксированном  $k$  углы  $\varphi^{ru}$  и  $\varphi^{rd}$  должны изменяться синхронно, а рис. 4.41 и 4.42 построены из предпосылки, что угол  $\varphi^{ru}$  также фиксирован.

Как видим, первую закономерность рис. 4.41 и 4.42 подтверждают однозначно, а вторую нет. Действительно увеличение модуля  $I_{xy0}^r$  при фиксированном  $I_{xx0}^r$  приводит к уменьшению угла  $\varphi^{rd}$ , что правильно. Но увеличение  $I_{xx0}^r$  при фиксированном  $I_{xy0}^r$  приводит к обратной закономерности.

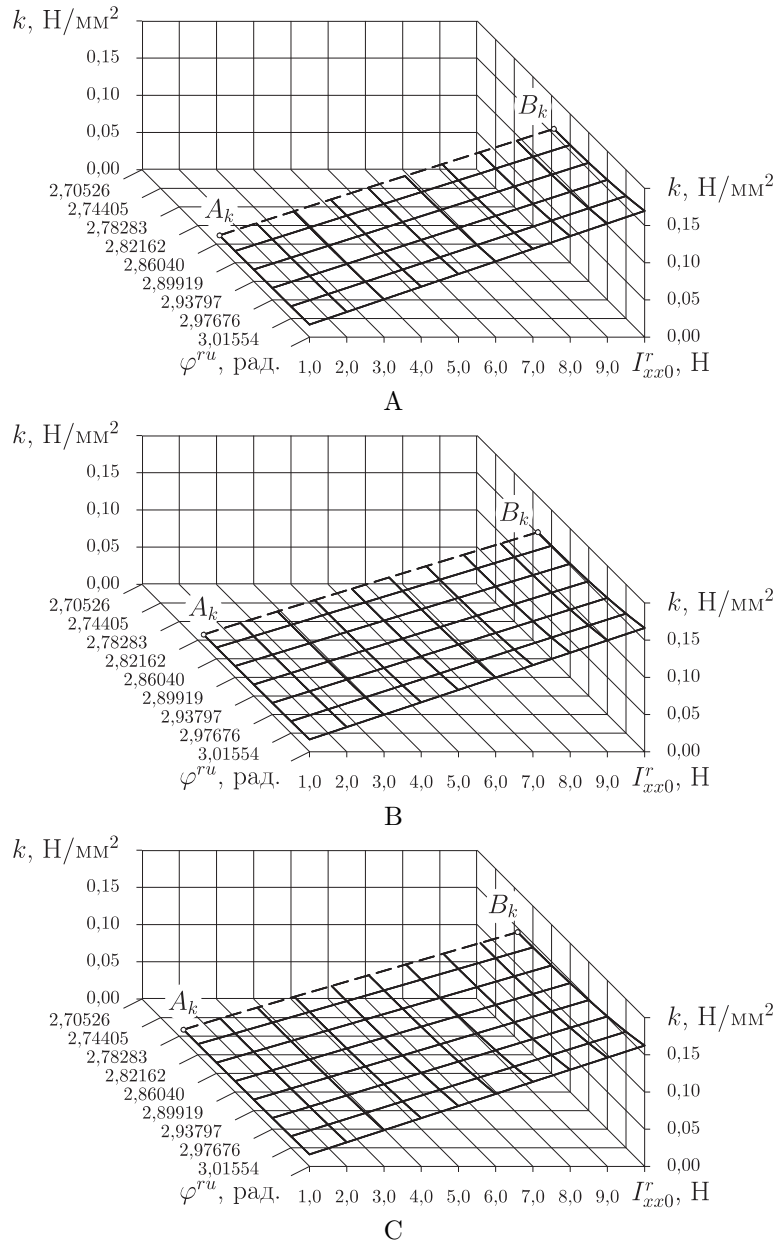


Рис. 4.39. Результаты расчетов величины коэффициента сцепления среды  $k$  для случая, когда коэффициент трения  $f$  принимает три значения 0,8391 (А), 0,70021 (В), 0,57735 (С);  $I_{xx0} \in [1,0; 10,0]$  Н;  $\varphi^{ru} \in [2,7053; 3,0543]$  рад.;  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>;  $y^d = 45,0$  мм. Расчеты выполнены путем применения подпрограммы **FindPhiRDK-I**



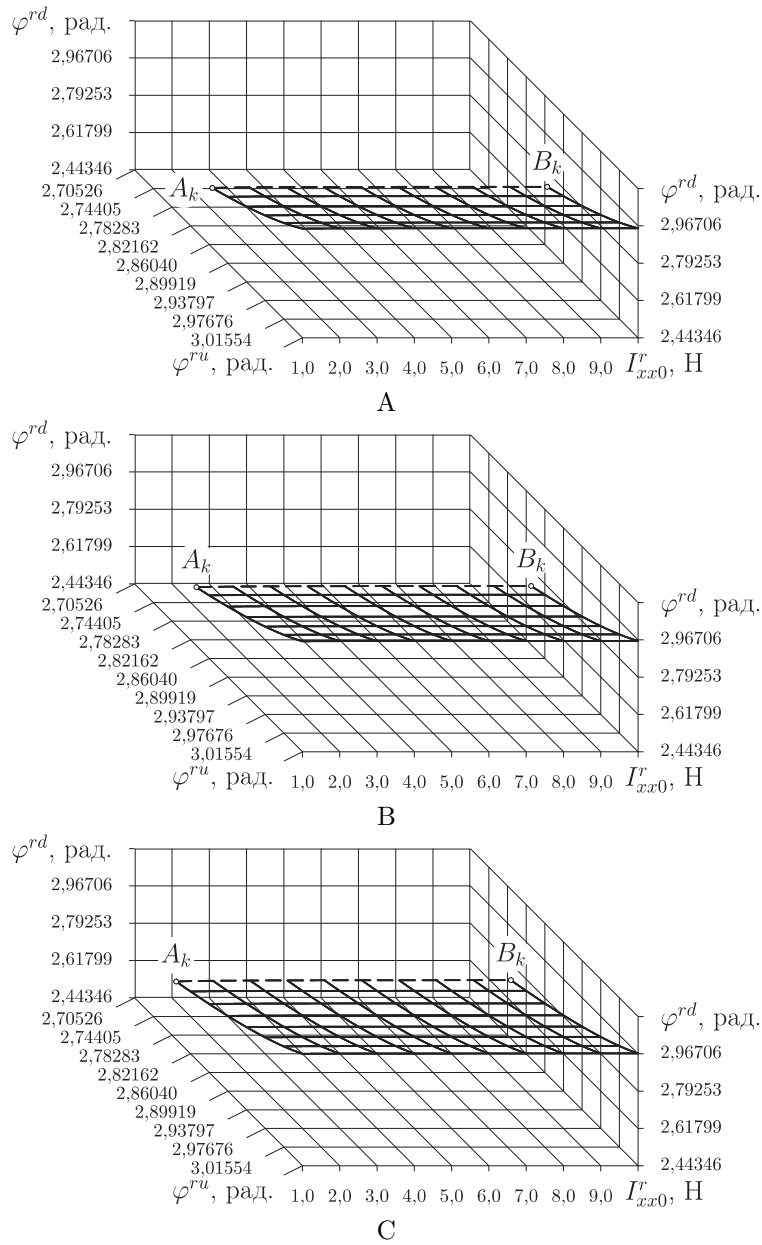


Рис. 4.40. Результаты расчетов величины угла  $\varphi^{rd}$  для случая, когда коэффициент трения  $f$  принимает три значения — 0,8391 (А), 0,70021 (В), 0,57735 (С);  $I^r_{xx0} \in [1,0; 10,0]$  Н;  $\varphi^{ru} \in [2,7053; 3,0543]$  рад.;  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>;  $y^d = 45,0$  мм. Расчеты выполнены путем применения подпрограммы **FindPhiRDK-I**

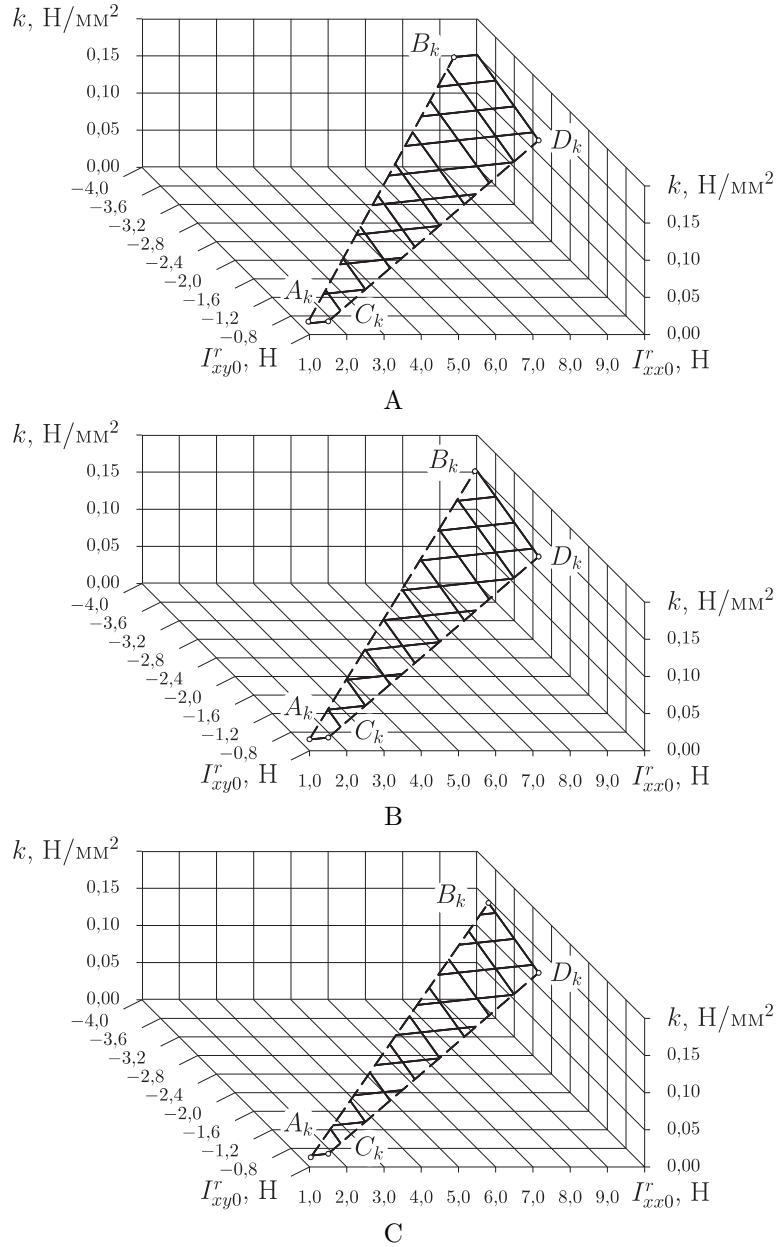


Рис. 4.41. Результаты расчетов коэффициента  $k$ :  $I_{xx0}^r \in [1,0; 10,0]$  Н;  $I_{xy0}^r \in [0,4; 4,0]$  Н;  $f$  принимает три значения  $-0,8391$  (А),  $0,70021$  (В),  $0,57735$  (С);  $y^d = 45,0$  мм;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад. и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>. Линии  $A_k B_k$  и  $C_k D_k$  ограничивают область совместимых пар значений  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$ . Расчеты выполнены с применением **FindPhiRDk-II**

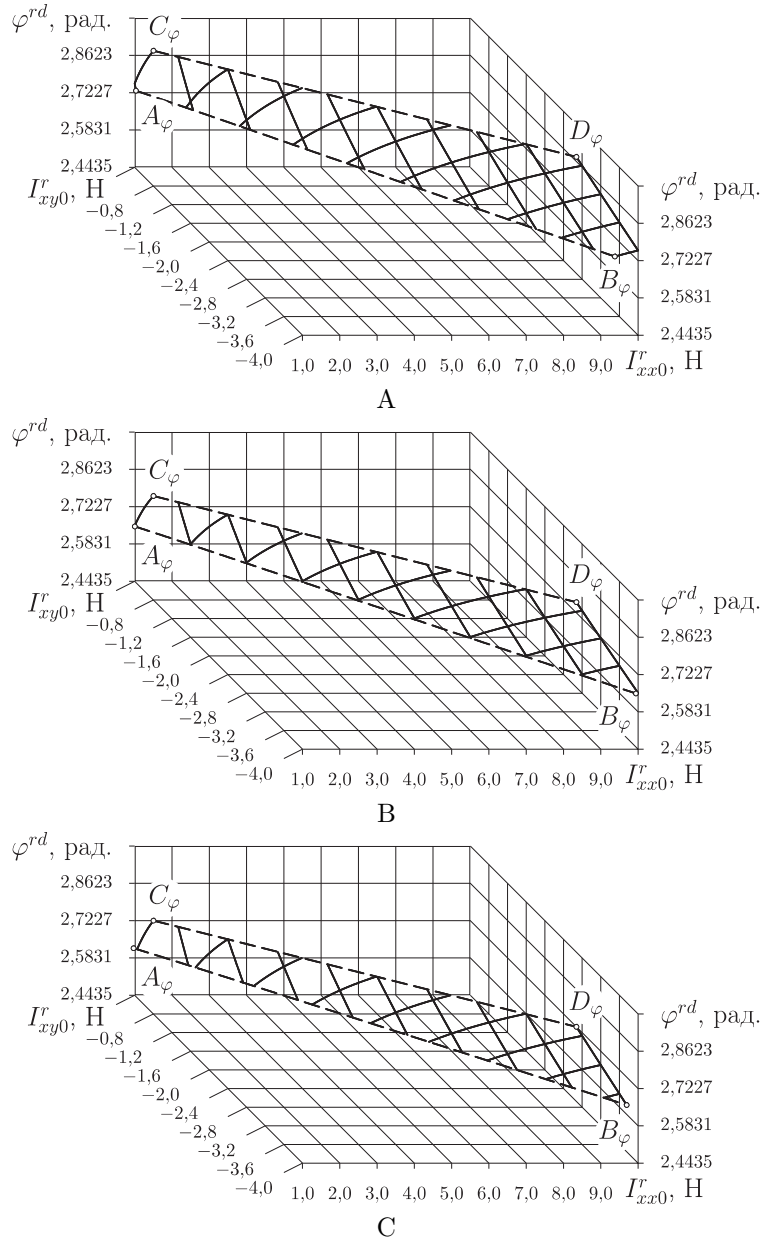


Рис. 4.42. Результаты расчетов угла  $\varphi^{rd}$ :  $I^r_{xx0} \in [1,0; 10,0]$  Н;  $I^r_{xy0} \in [0,4; 4,0]$  Н;  $f$  принимает три значения — 0,8391 (А), 0,70021 (В), 0,57735 (С);  $y^d = 45,0$  мм;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад. и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>. Линии  $A_k B_k$  и  $C_k D_k$  ограничивают область совместимых пар значений  $I^r_{xx0}$  и  $I^r_{xy0}$ . Расчеты выполнены с применением **FindPhiRDK-II**



$M$ . Последняя и до нагружения, и после него не меняет своего абсолютного положения в пространстве. Вдоль линии  $LR$  выполняются соотношения (4.27)–(4.29). Определить ординату  $y^{lr}$  можно так:

$$y^{lr} = y^{ru} + \Delta_y, \quad (4.129)$$

где  $\Delta_y$  — приращение ординаты, в данном случае  $y^{ru}$ .

$$y^{lr} \leq y^m, \quad (4.130)$$

где

$$y^m = y^d - h \quad (4.131)$$

— ордината точки  $M$  или любой другой точки, например,  $L^m$  и/или  $R^m$ , находящейся на том же уровне, т.е. на линии  $MR^m$ , которая в данном случае определяется через исходные данные (п.г. 4.2), среди которых ордината  $y^d$  точки  $R^d$  и глубина  $h$  погружения деформатора.

Ранее п. 128, отмечалось, что поверхность, обозначенная линией  $L^mLR^u$ , полностью состоит из главных площадок и вдоль нее выполняется условие (4.14), а, значит, для точки  $L$  можно записать:

$$\sigma_1|_L = \sigma_1|_{L^mR^u} = 0. \quad (4.132)$$

Точкам  $L$  и  $R$  соответствуют значения абсцисс:

$$x^l = x|_L, \quad x^r = x|_R, \quad (4.133)$$

углы:

$$\varphi^l = \varphi|_L, \quad \varphi^r = \varphi|_R \quad (4.134)$$

и полусумм главных нормальных напряжений:

$$s^l = s|_L, \quad s^r = s|_R. \quad (4.135)$$

Вычисление постоянных  $C_y^*$ ,  $\tilde{C}_y$ ,  $C_y^-$ , необходимых для соотношений на абсциссе (4.27)–(4.29) следует начинать с поиска значения постоянной  $C^v$ , которая является единой для всех соотношений (4.27)–(4.33) и которая, с учетом известности  $C_x^*$  (4.56),  $\tilde{C}_x$  (4.57) и  $C_x^-$  (4.59), может быть найдена простым решением (4.33):

$$C^v = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \frac{\gamma C_x^* - C_x^- + \tilde{C}_x}{2k}. \quad (4.136)$$

Далее, определившись с положением сечения  $LR$ , т.е., со значением  $\Delta_y$ , а, значит, и со значением  $y^{lr} = \Delta_y$  (4.129), поскольку  $y^{ru} = 0$  (4.52), по формуле (4.39), учитывая (4.41) находим:

$$\varphi^r = \pi + \arctg \left\{ \frac{2k}{y^{lr} - C_x^*} \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \right\}. \quad (4.137)$$

Теперь, выполнив подстановку  $y = y^{lr}$  и  $\varphi = \varphi^r$  в соотношение (4.31), находим полусумму  $s^r$  (4.135) главных напряжений, действующих в  $R$ :

$$s^r = -k \ln(\sin^2 \varphi^r) + \gamma y^{lr} - k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x. \quad (4.138)$$

Затем идет серия действий по вычислению постоянных  $\tilde{C}_y, C_y^*, C_y^-$ . Начнем с последнего. Для этого решаем соотношение (4.28), относительно  $C_y^-$  и выполняем подстановку  $s = s^r$  и  $\varphi = \varphi^r$ . В результате получаем:

$$C_y^-|_{LR} = s^r + k \ln(\cos^2 \varphi^r). \quad (4.139)$$

Поскольку  $C^v$  является известной (4.136) и единой для всех соотношений (4.27)–(4.33), то, решив (4.29) относительно  $\tilde{C}_y$ , находим:

$$\tilde{C}_y|_{LR} = C_y^- + k \ln(2(C^v)^2). \quad (4.140)$$

Последней вычисляем  $C_y^*|_{LR}$ . Для этого решаем соотношение (4.27) относительно  $C_y^*$  и подставляем  $x = x^r, y = y^{lr}$  и  $\varphi = \varphi^r$ . В итоге имеем:

$$C_y^*|_{LR} = x^r - 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k} \operatorname{tg} \varphi^r. \quad (4.141)$$

Таким образом, получили выражения для вычисления всех искомым постоянных  $C_y^-$  (4.139),  $\tilde{C}_y$  (4.140) и  $C_y^*$  (4.141), вошедших в выполняющиеся вдоль  $LR$  соотношения (4.27)–(4.29). Далее нам следует сформулировать критерий, применив который можно сделать вывод о том, что линия  $LR$  совпала с границей гребня  $L^m R^m$  или расположилась ниже этой границы.

Тут, во-первых, можно использовать определение ординаты  $y^m$  (4.131) точки  $M$ . В таком случае критерием достижения или прохода уровня линии  $L^m R^m$  является неравенство:

$$y^{lr} \geq y^m, \quad (4.142)$$

или строгое равенство:

$$y^{lr} = y^m + \varepsilon^y, \quad (4.143)$$

где  $\varepsilon^y$  — весьма малая, определяемая требованием на точность вычислений, положительная величина. Чем меньше  $\varepsilon^y$ , тем выше точность вычислений.

Во-вторых, в качестве второго критерия можно использовать условие (4.132), которое должно выполняться, когда:

$$\varphi^l = \varphi^{lm} - \varepsilon^\varphi, \quad (4.144)$$

где  $\varphi^{lm} = \pi$  — угол  $\varphi$  в точке  $L^m$ , который раньше был определен выражением (4.25);  $\varepsilon^\varphi$  — аналогичная  $\varepsilon^y$  весьма малая положительная величина.

В идеале  $\varepsilon^y = 0, \varepsilon^\varphi = 0$  и тогда  $y^{lr} = y^m = y^d - h, \varphi^l = \varphi^{lm} = \pi$ , а, значит, линия  $LR$  совпала с линией  $L^m R^m$  и сопряжение кривой свободного контура  $L^m LR^u$  гребня с прямолинейным отрезком  $ML^m$  дневной поверхности массива среды происходит без излома.

4.9.2. Постоянные величины из соотношений на абсциссе для средней части предельной области. Далее речь идет о методике расчета постоянных величин  $C_y^*$ ,  $\tilde{C}_y$ ,  $C_y^-$ , вошедших в соотношения на абсциссе (4.27)–(4.29) которые выполняются вдоль линий  $L^c R^c$ , располагающихся в интервале между точками  $R^m$  и  $R^d$  (рис. 4.43,А).

Положение линии  $L^c R^c$  можно однозначно определить ординатой:

$$y^c = y^m + \Delta_y, \quad (4.145)$$

где  $\Delta_y$  — как прежде (в (4.129)), приращение ординаты.

По сути методика вычисления постоянных  $C_y^*$ ,  $\tilde{C}_y$  и  $C_y^-$  для текущего случая совпадает с таковой из предыдущего параграфа. Далее только следует ввести новые переменные и провести соответствующие замены.

Для точек  $L^c$  и  $R^c$  определяем обозначения абсцисс:

$$x^{lc} = x|_{L^c}, \quad x^{rc} = x|_{R^c}, \quad (4.146)$$

углов:

$$\varphi^{lc} = \varphi|_{L^c}, \quad \varphi^{rc} = \varphi|_{R^c} \quad (4.147)$$

и полусумм главных нормальных напряжений:

$$s^{lc} = s|_{L^c}, \quad s^{rc} = s|_{R^c}. \quad (4.148)$$

Теперь переписываем выражения (4.137)–(4.141), заменив  $y^{lr}$  на  $y^c$ ,  $\varphi^r$  на  $\varphi^{rc}$  и  $s^r$  на  $s^{rc}$ . В результате получаем:

$$\varphi^{rc} = \pi + \arctg \left\{ \frac{2k}{y^c - C_x^*} \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \right\}, \quad (4.149)$$

$$C_y^-|_{L^c R^c} = s^{rc} + k \ln (\cos^2 \varphi^{rc}), \quad (4.150)$$

$$\tilde{C}_y|_{L^c R^c} = C_y^- + k \ln (2(C^v)^2), \quad (4.151)$$

$$C_y^*|_{L^c R^c} = x^{rc} - 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^c}{2k} \operatorname{tg} \varphi^{rc}. \quad (4.152)$$

Критериев того, что линия  $L^c R^c$  достигла точки  $R^d$  или опустилась ниже нее существует также два, причем, как и в предыдущем случае, первый определяется через исходные данные, а второй — через расчетные величины.

Первый касается отсчета ординаты и по прежнему может быть представлен или в виде неравенства:

$$y^c \geq y^d, \quad (4.153)$$

или в виде равенства:

$$y^c = y^d + \varepsilon^y, \quad (4.154)$$

где  $y^d$  — известная по условию задачи (п.г. 4.2) ордината точки  $R^d$ , а  $\varepsilon^y$  — подобно определению (4.143) весьма малая положительная величина, определяющая точность вычислений.

Второй критерий касается отсчета величины угла  $\varphi^{rc}$  и также может быть представлен или в виде неравенства:

$$\varphi^{rc} \leq \varphi^{rd}, \quad (4.155)$$

или в виде равенства:

$$\varphi^{rc} = \varphi^{rd} - \varepsilon^\varphi, \quad (4.156)$$

где  $\varepsilon^\varphi$  — определено выше при выводе выражения (4.144) и является требованием на точность вычислений, а  $\varphi^{rd}$  — вычисляемая величина, которой наряду с прочим посвящен п.г. 4.8.

В идеале  $\varepsilon^y = 0$ ,  $\varepsilon^\varphi = 0$ . В этом случае линия  $L^c R^c$  содержит точку  $R^d$ , а требования (4.154) и (4.156) дают:

$$y^c = y^d, \quad \varphi^{rc} = \varphi^{rd}. \quad (4.157)$$

Этот случай также следует применять в теоретических выкладках.

4.9.3. Постоянные величины из соотношений на абсциссе для нижней части предельной области. В текущем параграфе речь идет о методике расчета постоянных величин  $C_y^*$ ,  $\tilde{C}_y$ ,  $C_y^-$ , вошедших в соотношения на абсциссе (4.27)–(4.29), которые выполняются вдоль горизонтальной линий  $L^b R^b$ , располагающейся ниже точки  $R^d$  (рис. 4.43, А). Эта методика имеет ряд особенностей. На них и остановимся.

Положение линии  $L^b R^b$  или  $L^b R^{b'}$  можно определить ординатой:

$$y^b = y^d + \Delta_y, \quad (4.158)$$

где  $\Delta_y$  соответствует одноименной величине из предыдущих определений (4.129), (4.145) и является приращением ординаты.

Поскольку соотношения на ординате (4.30)–(4.33) с учетом известных значений постоянных  $C_x^*$  (4.56),  $\tilde{C}_x$  (4.57) и  $C_x^-$  (4.59) формально выполняются и за пределами точки  $R^d$ , т.е. когда  $y > y^d$ , а  $\varphi < \varphi^{rd}$ , а соотношения на абсциссе (4.27)–(4.29) — за пределами огибающей характеристики  $L^m L^c R^d$ , то в дальнейшем для определения постоянных  $C_y^*$ ,  $\tilde{C}_y$  и  $C_y^-$  с использованием методик двух предыдущих п. 4.9.1 и 4.9.2 выгодно воспользоваться точкой  $R^{b'}$ . Эта точка лежит на пересечении продолжения горизонтального отрезка  $L^b R^b$  с продолжением отрезка  $R^u R^d$ , относящегося к пятну контакта. Физического смысла она не имеет.

Теперь, как прежде (в п. 4.9.1 и 4.9.2), введем ряд обозначений. Сначала для точек  $L^b$ ,  $R^b$  и  $R^{b'}$  определяем обозначения абсцисс:

$$x^{lb} = x|_{L^b}, \quad x^{rb} = x|_{R^b}, \quad x^{rb'} = x|_{R^{b'}}, \quad (4.159)$$



а затем углов:

$$\varphi^{lb} = \varphi|_{L^b}, \quad \varphi^{rb} = \varphi|_{R^b}, \quad \varphi^{rb'} = \varphi|_{R^{b'}}, \quad (4.160)$$

и полусумм главных нормальных напряжений:

$$s^{lb} = s|_{L^b}, \quad s^{rb} = s|_{R^b}, \quad s^{rb'} = s|_{R^{b'}}. \quad (4.161)$$

Далее перепишем выражения (4.149)–(4.152), заменив  $y^c$  на  $y^b$ ,  $\varphi^{rc}$  на  $\varphi^{rb'}$  и  $s^{rc}$  на  $s^{rb'}$ . В результате получаем искомые выражения:

$$\varphi^{rb'} = \pi + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2k}{y^b - C_x^*} \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \right\}, \quad (4.162)$$

$$C_y^-|_{L^b R^b} = s^{rb'} + k \ln (\cos^2 \varphi^{rb'}), \quad (4.163)$$

$$\tilde{C}_y|_{L^b R^b} = C_y^- + k \ln (2(C^v)^2), \quad (4.164)$$

$$C_y^*|_{L^b R^b} = x^{rb'} - 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^b}{2k} \operatorname{tg} \varphi^{rb'}. \quad (4.165)$$

Сложнее обстоят дела с критерием, обозначающим требование, до какой величины ординаты  $y^b$  следует вычислять перечисленные постоянные. Ведь каждое новое положение отрезка  $L^b R^b$ , начиная буквально с первого значения  $y^b > y^d$  (см. рис. 4.43,В), фактически может оказаться ниже огибающей характеристики  $L^m L^c R^d$ .

Рассмотрим случай, когда огибающая характеристика  $L^m L^c R^d$  не опускается ниже точки  $R^d$  (рис. 4.43,В). Из уравнений (2.80) характеристик следует, что они всегда расходятся в стороны от линии действия большего из главных нормальных напряжений, а, значит, случай рис. 4.43,В формально невозможен. С другой стороны характеристики, которые пересекают огибающую на ней обрываются, а, значит, случай рис. 4.43,В в принципе возможен, все зависит от того, какую из характеристик считать огибающей. Предпочтительнее вариант в соответствии с рис. 4.43,А и утверждение о том, что он реализуется всегда, поскольку позволяет считать огибающей любую из двух характеристик, а решение, какая из них соответствует физическому смыслу, можно принять, опираясь на экспериментальный опыт.

Таким образом, во-первых, далее остановимся на варианте рис. 4.43,А, а, во-вторых, разработку критерия о выходе линии  $L^b R^b$  за пределы огибающей  $L^m L^c R^d$  отложим до разработки алгоритма для ее построения.

#### 4.10. Согласование величин, определяющих напряженное состояние среды в произвольном вертикальном сечении предельной области

Для изложения методики вычисления постоянных  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$  и  $C_x^-$ , вошедших в соотношения на ординате (4.30)–(4.33), обратимся к рис. 4.44. Речь идет о линии произвольного вертикального сечения  $LC^\lambda$ . Тут верхний индекс “ $\lambda$ ” выбран в предположении, что огибающая линия  $L^m R^d$  является



Постоянную  $C_x^- = C_x^-|_{LC^\lambda}$  можно вычислить, непосредственно воспользовавшись выражением (4.33).

Прежде чем приступить к определению значений  $\varphi^\lambda$  и  $s^\lambda$  необходимо вычислить параметр  $\lambda_1 = \lambda_1|_{L^m R^d}$  или  $\lambda_2 = \lambda_2|_{L^m R^d}$  характеристики первого или второго семейства, составляющей начальный отрезок огибающей кривой  $L^m R^d$  или всю эту кривую. Для этого следует воспользоваться выражениями (2.82), положив, что  $\alpha = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1|_{L^m R^d} \\ \lambda_2|_{L^m R^d} \end{array} \right\} = s^{rd} \mp 2k\varphi^{rd} - \gamma y^d, \quad (4.172)$$

где  $\varphi^{rd} = \varphi|_{R^d}$ ,  $s^{rd} = s|_{R^d}$  и  $y^d = y|_{R^d}$  — угол, полусумма главных напряжений и ордината в точке  $R^d$ . Все эти величины считаем известными.

Поскольку параметр  $\lambda_1|_{L^m R^d}$  или  $\lambda_2|_{L^m R^d}$  остается постоянным вдоль всей соответствующей характеристики, пересекающей  $L^m R^d$  в точке  $C^\lambda$  или совпадающей с кривой  $L^m R^d$  полностью или частично, то в выражении (4.172)  $s^{rd}$ ,  $\varphi^{rd}$  и  $y^d$  можно сменить на соответствующие  $s^\lambda$ ,  $\varphi^\lambda$  и  $y^\lambda$ , но относящиеся к точке  $C^\lambda$ . В таком случае, с учетом соотношения (4.31) из (4.172) получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1|_{L^m R^d} \\ \lambda_2|_{L^m R^d} \end{array} \right\} = -k \ln(\sin^2 \varphi^\lambda) \mp 2k\varphi^\lambda - k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (4.173)$$

где постоянные  $C^v$  и  $\tilde{C}_x$  уже определены выражениями (4.136) и (4.170).

Решив численно последнее уравнение относительно угла  $\varphi^\lambda$ , далее, используя соотношения (4.30) и (4.31), можно вычислить значения ординаты  $y^\lambda$  и полусуммы главных напряжений  $s^\lambda$ . С этого момента и сама точка  $C^\lambda$ , и напряженное состояние в ней становятся определенными.

#### 4.11. Алгоритм вычисления координат точек кривой свободного контура

Далее остановимся на построении кривой  $L^m L R^u$  — верхней границы области предельного равновесия, именуемой кривой свободного контура или просто свободным контуром, рис. 4.43,А. При этом воспользуемся уже упоминавшимся обстоятельством о том, что свободный контур полностью состоит из главных площадок и что вдоль него выполняется условие (4.132). В таком случае, воспользовавшись выражением (4.45), записываем:

$$\sigma_1|_{L^m L R^u} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right] = 0, \quad (4.174)$$

где компоненты  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  тензора напряжений определяются выражениями (2.31). Подстановка последних в (4.174) приводит к следующему:

$$s|_{L^m L R^u} = k. \quad (4.175)$$

Поскольку точка  $L$  может располагаться в любом месте на кривой свободного контура  $L^m LR^u$ , включая обе его крайние точки, то на основании (4.175) записываем:

$$s^l = k. \quad (4.176)$$

Учитывая последнее, из соотношения (4.28) получаем:

$$\varphi^l = \pi - \arccos \left( \exp \frac{C_y^- - s^l}{2k} \right). \quad (4.177)$$

Далее, для определения абсциссы  $x^l$  точки  $L$  перепишем соотношение (4.27), предварительно выполнив подстановку в него  $y = y^{lr}$  и  $\varphi = \varphi^l$  (4.177). В итоге получаем:

$$x^l = 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y^{lr}}{2k} \operatorname{tg} \varphi^l + C_y^*. \quad (4.178)$$

Приведенных тут (4.174)–(4.178) и ранее (в п. 198) выкладок достаточно, чтобы составить алгоритм подпрограммы **FreeContour** (рис. 4.45) построения кривой  $L^m LR^u$  свободного контура (рис. 4.43).

Начинается **FreeContour** как всегда блоком операторов 1, посвященных вводу исходных данных. Перечисленные в нем параметры практически полностью совпадают с таковыми для **FindPhiRDK-I** (рис. 4.33) и **FindPhiRDK-II** (рис. 4.36). Иначе и быть не может, ведь та или другая на выбор вызываются из подпрограммы **FreeContour**. Добавилось только элементарное приращение ординаты  $\Delta_y$ , которая необходима для нормирования продвижения вдоль кривой  $L^m LR^u$  в процессе ее построения.

Проверка исходных данных на корректность, а также вычисление  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$  для точки  $R^d$  выполняется путем обращения к уже известной подпрограмме **FindPhiRDK-I** или **FindPhiRDK-II** (оператор 2). Выбор между этими подпрограммами выполняется путем изменения значения управляющей переменной в блоке исходных данных. Упомянутая переменная и операторы, осуществляющие такой выбор, на рис. 4.45 не показаны.

Блок операторов 3 выполняет вычисление постоянных  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$  (4.56),  $C_x^*|_{R^u R^d}$  (4.57),  $C_x^-|_{R^u R^d}$  (4.59) и  $C^v$  (4.136), которые необходимы для определения параметров напряженного состояния среды  $\varphi^r$  и  $s^r$  в произвольной точке  $R$  пятна контакта  $R^u R^d$ .

Полусумма  $s^l$  главных нормальных напряжений, действующих в точке  $L$ , известна —  $s^l = k$  (4.176). Поэтому блок операторов 4 выполняет такое присвоение. Кроме того, по условию задачи (см. пункт “известные величины” п.г. 127) ордината  $y^{ru}$  точки  $R^u$  равна нулю. Принимая это во внимание, блок операторов 4 иницирует переменную  $y^{lr}$ .

Дальнейшее продвижение вдоль  $L^m LR^u$  (рис. 4.43) связано с приращением ординаты  $y^{lr}$ . Это выполняется в цикле оператором 5. Новому значению  $y^{lr}$  соответствует новое положение линии  $LR$ .

Далее выполняется блок операторов 6, которые для точки  $R$  вычисляют значения  $\varphi^r$  (4.137), и  $s^r$  (4.138). Затем выполнением блока операторов

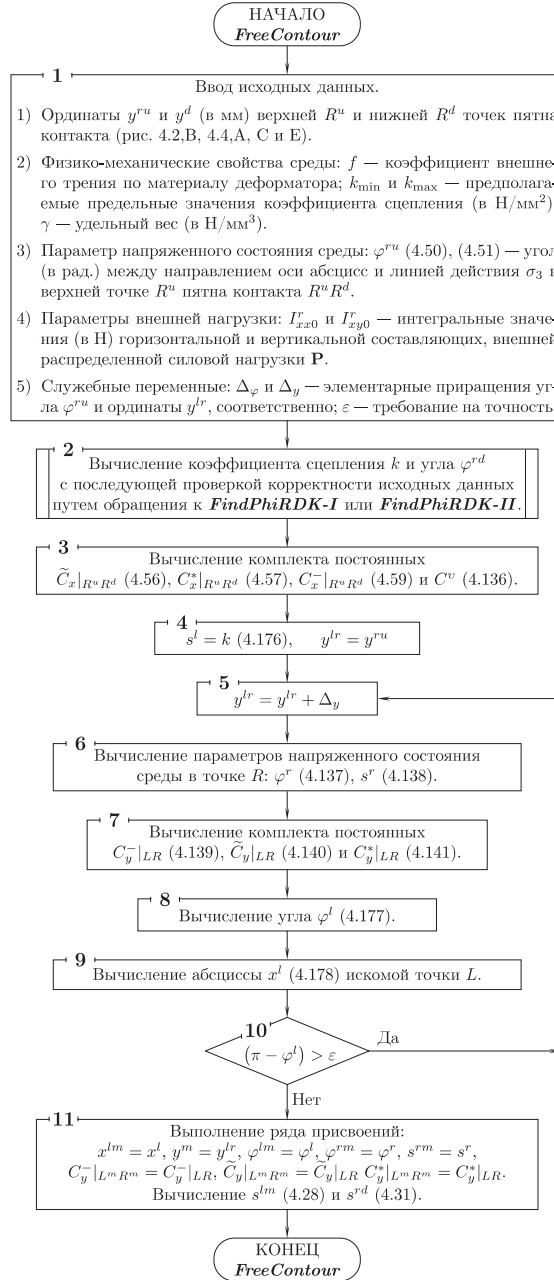


Рис. 4.45. Алгоритм подпрограммы **FreeContour** вычисления координат точек кривой свободного контура  $L^m LR^u$  и параметров напряженного состояния среды в них

7 определяются постоянные  $C_y^-|_{LR}$  (4.139),  $\tilde{C}_y|_{LR}$  (4.140) и  $C_y^*|_{LR}$  (4.141), входящие в соотношения, выполняющиеся вдоль линии  $LR$ . Дальше выполняются операторы 8 и 9. Первый посвящен вычислению угла  $\varphi^l$  (4.177) в точке  $L$ , а последний — искомой абсциссы  $x^l$  (4.178) той же точке.

После этого выполняется проверка текущего положения точки  $L$ . Если она совпала с  $L^m$ , то значение угла  $\varphi^l$  должно быть равным  $\varphi^{lm} = \pi$  (4.25). Это обстоятельство, разумеется, с заданной машинной точностью  $\varepsilon$ , проверяется обращением к оператору 10. Если  $(\pi - \varphi^l) > \varepsilon$ , то это означает, что точка  $L$  и вся линия  $LR$  в текущий момент располагается выше горизонтального отрезка  $ML^m$  свободного контура  $L^mLR^u$ , а, значит, следует возвратиться на оператор 5, и выполнив его в который раз, выполнить операторы 6–9. Так происходит до тех пор пока будет определены координаты последней точки  $L^m$  кривой  $L^mLR^u$  свободного контура. Густоту следования этих точек по кривой определяет величина элементарного приращения ординаты  $\Delta y$ . Ее значение следует согласовывать с величиной  $\varepsilon$ .

На рис. 4.46 приведены результаты расчетов формы кривой  $L^mLR^u$  свободного контура для двух уровней интенсивности внешнего силового воздействия, т.е. величины  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$ . Расчеты выполнялись с вызовом подпрограммы **FindPhiRDK-II**, т.к. применение **FindPhiRDK-I**, оказалось очевидно, неадекватным. Как видим, результат получился убедительным.

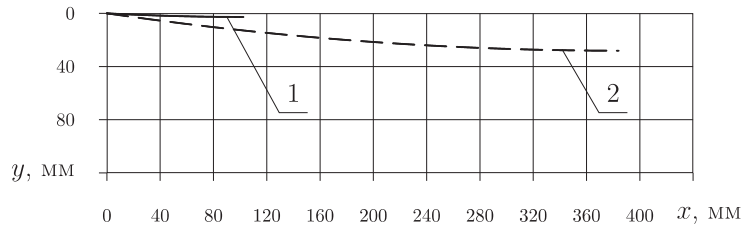


Рис. 4.46. Кривые  $L^mLR^u$  свободного контура (рис. 4.43): 1)  $I_{xx0}^r = 2,0$  Н,  $I_{xy0}^r = -0,035$  Н,  $\varphi^{ru} = 3,124139$  рад.; 2)  $I_{xx0}^r = 4,0$  Н,  $I_{xy0}^r = -0,1399$  Н,  $\varphi^{ru} = 3,106686$  рад.. Другие исходные данные:  $y^{ru} = 0,0$  мм;  $y^d = 45,0$  мм;  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>;  $f = 0,8391$ . Данные полученные расчетным путем: коэффициент сцепления  $k$  (в Н/мм<sup>2</sup>) равен 0,02220128 (1) и 0,04447704 (2); угол  $\varphi^{rd}$  (в рад.) равен 3,124005 (1) и 3,106543 (2)

Далее следует группа рис. 4.47–4.51, относящихся к расчетам координат  $x^{lm}$  и  $y^{lm}$  крайней точки кривой  $L^mLR^u$  свободного контура, коэффициента связности  $k$ , угла  $\varphi^{rd}$  и фактического значения  $\varphi^{ru}$  (рассчитанного через тангенс угла наклона кривой свободного контура в точке  $R^u$ ) в зависимости от величины интегралов нормальной  $I_{xx0}^r$  и касательной  $I_{xy0}^r$  компонент полного напряжения, действующего вдоль пятна контакта  $R^uR^d$ .

Как видно из первых двух рисунков 4.47 и 4.48, форма кривой свободного контура весьма существенно зависит от соотношения величин  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$ . При фиксированном значении  $I_{xx0}^r$  увеличение  $I_{xy0}^r$  приводит к весьма

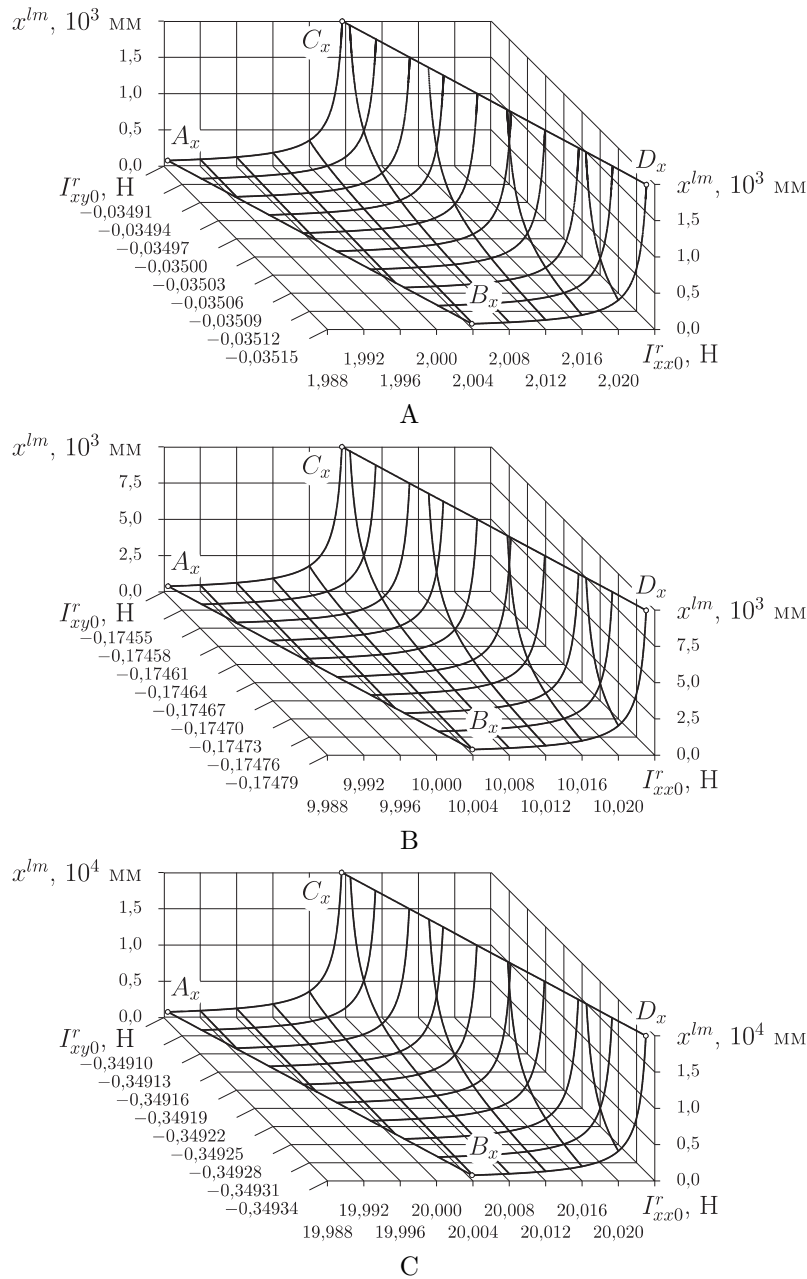


Рис. 4.47. Результаты расчета абсциссы  $x^{lm}$  крайней точки кривой  $L^m LR^u$  (рис. 4.43):  $f = 0,8391$ ;  $y^d = 45$  мм;  $\varphi^{ru} = 3,12414$  рад;  $\gamma = 0,1 \times 10^{-4}$  Н/мм<sup>3</sup>. Для вычисления  $k$  применяется **FindPhiRDK-II**. Линии  $A_x B_x$  и  $C_x D_x$  ограничивают область совместимых пар значений  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$

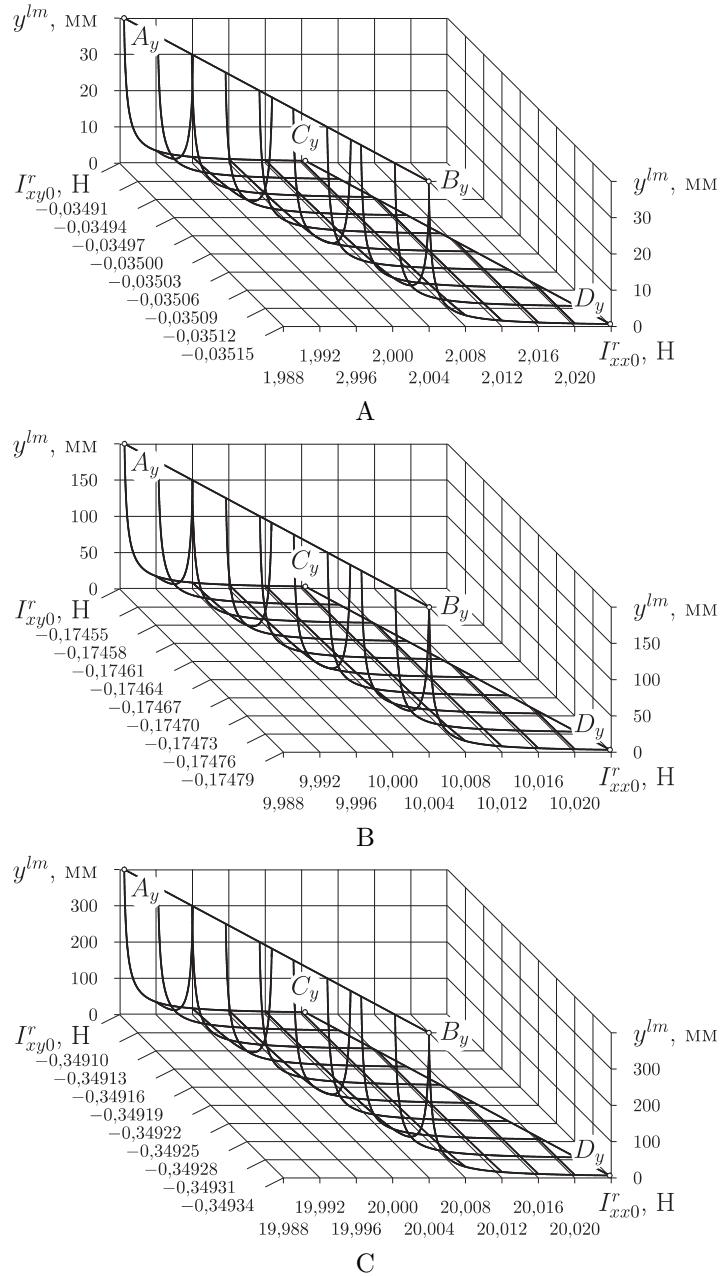


Рис. 4.48. Результаты расчета ординаты  $y^{lm}$  крайней точки кривой  $L^m LR^u$  (рис. 4.43):  $f = 0,8391$ ;  $y^d = 45$  мм;  $\varphi^{ru} = 3,12414$  рад;  $\gamma = 0,1 \times 10^{-4}$  Н/мм<sup>3</sup>. Для вычисления  $k$  применяется **FindPhiRDK-II**. Линии  $A_x B_x$  и  $C_x D_x$  ограничивают область совместимых пар значений  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$



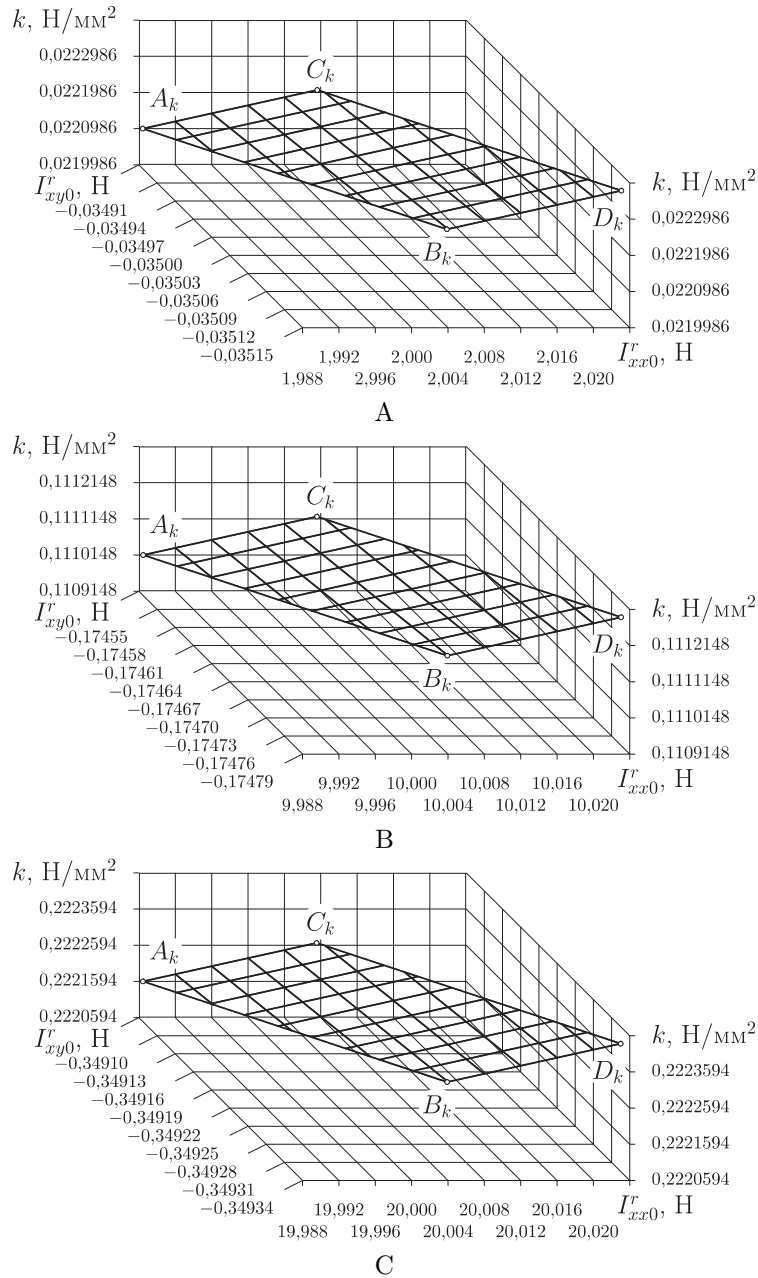


Рис. 4.49. Результаты расчета коэффициента связности  $k$  (путем применения подпрограммы **FindPhiRDK-II**):  $f = 0,8391$ ;  $y^d = 45,0$  мм;  $\varphi^{ru} = 3,12414$  рад. и  $\gamma = 0,00001$   $\text{H}/\text{MM}^3$ . Линии  $A_k B_k$  и  $C_k D_k$  ограничивают область формально совместимых пар значений  $I^r_{xx0}$  и  $I^r_{xy0}$

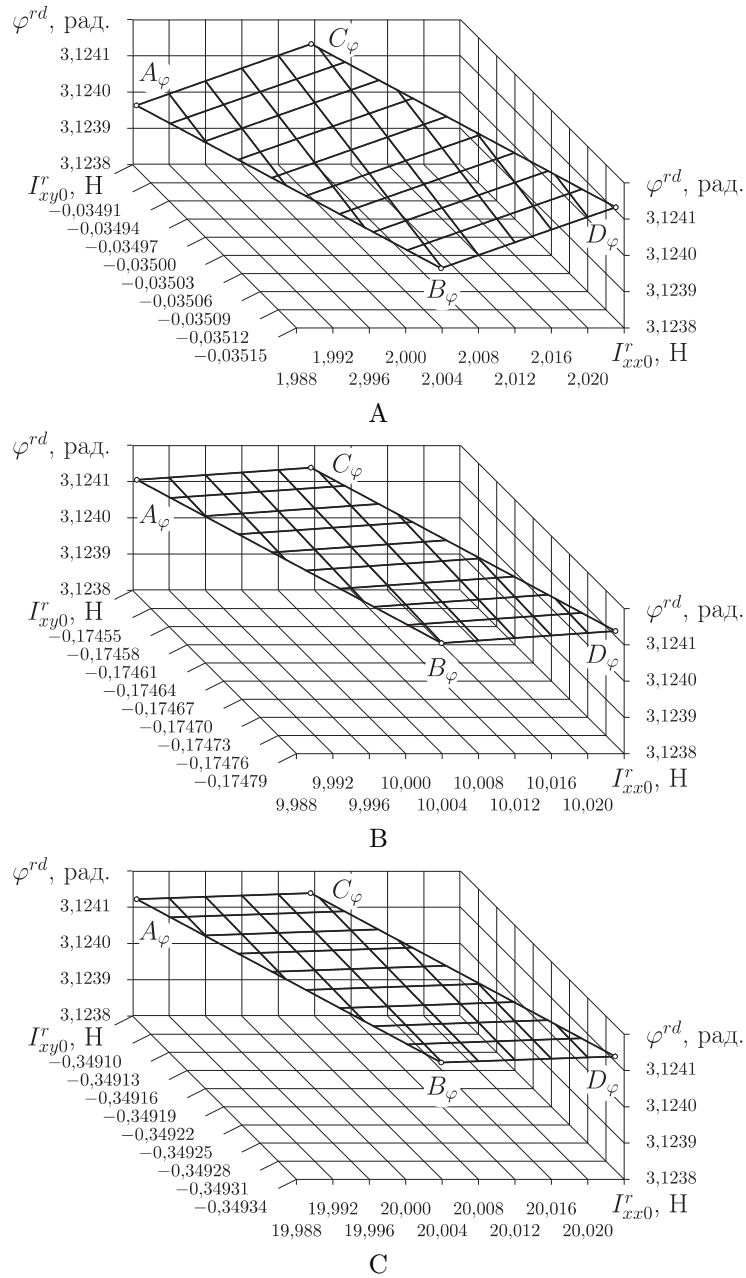


Рис. 4.50. Результаты расчета угла  $\varphi^{rd}$ :  $f = 0,8391$ ;  $y^d = 45,0$  мм;  $\varphi^{ru} = 3,12414$  рад. и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>. Для вычисления  $k$  применяется *FindPhiRDK-II*. Линии  $A_\varphi B_\varphi$  и  $C_\varphi D_\varphi$  ограничивают область формально совместимых пар значений  $I^r_{xx0}$  и  $I^r_{xy0}$

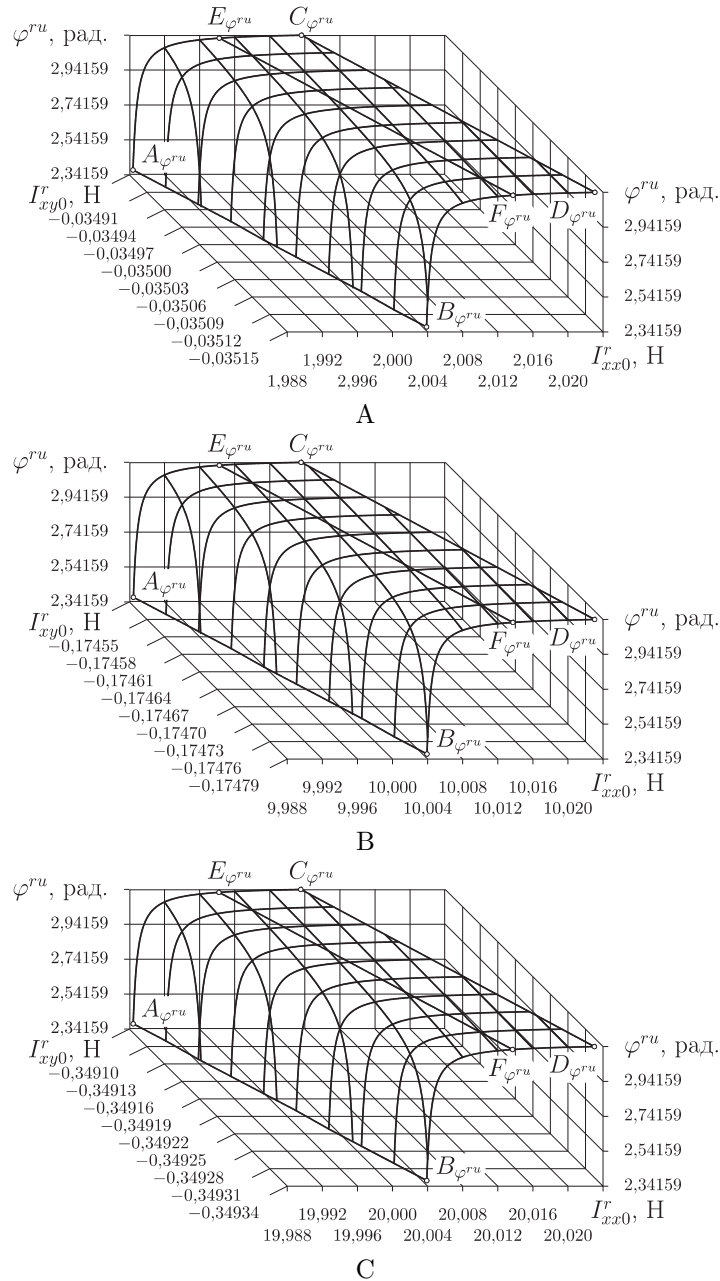


Рис. 4.51. Результаты расчетов угла  $\varphi^{ru}$ :  $f = 0,8391$ ;  $y^d = 45,0$  мм;  $\varphi^{ru} = 3,12414$  рад. и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>. Для вычисления  $k$  применяется *FindPhiRDK-II*. Линии  $A_{\varphi^{ru}}B_{\varphi^{ru}}$  и  $C_{\varphi^{ru}}D_{\varphi^{ru}}$  ограничивают область формально совместимых пар значений  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$ .  $A_{\varphi^{ru}}B_{\varphi^{ru}}$  — линия, вдоль которой заданное и расчетное значения угла  $\varphi^{ru}$  совпадают

существенному росту абсциссы  $x^{lm}$  и одновременному убыванию ординаты  $y^{lm}$  крайней точки кривой  $L^mLR^u$  свободного контура. При этом величина коэффициента связности  $k$  уменьшается (рис. 4.49), а угла  $\varphi^{rd}$  — увеличивается (рис. 4.50). Причем, по сравнению с изменениями координат точки  $L^m$ , оба параметра  $k$  и  $\varphi^{rd}$  изменяются весьма незначительно.

Если фиксировать  $I_{xy0}^r$ , а изменять  $I_{xx0}^r$ , то в отношении координат  $x^{lm}$  и  $y^{lm}$  можно видеть, что они изменяются в противофазе как и раньше, а параметры  $k$  и  $\varphi^{rd}$ , наоборот — согласовано. При увеличении  $I_{xx0}^r$  параметры  $k$  и  $\varphi^{rd}$  также увеличиваются. Наиболее значимым является рис. 4.51. Он иллюстрирует тот факт, что каждой паре значений  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$  можно поставить в соответствие только одно значение угла  $\varphi^{ru}$ . Таким образом, в алгоритм **FreeContour** расчета кривой свободного контура (рис. 4.45) следует внести проверку на корректность соответствующих исходных данных, для чего необходимо усовершенствовать подпрограммы **FindPhiRDK-I** или **FindPhiRDK-II**. Все это также указывает на потенциальные трудности с получением экспериментальных данных. Даже незначительные несоответствия реальной и модельной сред, а также погрешности в измерениях могут привести к невозможности проведения дальнейших расчетов.

#### 4.12. Усовершенствованный алгоритм согласования и проверки корректности начальных данных

Алгоритм **FindPhiRDK-III** (рис. 4.52, 4.53), который является следующей версией алгоритма подпрограммы **FindPhiRDK-II** (рис. 4.52), в детальных пояснениях не нуждается. Ранее (в **FindPhiRDK-II**) величины угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$  подбирались таким образом, чтобы вычисленные значения интегралов  $I_{xx}^r$  (4.99) и  $I_{xy}^r$  (4.107) были равны заданным  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$  (стр. 127–128). Расчетная величина

$$\varphi_{new}^{ru} = \lim_{y^{lr} \rightarrow 0} \left( \pi - \arctg \frac{y^{lr}}{x^l} \right) \quad (4.179)$$

угла  $\varphi^{ru}$  не вычислялась и с заданным значением  $\varphi^{ru}$  не сравнивалась.

В алгоритме подпрограммы **FindPhiRDK-III** напротив не учитывается величина интегрального значения  $I_{xy0}^r$  вертикальной составляющей, внешней нагрузки  $\mathbf{P}$ , а величина угла  $\varphi_{new}^{ru}$  учитывается и сравнивается с заданным значением  $\varphi^{ru}$ . В обоих случаях подбор величин угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$  выполняется методом деления отрезка пополам.

Величина  $I_{xy}^r$  в подпрограмме **FindPhiRDK-III** получается расчетным путем. При расчете угла  $\varphi_{new}^{ru}$  (4.179) устремление  $y^{lr}$  к нулю осуществляется за счет соответствующего выбора величины  $\Delta_y$  элементарного приращения ординаты. Безусловно, это приводит к некоторой ошибке вычисления  $\varphi_{new}^{ru}$ , но, тем не менее, специальных методов расчета предела (4.179) алгоритм подпрограммы **FindPhiRDK-III** не имеет.

Чтобы использовать подпрограмму **FindPhiRDK-III** для построения кривой свободного контура необходимо соответствующим образом откорректировать оператор 2 подпрограммы **FreeContour** (рис. 4.45).

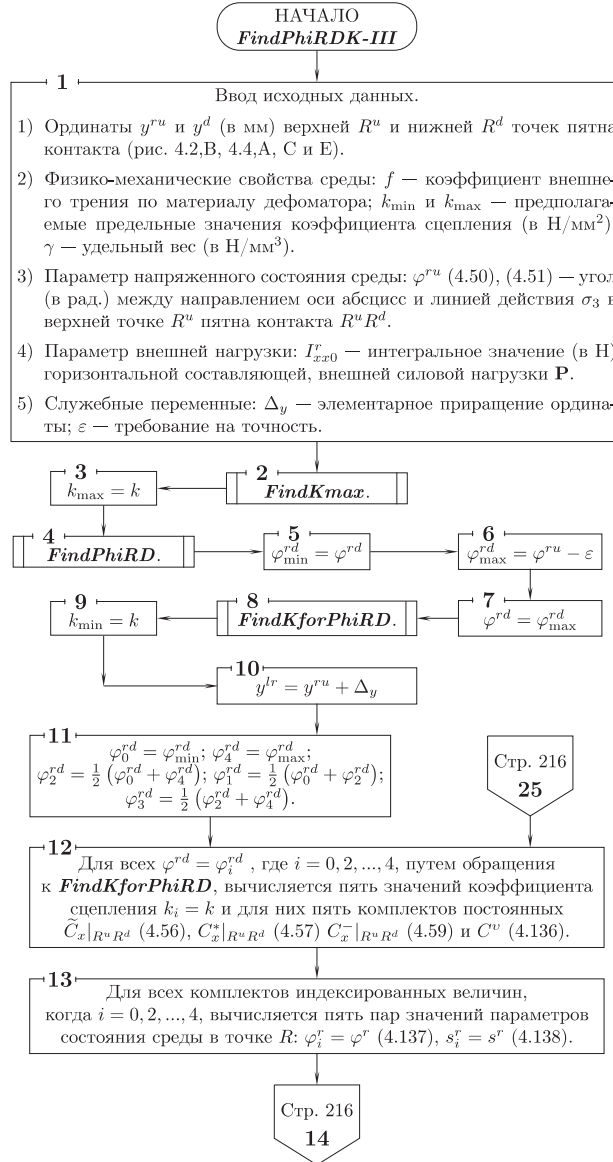


Рис. 4.52. Алгоритм подпрограммы *FindPhiRDK-III* (начало) поиска такого значения угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ , при которых вычисленные значения интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99), а также угла  $\varphi_{new}^{ru}$  (4.179) соответственно равны заданным  $I_{xx0}^r$  и  $\varphi^{ru}$  (п.г. 4.2)

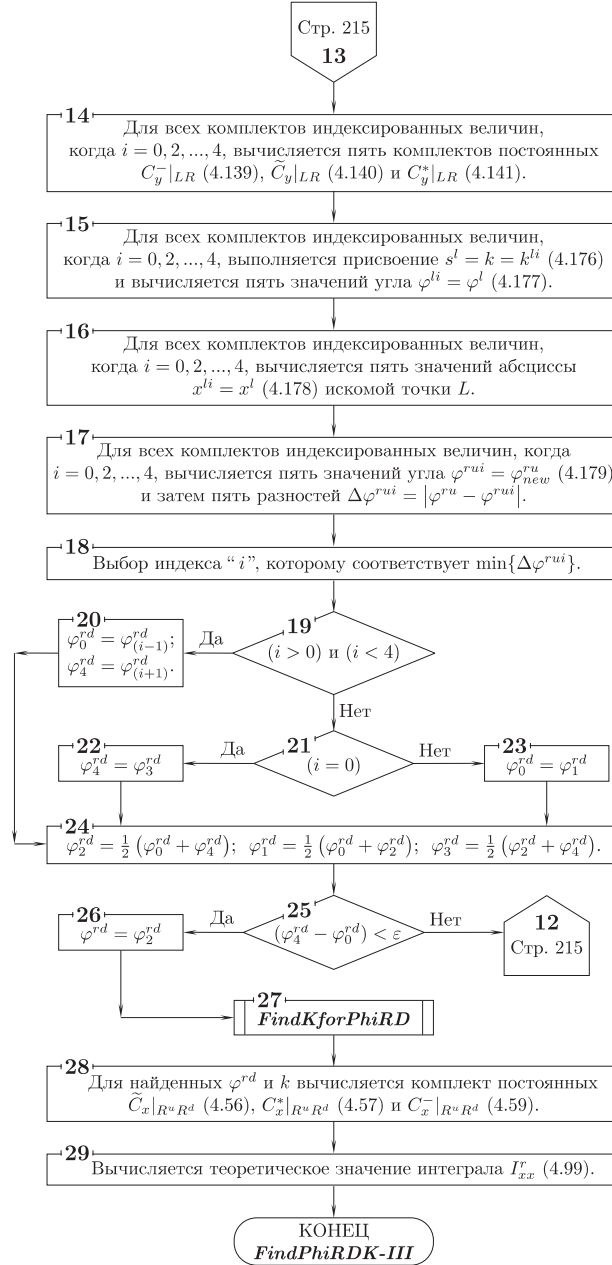


Рис. 4.53. Алгоритм подпрограммы **FindPhiRDK-III** (окончание) поиска такого значения угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ , при которых вычисленные значения интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99), а также угла  $\varphi_{new}^{ru}$  (4.179) соответственно равны заданным  $I_{xx0}^r$  и  $\varphi^{ru}$  (п.г. 4.2)

## 4.13. Расчет координат точек огибающей кривой

В отношении огибающей кривой  $L^m R^d$  можно предположить, что она: а) является характеристикой семейства  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  (2.82); б) является кусочно-сочлененной ломаной кривой, состоящей из отрезков характеристик обоих семейств  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . До сих пор доминировала именно первая точка зрения. По этому начнем с ее проверки.

4.13.1. Алгоритм вычисления координат точек огибающей кривой в предположении, что она является характеристикой одного из семейств. Сначала остановимся на численном решении уравнения (4.173) относительно угла  $\varphi^{\lambda^i}$ , где  $i = 1, 2$ . Для этого, обратившись к (рис. 4.54), прежде исследуем функциональную связь

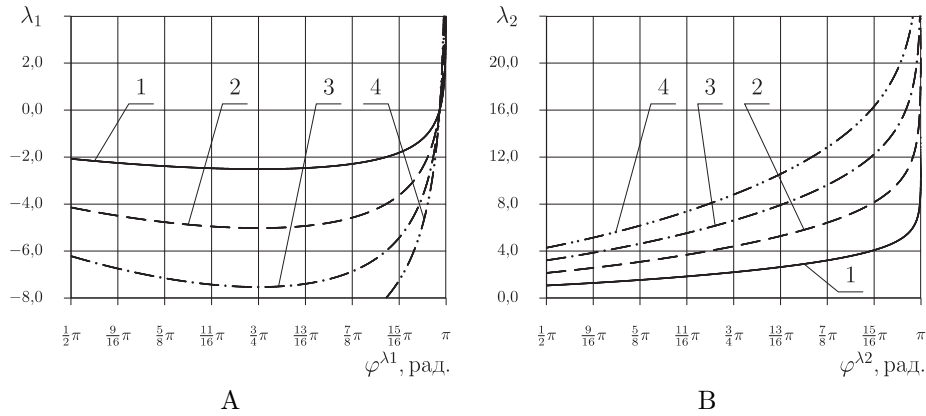


Рис. 4.54. Зависимости  $\lambda_1|_{L^m R^d} = \lambda_1(\varphi^{\lambda^1})$  и  $\lambda_2|_{L^m R^d} = \lambda_2(\varphi^{\lambda^2})$  (4.173), для  $C^v = \sqrt{0,5\varepsilon}$ ,  $\tilde{C}_x = 0,0$  Н/мм<sup>2</sup> и четырех значений коэффициента связности  $k$  (в Н/мм<sup>2</sup>): 0,5 (1); 1,0 (2); 1,5 (3); 2,0 (4)

$\lambda_i|_{L^m R^d} = \lambda_i(\varphi^{\lambda^i})$ . Поскольку известно, что для всей предельной области  $L^m R^d R^u$  значения угла  $\varphi$  укладываются в интервал  $\varphi \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$ , то и функциональную связь  $\lambda_i|_{L^m R^d} = \lambda_i(\varphi^{\lambda^i})$  будем исследовать в том же интервале  $\varphi^{\lambda^i} \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$ . В его пределах параметр  $\lambda_1|_{L^m R^d} = \lambda_1(\varphi^{\lambda^1})$  (4.173) достигает минимума при

$$\varphi^{\lambda^1} = \frac{3}{4}\pi, \quad (4.180)$$

а  $\lambda_2|_{L^m R^d} = \lambda_2(\varphi^{\lambda^2})$  (4.173) монотонно возрастает.

Поскольку ранее было показано, что  $\varphi|_{R^u R^d} \in [\varphi_{\min}, \pi]$  (4.75), где  $\varphi_{\min} = \pi - \arctg f$  (4.76) и к тому же  $f \leq 1$ , а в процессе перехода от точки  $R^d$  к  $L^m$  вдоль огибающей характеристики  $L^m R^d$  угол  $\varphi^{\lambda^i}$ , ( $i = 1, 2$ ), монотонно возрастает от  $\varphi^{\lambda^i}|_{R^d}$  до  $\varphi^{\lambda^i}|_{L^m} = \pi$ , то в процессе поиска решения уравнения

(4.173) относительно  $\varphi^{\lambda i}$  необходимо анализировать только один интервал:

$$\varphi^{\lambda i} \in \left[ \frac{3}{4}\pi, \pi \right], \quad (i = 1, 2). \quad (4.181)$$

Очевидно, что при построении огибающей  $L^m R^d$  (рис. 4.44) оправдано применять вычисления в цикле. Причем начало построения можно совместить с любой из крайних точек —  $L^m$  или  $R^d$ . Эффективность алгоритма при этом не изменится. Поэтому далее условимся, что построение характеристики  $L^m R^d$  будем начинать с точки  $R^d$ , когда линия  $LC^\lambda$  совпадает с пятном контакта  $R^u R^d$ , постепенно перемещаясь к точке  $L^m$ , вплоть до схождения  $LC^\lambda$  с  $L^m$ . В таком случае, каждое последующее значение угла  $\varphi^{\lambda i}|_{C^\lambda}$  больше предыдущего (обозначим его  $\varphi_0^{\lambda i}$ ) и на каждом этапе интервал возможных значений угла  $\varphi^{\lambda i}|_{C^\lambda}$  (4.181) сужается:

$$\varphi^{\lambda i}|_{C^\lambda} \in [\varphi_0^{\lambda i}, \pi], \quad (i = 1, 2), \quad (4.182)$$

где для первой итерации следует положить, что

$$\varphi_0^{\lambda i} = \varphi^{rd}, \quad (i = 1, 2). \quad (4.183)$$

Поиску значения  $\varphi^{\lambda i}$ , тождественно удовлетворяющего уравнению (4.173), посвящен алгоритм подпрограммы **PhiSlidingLine** (рис. 4.55), а расчету координат точек огибающей  $L^m R^d$  — **RoundLine** (рис. 4.56). Оба эти алгоритма понятны и в дополнительных пояснениях не нуждаются.

На рис. 4.57 представлены расчеты кривой свободного контура  $L^m R^u$  и огибающей характеристики  $L^m R^d$ . Построение последней выполнялось в предположении, что она принадлежит к первому семейству, когда в выражениях (2.82), (4.172) и (4.173) задействованы верхние знаки. Выполнялось это путем применения подпрограммы **RoundLine** с вызовом подпрограммы **PhiSlidingLine**, а также **FreeContour**. В последней вместо **FindPhiRDK-II** задействована ее новая версия **FindPhiRDK-III**.

Как видим, одноименные точки  $L^m$  и  $L^{m'}$  на кривых 1 и 2 не совпали. Возможно, во-первых, выбранный алгоритм вычисления коэффициента связности  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$  (реализуется подпрограммой **FindPhiRDK-III**) не соответствует физической сути задачи и следует вернуться для его уточнения, во-вторых, представления о линии  $R^d L^m$  ошибочны в том смысле, что  $R^d L^m$  не является характеристикой. Разберемся с тем и другим по очереди.

4.13.2. Анализ граничных условий. Суть новой трактовки граничных условий лежит в предположении, что полусуммы главных нормальных напряжений  $s_{al}$  (4.69) и  $s_{ar}$  (4.70), из левой и правой частей граничного условия (4.71), достигают равенства по касанию (рис. 4.21).

В таком случае возникает вопрос, как изменится между собой соотношение величин  $s_{al}$  и  $s_{ar}$ , если фиксировать  $\varphi^{rd}$  и подвергать изменению  $k$  или, наоборот, фиксировать  $k$ , а изменять величину  $\varphi^{rd}$ . Такое исследование иллюстрирует рис. 4.58.



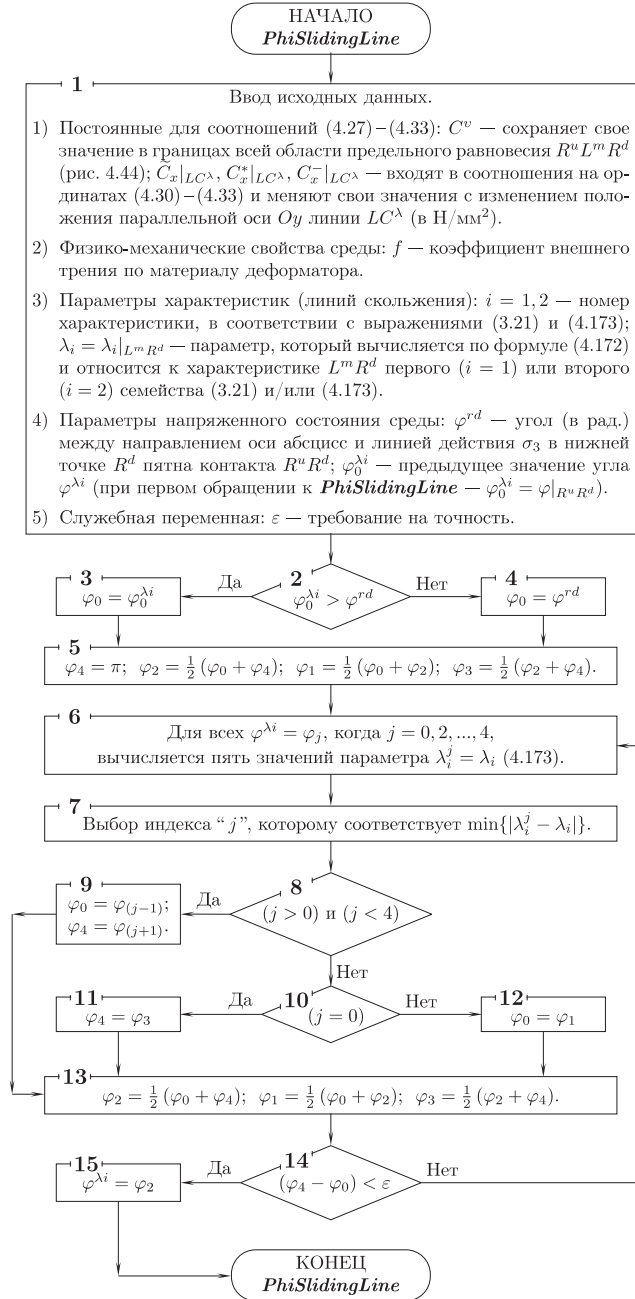


Рис. 4.55. Алгоритм подпрограммы *PhiSlidingLine* вычисления угла  $\varphi^{\lambda_i}$ , путем решения уравнения (4.173)

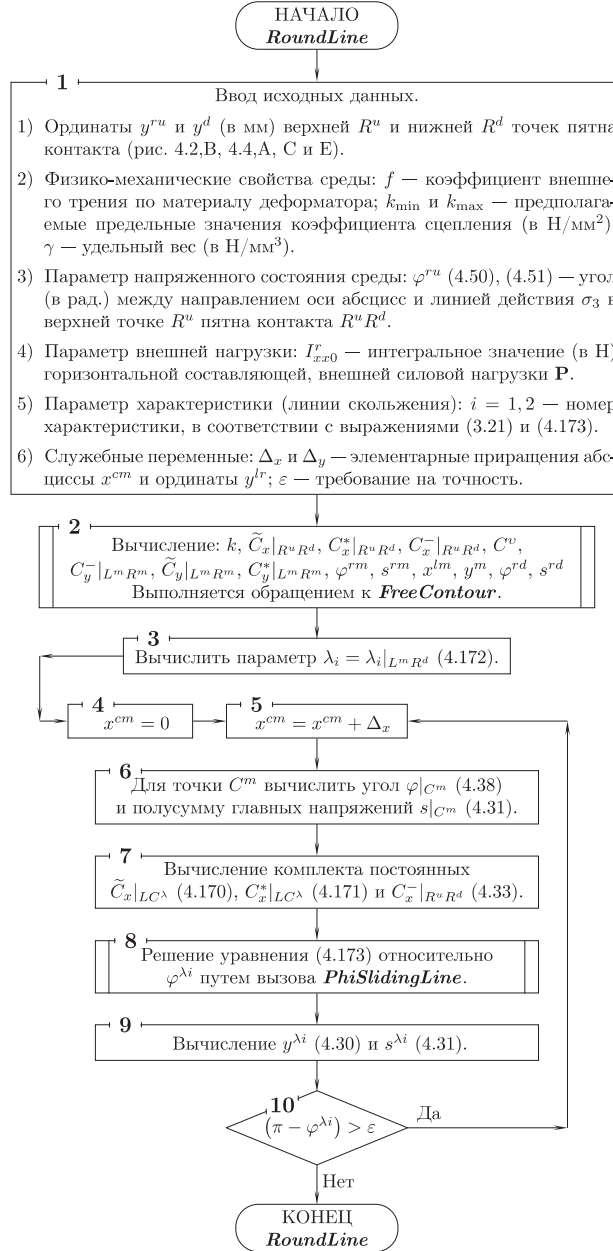


Рис. 4.56. Алгоритм подпрограммы *RoundLine* вычисления координат точек огибающей характеристики  $L^m R^d$

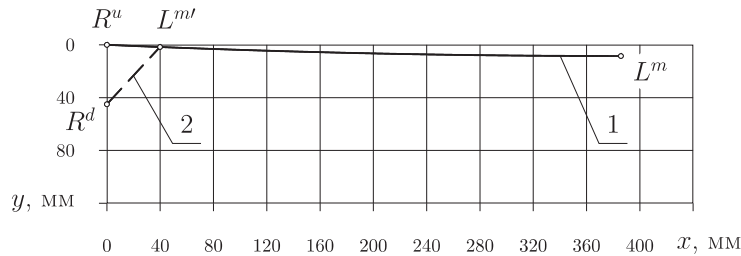


Рис. 4.57. Кривая  $L^m R^u$  свободного контура (1) и огибающая характеристика  $L^m R^d$  (2) (рис. 4.43) для случая, когда  $I_{xx0}^r = 2,0$  Н,  $\varphi^{ru} = 3,097959$  рад.. Другие исходные данные:  $y^{ru} = 0,0$  мм — ордината точки  $R^{ru}$ ;  $y^d = 45,0$  мм — ордината точки  $R^d$ ;  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup> — плотность среды;  $f = 0,8391$  — коэффициент трения среды по материалу лобовой поверхности деформатора. Данные полученные расчетным путем:  $I_{xy}^r = -0,08732366$  Н,  $k = 0,02220862$  Н/мм<sup>2</sup>;  $\varphi^{rd} = 3,097737$  рад.

Из последнего следует, что увеличение  $k$  при фиксированном значении угла  $\varphi^{rd}$  приводит к понижению экстремумов  $s_{al}(\varphi)$  (4.69) и повышению экстремума  $s_{ar}(\varphi)$  (4.70). Т.е. в таком случае кривые  $s_{al} = s_{al}(\varphi)$  и  $s_{ar} = s_{ar}(\varphi)$  пересекаются трижды, включая область  $\varphi < \varphi^{ru}$  (рис. 4.58,А) и выполнение граничных условий (4.71) или (4.74) в пределах полного интервала  $\varphi \in [\varphi^{rd}, \varphi^{ru}]$  становится невозможным. Если же  $k$  убывает, то кривые  $s_{al} = s_{al}(\varphi)$  и  $s_{ar} = s_{ar}(\varphi)$  расходятся и пересекаются только один раз в точке  $\varphi = \varphi^{ru}$  (рис. 4.58,В). Изменение величины угла  $\varphi^{rd}$  при фиксированном  $k$  приводит к обратному эффекту (рис. 4.58,С и 4.58,Д).

Рис. 4.59 иллюстрирует, как зависит величина интегрального значения  $I_{xx}^r$  (4.99) нормальной компоненты полного напряжения, действующего на пятне контакта  $R^u R^d$ , от величин коэффициента сцепления  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$ . Увеличение  $I_{xx}^r$  возможно при ответном увеличении  $k$ . Причем величина второго отстает от первого на пару порядков. На первый взгляд все логично. Но, как выяснилось, увеличение интеграла  $I_{xx}^r$  требует согласованного увеличения углов  $\varphi^{ru}$  и  $\varphi^{rd}$ , причем  $\varphi^{rd} \rightarrow \varphi^{ru}$ , что явно противоречит физическому смыслу. Таким образом, большие значения  $I_{xx}^r$  возможны только при больших значениях углов  $\varphi^{ru}$  и  $\varphi^{rd}$ , а это принципиально ничем не отличается от уже рассмотренного ранее варианта.

Таким образом в, дальнейшем возвращаемся к трактовке граничных условий (4.71) или (4.74) по типу рис. 4.22, на котором базируется построение алгоритмов **FindPhiRDK-II** и **FindPhiRDK-III** расчета угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ .

4.13.3. Уточнение физического смысла огибающей кривой. Поскольку изменение понимания текущих граничных условий не привело к продуктивному результату, остается проверить наши представ-

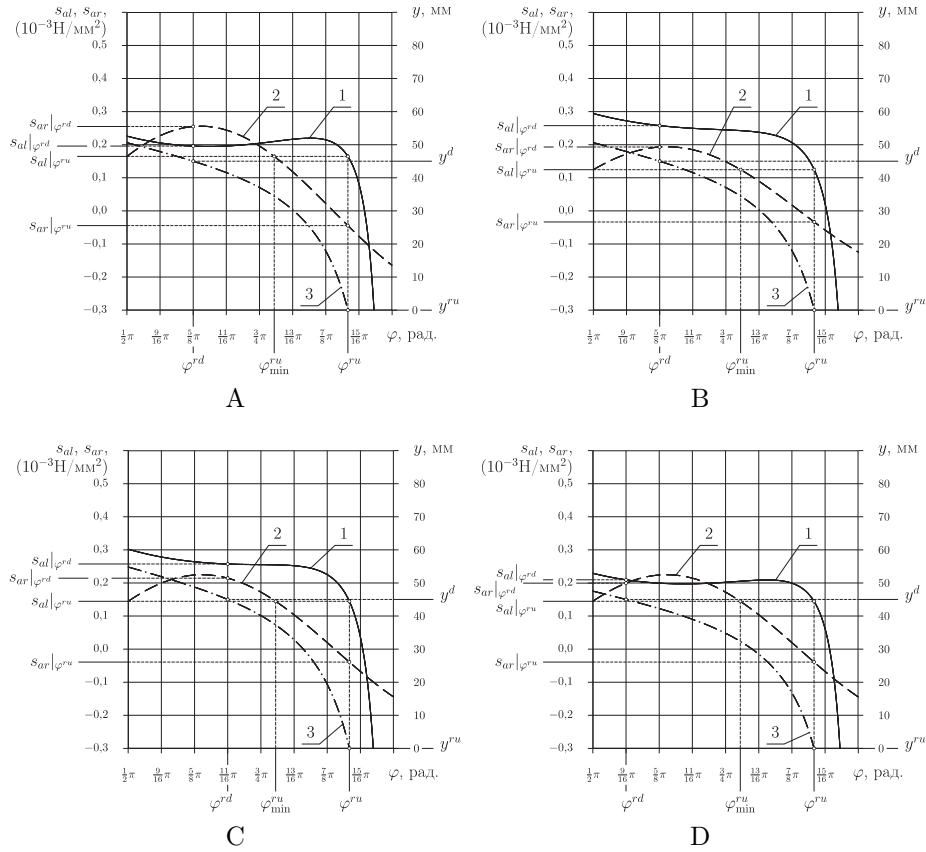


Рис. 4.58. Графики полусуммы главных нормальных напряжений  $s_{al}$  (4.69) (1) и  $s_{ar}$  (4.70) (2), составляющих сущность левой и правой частей граничного условия (4.71, а также ординаты  $y$  (4.30) (3), рассматриваемых как функции угла  $\varphi$  для следующих значений угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента связности  $k$  (А) —  $\varphi^{rd} = \frac{5}{8}\pi$  рад.,  $k = (0,14451 + 0,02) 10^{-3}\text{Н/мм}^2$ ; В) —  $\varphi^{rd} = \frac{5}{8}\pi$  рад.,  $k = (0,14451 - 0,02) 10^{-3}\text{Н/мм}^2$ ; С) —  $\varphi^{rd} = \frac{5}{8}\pi + \frac{1}{16}\pi$  рад.,  $k = 0,14451 10^{-3}\text{Н/мм}^2$ ; D) —  $\varphi^{rd} = \frac{5}{8}\pi - \frac{1}{16}\pi$  рад.,  $k = 0,14451 10^{-3}\text{Н/мм}^2$ ), если:  $\gamma = 0,00001 \text{ Н/мм}^3$ ;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад.;  $y^{ru} = 0,0$  мм;  $y^d = 45,0$  мм;  $f = 0,8391$ . Когда  $\varphi^{rd} = \frac{5}{8}\pi$  рад., а  $k = 0,14451 10^{-3}\text{Н/мм}^2$ , то при тех же значениях других параметров кривые  $s_{al}$  (4.69) (1) и  $s_{ar}$  (4.70) (2) располагаются по касанию, как на рис. 4.21

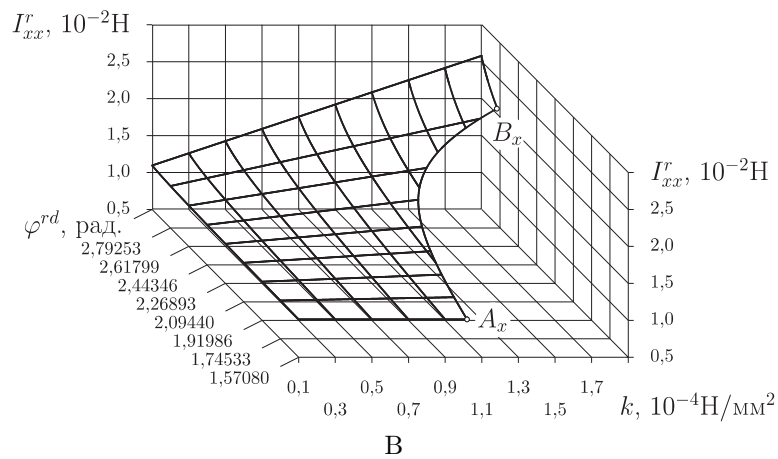
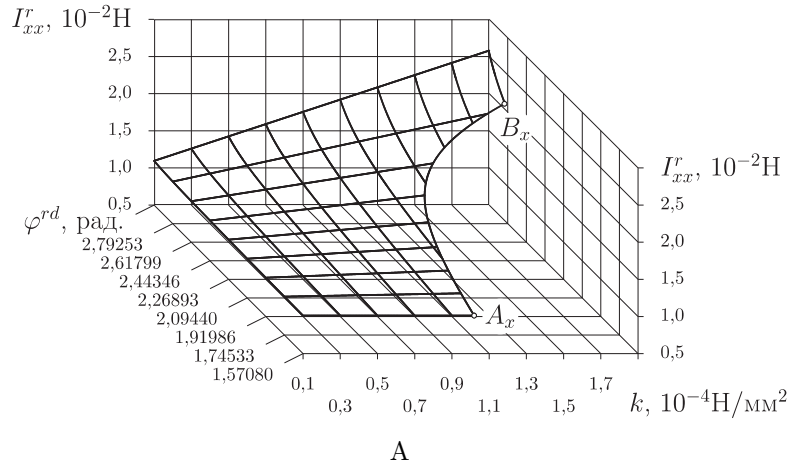


Рис. 4.59. Закономерности изменения величины интеграла  $I_{xx}^r$  (4.99) нормальной компоненты полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$  в зависимости от величин коэффициента сцепления среды  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$ : А)  $\varphi^{ru} = 3,05433$  рад.;  $k \in [0,1; 1,9] 10^{-4}H/mm^2$ ;  $\varphi^{rd} \in [1,5708; 2,96706]$  рад.; В)  $\varphi^{ru} = 3,05433$  рад.;  $k \in [0,2; 3,8] 10^{-3}H/mm^2$ ;  $\varphi^{rd} \in [3,04647; v]$  рад.. Все остальные параметры остаются фиксированными:  $y^d = 45,0$  мм;  $f = 0,8391$  и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>;  $A_x B_x$  — огибающая кривая за которой выполнение граничных условий (4.71) или (4.74) невозможно. Постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (4.56), (4.57) и (4.59)

ления о линии  $R^dL^m$ , как характеристике одного из семейств [292, 293]. Для этого обратимся к рис. 4.60–4.63. Все они построены с применением программы *FreeContour*, *FindPhiRDK-III*, *RoundLine*, *PhiSlidingLine* и др.. Базовым является первый из рисунков. По сравнению с ним, рис. 4.61 отличается увеличенной на 0,1 Н внешней силовой нагрузкой  $I_{xx0}^r$ , а рис. 4.62 — уменьшенной на 0,0043633 рад. ( $0,25^\circ$ ) величиной угла  $\varphi^{ru}$ . Рис. 4.63 отличается от базового тем, что значения удельного веса среды  $\gamma$  увеличены в 1,5 раза. Все исходные данные и некоторые расчетные величины, относящиеся к построениям на рис. 4.60–4.63, приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

**Исходные и некоторые расчетные данные,  
относящиеся к рис. 4.60–4.63**

Рис.	Исходные данные						Расчетные величины		
	$y^{ru}$	$y^d$	$\gamma$	$f$	$I_{xx0}^r$	$\varphi^{ru}$	$k$	$\varphi^{rd}$	$I_{xy}^r$
	мм	мм	Н/мм <sup>3</sup>	—	Н	рад.	Н/мм <sup>2</sup>	рад.	Н
4.60A	0,0	45,0	0,00001	0,8391	1,2	3,115413	0,013287	3,115188	-0,031426
4.60B	—	—	—	—	1,6	3,106686	0,017744	3,106463	-0,055875
4.60C	—	—	—	—	2,0	3,097959	0,022209	3,097737	-0,087324
4.61A	0,0	45,0	0,00001	0,8391	1,3	3,115413	0,014399	3,115205	-0,034044
4.61B	—	—	—	—	1,7	3,106686	0,018856	3,106686	-0,059367
4.61C	—	—	—	—	2,1	3,097959	0,023322	3,097959	-0,091690
4.62A	0,0	45,0	0,00001	0,8391	1,2	3,111049	0,013290	3,110787	-0,036666
4.62B	—	—	—	—	1,6	3,102323	0,017749	3,102072	-0,062866
4.62C	—	—	—	—	2,0	3,093596	0,022218	3,093351	-0,096069
4.63A	0,0	45,0	0,000015	0,8391	1,2	3,115413	0,013259	3,115072	-0,031430
4.63B	—	—	—	—	1,6	3,106686	0,017716	3,106349	-0,05588
4.63C	—	—	—	—	2,0	3,097959	0,022181	3,097624	-0,087326

На рис. 4.60–4.63 изображена область  $R^uR^dL^m$  предельного равновесия, которую обрамляют: поверхность пятна контакта  $R^uR^d$ , огибающая кривая (опережающая трещина)  $R^dL^m$  и кривая свободного контура  $L^mR^u$ . Дневной поверхности за границами предельной области соответствует линия  $L^mM$ . Все эти линии (исключая пятно контакта  $R^uR^d$ ) изображены сплошными жирными линиями. Тонкими сплошными линиями обозначены характеристики (линии скольжения) по две из каждого семейства ( $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ). Их параметры и положение поясняют данные табл. 4.3 и 4.4.

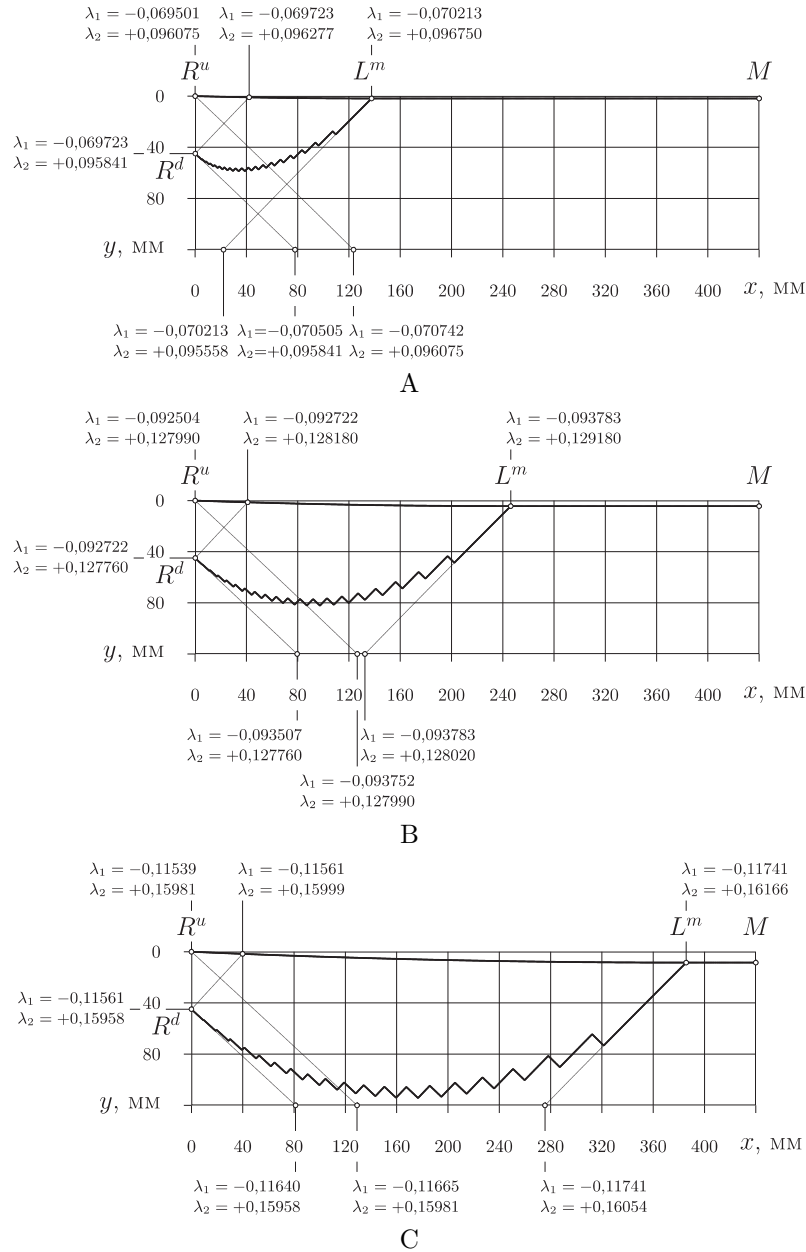


Рис. 4.60. Кривая  $L^m R^u$  свободного контура, дневная поверхность  $L^m M$  и огибающая кривая  $R^d L^m$  (жирные линии), а также четыре (тонкие) линии скольжения по две из каждого семейства ( $\lambda_i, i = 1, 2$ ), для весомой среды ( $\gamma = 0,00001 \text{ Н/мм}^3$ ), когда: А)  $I_{xx0}^r = 1,2 \text{ Н}$ ,  $\varphi^{ru} = 3,115413 \text{ рад}$ ; В)  $I_{xx0}^r = 1,6 \text{ Н}$ ,  $\varphi^{ru} = 3,106686 \text{ рад}$ ; С)  $I_{xx0}^r = 2,0 \text{ Н}$ ,  $\varphi^{ru} = 3,097959 \text{ рад}$ .

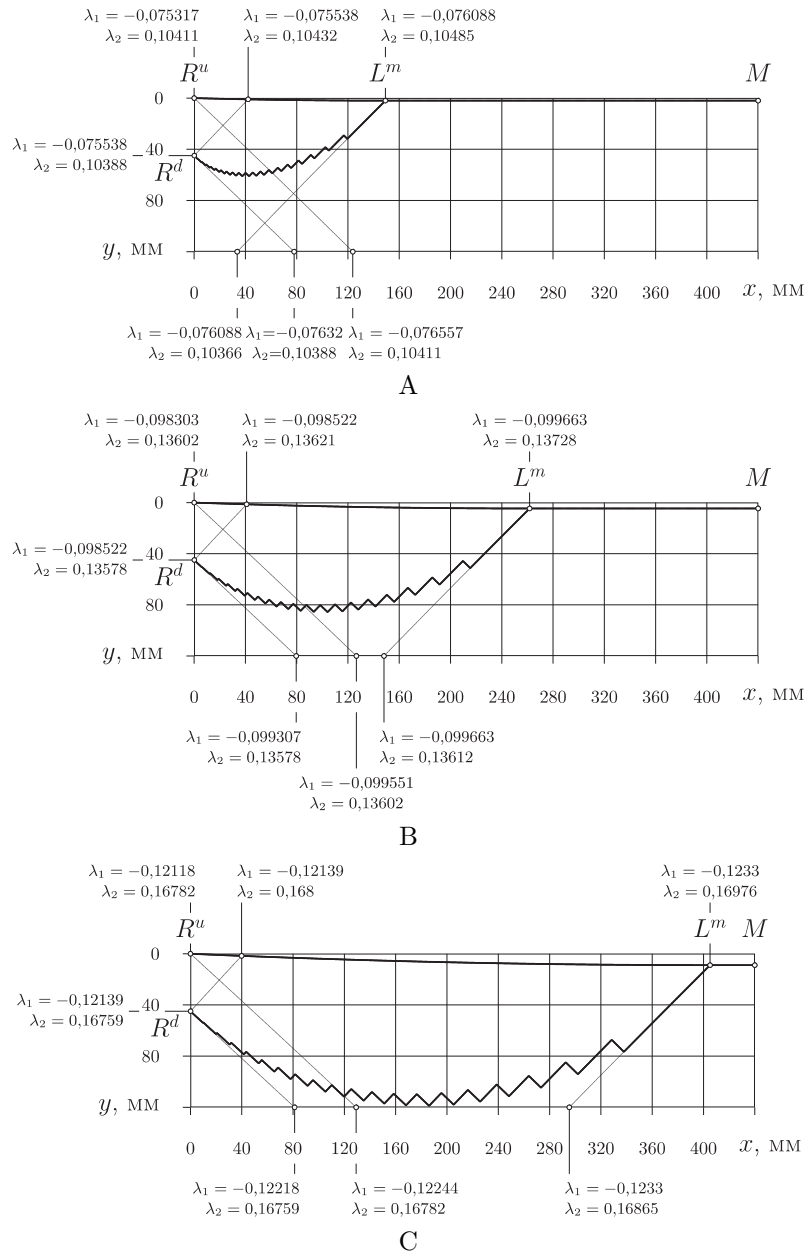


Рис. 4.61. Кривая  $L^m R^u$  свободного контура, дневная поверхность  $L^m M$  и огибающая кривая  $R^d L^m$  (жирные линии), а также четыре (тонкие) линии скольжения по две из каждого семейства ( $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ), для весомой среды ( $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>), когда: А)  $I_{xx0}^r = 1,3$  Н,  $\varphi^{ru} = 3,115413$  рад.; В)  $I_{xx0}^r = 1,7$  Н,  $\varphi^{ru} = 3,106686$  рад.; С)  $I_{xx0}^r = 2,1$  Н,  $\varphi^{ru} = 3,097959$  рад.



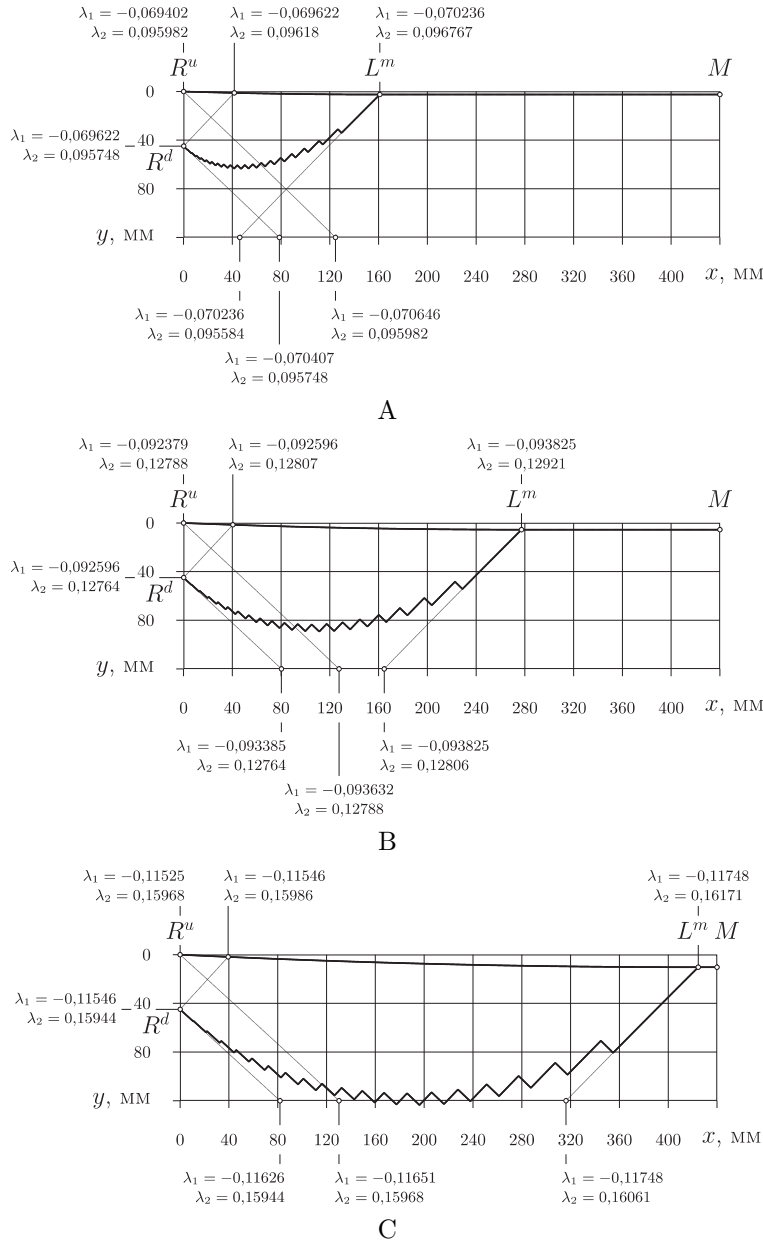


Рис. 4.62. Кривая  $L^m R^u$  свободного контура, дневная поверхность  $L^m M$  и огибающая кривая  $R^d L^m$  (жирные линии), а также четыре (тонкие) линии скольжения по две из каждого семейства ( $\lambda_i, i = 1, 2$ ), для весомой среды ( $\gamma = 0,00001 \text{ Н/мм}^3$ ), когда: А)  $I_{xx0}^r = 1,2 \text{ Н}$ ,  $\varphi^{ru} = 3,111049 \text{ рад.}$ ; В)  $I_{xx0}^r = 1,6 \text{ Н}$ ,  $\varphi^{ru} = 3,102323 \text{ рад.}$ ; С)  $I_{xx0}^r = 2,0 \text{ Н}$ ,  $\varphi^{ru} = 3,093596 \text{ рад.}$

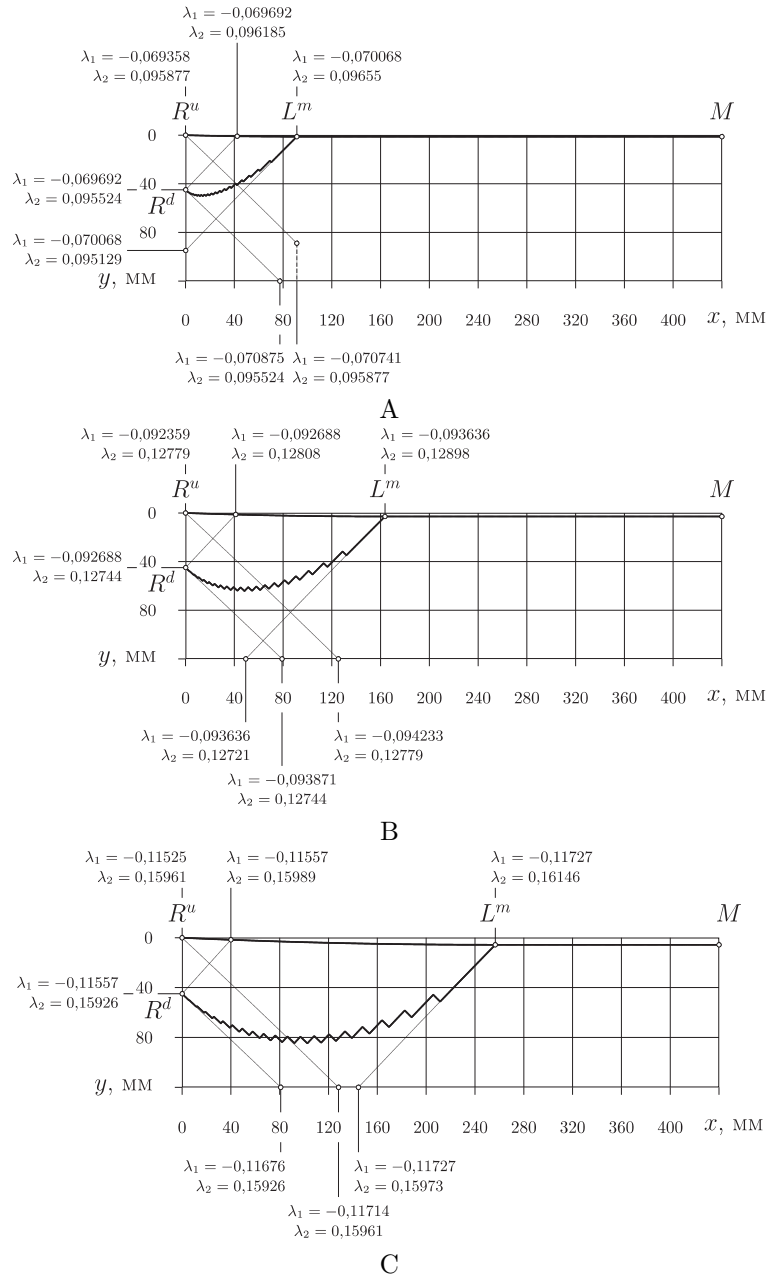


Рис. 4.63. Кривая  $L^m R^u$  свободного контура, дневная поверхность  $L^m M$  и огибающая кривая  $R^d L^m$  (жирные линии), а также четыре (тонкие) линии скольжения по две из каждого семейства ( $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ), для весомой среды ( $\gamma = 0,000015$  Н/мм<sup>3</sup>), когда: А)  $I_{xx0}^r = 1,2$  Н,  $\varphi^{ru} = 3,115413$  рад.; В)  $I_{xx0}^r = 1,6$  Н,  $\varphi^{ru} = 3,106686$  рад.; С)  $I_{xx0}^r = 2,0$  Н,  $\varphi^{ru} = 3,097959$  рад.

На изложении алгоритма построения всех упомянутых кривых сейчас останавливаться не будем. Скажем только, что для этой цели были задействованы уже известные алгоритмы *FreeContour*, *FindPhiRDK-III*, *RoundLine* и *PhiSlidingLine*. Далее остановимся на выводах, которые следуют из анализа рис. 4.60–4.63 и табл. 4.2–4.4.

Таблица 4.3

**Локализация и параметры линий скольжения,  
изображенных на рис. 4.60 и 4.61**

Рис.	Параметры линий скольжения		Положение на рисунке
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	
4.60A	-0,06972	[0,09584; 0,09628]	Из $R^d$ уходит вверх и вправо
4.60B	-0,09272	[0,12776; 0,12818]	Тоже
4.60C	-0,11561	[0,15958; 0,15999]	Тоже
4.60A	[-0,07051; -0,06972]	-0,09584	Из $R^d$ уходит вниз и вправо
4.60B	[-0,09351; -0,09272]	-0,12776	Тоже
4.60C	[-0,1164; -0,11561]	-0,15958	Тоже
4.60A	-0,07021	[0,09556; 0,09675]	Подходит к $L^m$ снизу и слева
4.60B	-0,09378	[0,12802; 0,12918]	Тоже
4.60C	-0,11741	[0,16054; 0,16166]	Тоже
4.60A	[-0,07074; -0,06950]	-0,09608	Из $R^u$ уходит вниз и вправо
4.60B	[-0,09375; -0,09250]	-0,12799	Тоже
4.60C	[-0,11665; -0,11539]	-0,15981	Тоже
4.61A	-0,07554	[0,10388; 0,10432]	Из $R^d$ уходит вверх и вправо
4.61B	-0,09852	[0,13578; 0,13621]	Тоже
4.61C	-0,12139	[0,16759; 0,168]	Тоже
4.61A	[-0,07632; -0,07554]	0,10388	Из $R^d$ уходит вниз и вправо
4.61B	[-0,09931; -0,09852]	0,13578	Тоже
4.61C	[-0,12218; -0,12139]	0,16759	Тоже
4.61A	-0,07609	[0,10366; 0,10485]	Подходит к $L^m$ снизу и слева
4.61B	-0,09966	[0,13612; 0,13728]	Тоже
4.61C	-0,1233	[0,16865; 0,16976]	Тоже
4.61A	[-0,07656; -0,07532]	0,10411	Из $R^u$ уходит вниз и вправо
4.61B	[-0,09955; -0,09830]	0,13602	Тоже
4.61C	[-0,12244; -0,12118]	0,16782	Тоже

Таблица 4.4

**Локализация и параметры линий скольжения,  
изображенных на рис. 4.62 и 4.63**

Рис.	Параметры линий скольжения		Положение на рисунке
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	
4.62A	-0,06962	[0,09575; 0,09618]	Из $R^d$ уходит вверх и вправо
4.62B	-0,09260	[0,12764; 0,12807]	Тоже
4.62C	-0,11546	[0,15944; 0,15986]	Тоже
4.62A	[-0,07041; -0,06962]	0,09575	Из $R^d$ уходит вниз и вправо
4.62B	[-0,09339; -0,09260]	0,12764	Тоже
4.62C	[-0,11626; -0,11546]	0,15944	Тоже
4.62A	-0,07024	[0,09558; 0,09677]	Подходит к $L^m$ снизу и слева
4.62B	-0,09383	[0,12806; 0,12921]	Тоже
4.62C	-0,11748	[0,16061; 0,16171]	Тоже
4.62A	[-0,07065; -0,06940]	0,09598	Из $R^u$ уходит вниз и вправо
4.62B	[-0,09363; -0,09238]	0,12788	Тоже
4.62C	[-0,11651; -0,11525]	0,15968	Тоже
4.63A	-0,06969	[0,09552; 0,09619]	Из $R^d$ уходит вверх и вправо
4.63B	-0,09269	[0,12744; 0,12808]	Тоже
4.63C	-0,11557	[0,15926; 0,15989]	Тоже
4.63A	[-0,07088; -0,06969]	0,09552	Из $R^d$ уходит вниз и вправо
4.63B	[-0,09387; -0,09269]	0,12744	Тоже
4.63C	[-0,11676; -0,11557]	0,15926	Тоже
4.63A	-0,07007	[0,09513; 0,09655]	Подходит к $L^m$ снизу и слева
4.63B	-0,09364	[0,12721; 0,12898]	Тоже
4.63C	-0,11727	[0,15973; 0,16146]	Тоже
4.63A	[-0,07074; -0,06936]	0,09588	Из $R^u$ уходит вниз и вправо
4.63B	[-0,09423; -0,09236]	0,12779	Тоже
4.63C	[-0,11714; -0,11525]	0,15961	Тоже

## ВЫВОДЫ

1. Опережающая трещина  $R^d L^m$  зарождается в точке  $R^d$  и развивается в секторе между исходящими из той же точки характеристиками  $\lambda_1, \lambda_2$ .
2. В общем случае опережающая трещина  $R^d L^m$  — это кусочно-сочлененная линия, состоящая из отрезков характеристик обоих семейств.
3. Наиболее вероятным является случай, когда опережающая трещина  $R^d L^m$  сглаживает угол, который образуют две характеристики разных семейств, выходящих из начальной и конечной точек ( $R^d$  и  $L^m$ ).
4. Если опережающая трещина  $R^d L^m$  представляет собой кусочно-сочлененную линию, то ее конечные участки всегда совпадают с характеристиками, которые выходят Из точек  $R^d$  и  $L^m$ .
5. В частном случае опережающая трещина  $R^d L^m$  может полностью совпадать с одной из характеристик, которые выходят из точки  $R^d$ .
6. Тот путь, по которому пройдет опережающая трещина, в первую очередь определяется вероятностными факторами, но чем меньше связность среды тем вероятнее, что кривая  $R^d L^m$  совпадет с характеристикой первого семейства, уходящей из точки  $R^d$  вправо и вверх.
7. В реальной среде (например, в черноземе пахотного горизонта с плотностью  $1,0-1,5 \times 10^{-5}$  Н/мм<sup>3</sup> и коэффициентом сцепления  $< 0,15$  Н/мм<sup>2</sup>) в процессе развития опережающей трещины переходы между характеристиками определяются неоднородностями среды.
8. Дальность распространения опережающей трещины  $R^d L^m$  прямопропорциональна величине связности среды и соответствующему внешнему силовому воздействию. Увеличение связности среды в 1,62–1,67 раза, влечет увеличение горизонтальной составляющей необходимой интенсивности силового воздействия в 1,62–1,67 раза и дальности распространения опережающей трещины в 2,64–2,81 раза.
9. Кривизна линии свободного контура  $R^u L^m$  и ее начальный наклон (угол  $\pi - \varphi^{ru}$ ) связаны с коэффициентом сцепления среды и внешним силовым воздействием прямопропорциональной зависимостью. При увеличении коэффициента сцепления от 0,013 до 0,023 Н/мм<sup>2</sup> и интегрального значения горизонтальной составляющей внешней силовой нагрузки от 1,2 до 2,1 Н угол  $\pi - \varphi^{ru}$  увеличивается в 2,2 раза.
10. Линия пятна контакта  $R^u R^d$ , огибающая кривая (опережающая трещина)  $R^d L^m$  и кривая свободного контура  $L^m R^u$  всегда образуют замкнутую область предельного равновесия  $R^u R^d L^m$ .
11. Из числа свойств среды самым основным фактором, который определяет форму и размеры области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$ , является величина связности (коэффициента сцепления  $k$ ).

12. Коэффициент внешнего трения среды также влияет на форму и размеры области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$ . Исходя из механизмов изучаемых процессов можно утверждать, что уменьшение коэффициента внешнего трения  $f$  должно способствовать проскальзыванию среды вверх вдоль пятна контакта, а, значит, уменьшению угла  $\varphi^{ru}$ . В нашем случае угол  $\varphi^{ru}$  назначается. Следовательно, если в процессе комплектования исходных данных уменьшить  $f$ , то в ответ необходимо уменьшить и  $\varphi^{ru}$ . Расчеты показывают, что в таком случае область предельного равновесия  $R^u R^d L^m$  увеличится в размерах. В частности точка  $L^m$  еще больше удалится от лобовой поверхности  $R^u R^d$ .

13. Увеличение интенсивности силового воздействия (интегрального значения  $I_{xx0}^r$ ) при тех же величинах угла  $\varphi^{ru}$  приводит к деформации (изменению значения  $\varphi^{rd}$ ) и пропорциональному масштабированию области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$  как по абсциссе, так и по ординате. Коэффициент сцепления  $k$ , угол  $\varphi^{rd}$  и расчетное значение  $I_{xy}^r$  модуля вертикальной составляющей внешнего силового воздействия также увеличиваются. Увеличение интегрального значения горизонтальной составляющей внешней нагрузки с 1,2, 1,6 и 2,0 Н на 0,1 Н, т.е. в 1,08, 1,06 и 1,05 раза приводит к соответствующему числу раз увеличению расчетных значений коэффициента сцепления, интегрального значения вертикальной составляющей внешней нагрузки, горизонтального размера предельной области, а глубины проникновения опережающей трещины в 1,04 раза и угла  $\varphi^{ru}$  на  $0,17, 2,23$  и  $2,22 \times 10^{-4}$  рад..

14. Уменьшение угла  $\varphi^{ru}$ , при тех же величинах интенсивности силового воздействия (интегрального значения  $I_{xx0}^r$ ), также приводит к пропорциональному увеличению размеров области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$  как по абсциссе, так и по ординате с одновременным уменьшением угла  $\varphi^{rd}$ . Коэффициент сцепления  $k$  и расчетное значение  $I_{xy}^r$  модуля вертикальной составляющей внешнего силового воздействия при этом увеличиваются. Уменьшение угла  $\varphi^{ru}$  на  $4,36 \times 10^{-3}$  рад. при сохранении величины интегрального значения горизонтальной составляющей внешней силовой нагрузки 1,2, 1,6 и 2,0 Н приводит к соответствующему увеличению интегрального значения вертикальной составляющей внешней силовой нагрузки и горизонтальной дальности распространения опережающей трещины в 1,17, 1,13 и 1,10 раза, глубины проникновения опережающей трещины в 1,08 раза, а коэффициент сцепления изменяется незначительно.

15. Увеличение удельного веса среды  $\gamma$ , при тех же величинах остальных исходных данных, приводит к пропорциональному уменьшению размеров области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$  как по абсциссе, так и по ординате с одновременным уменьшением угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ .

Расчетное значение  $I_{xy}^r$  модуля вертикальной составляющей внешнего силового воздействия при этом увеличивается. Увеличение удельного веса среды с  $10^{-5}$  Н/мм<sup>3</sup> в 1,5 раза, при неизменных значениях остальных исходных данных, приводит к незначительному увеличению интегрального значения вертикальной составляющей внешней нагрузки и коэффициента связности, а также к уменьшению горизонтального размера предельной области в 1,5 раза и глубины проникновения опережающей трещины в 1,15...1,33 раза, а угла  $\varphi^{rd}$  — на 1,16, 1,14 и  $1,13 \times 10^{-4}$  рад..

16. В процессе проектирования рабочих органов для внутрпочвенного внесения жидких средств защиты растений, образующуюся впереди взаимодействующего с почвой рабочего органа область предельного равновесия следует отождествлять с областью разрушения почвы.

17. Форма и размеры области разрушения почвы зависят от параметров рабочего органа, свойств почвы как сплошной среды и режима использования рабочего органа, поэтому могут различаться весьма существенно, а, значит, в расчет следует принимать самый неблагоприятный вариант.

ГЛАВА 5  
ПРОЦЕССЫ ОБРАЗОВАНИЯ ПОЛОСТИ В ПОЧВЕ  
И РАСПЫЛЕНИЯ В НЕЙ РАБОЧИХ ЖИДКОСТЕЙ

5.1. Образование в почве полости,  
предназначенной для распределения жидких удобрений  
и/или иных средств химзащиты растений

5.1.1. Динамический характер процесса образования полости в почве. Для дальнейших рассуждений используем модель двугранного клина  $\alpha$  (рис. 5.1). Его скорость движения  $v$ , глубину хода  $H$  и состояние лобовой поверхности ( $KL$  — в вертикальном сечении), т.е.  $\varphi$  — угол трения почвы о металл, равно как и состояние самой почвы, т.е.  $\varphi'$  — ее угол внутреннего трения, будем считать фиксированными.

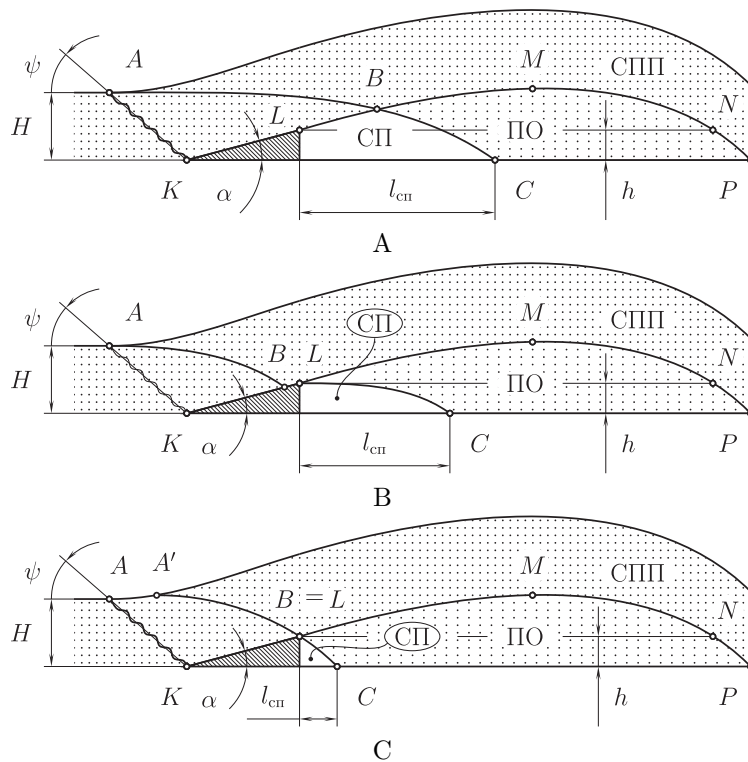


Рис. 5.1. Схемы вариантов траекторий движения частиц почвы, провазимодействовавших с двугранным клином: А — частица в своем падении лобовой поверхности клина не задевает; В — частица задевает лобовую поверхность клина и при этом изменяет свою скорость по модулю и направлению; С — частица проходит лобовую поверхность клина с касанием без изменения скорости свободного падения



Известно [297], что в процессе движения клина под слоем почвы, вследствие их динамического взаимодействия, за ним образуется свободное пространство (СП), не содержащее падающих почвенных отдельностей. Ограничивается СП динамической граничной поверхностью (ДГП), за которой следует переходная область (ПО). За ПО располагается сплошной почвенный поток (СПП), нижней границей которого также является своя ДГП. Концентрация отдельно падающих почвенных частиц в ПО изменяется от нулевого значения до 100% по мере удаления от СП и приближения к СПП.

В содержащей вектор  $v$  плоскости вертикального сечения двугранного клина указанные области разграничиваются кривыми  $LMNP$  (рис. 5.1) и  $LBC$  (рис. 5.1А) или  $LC$  (рис. 5.1,В и 5.1,С). Тут  $LMNP$  — динамическая граница, т.е. линия сечения ДГП СПП, а  $LBC$  или  $LC$  — линия сечения ДГП между ПО и СП.

Поверхность скалывания (в том же вертикальном сечении — линия  $AK$ ) или опережающая трещина ориентирована известным образом [298], т.е. под углом к горизонту

$$\psi = 0,5(180^\circ - \alpha - \varphi - \varphi'). \quad (5.1)$$

Линия  $AK$  ограничивает область разрушения почвы клином. В дальнейшем нас будет интересовать ПО и ее границы  $LBC$  или  $LC$  и  $LMNP$ .

5.1.2. Стрельчатая лапа — основа комбинированного рабочего органа. На рис. 5.2 в двух проекциях изображена стрельчатая лапа 1 с распылителем 2 и сводообразующей частью 3. Угол раствора лапы  $2\gamma$ , ширина захвата  $S$ , угол крошения  $\beta$ . Углу двугранного клина соответствует угол  $\alpha$  подъема лемехов. Штрихпунктирными линиями  $ON$  и  $OC$  на вертикальной проекции (рис. 5.2,А) показаны два альтернативных направления выброса жидкости распылителем. Ниже они будут рассматриваться в процессе анализа вариантов ориентации распылителя.

На двух горизонтальных проекциях (рис. 5.2,В и 5.2,С) приняты буквенные обозначения со штрихами. Для совпадающих по физической сути линий и точек на всех проекциях приняты обозначения из одних и тех же букв, отличающихся индексами и штрихами. Находящиеся в проекционной связи точки индексов не имеют. Таким образом, линия  $P'_1P'_2P'_3P'_4P'_5P'_6$  (рис. 5.2,С) есть не что иное, как геометрическое место пересечения динамической граничной поверхности СПП с горизонтальной плоскостью дна борозды, а  $N'_1N'_2N'_3N'_4N'_5N'_6$  (рис. 5.2,В) — той же ДГП с плоскостью параллельной дну борозды и расположенной на уровне точки  $O$  выброса распылителем РЖ. Линии  $C'_1C'_2$  (рис. 5.2,С) и  $D'_1D'_2$  (рис. 5.2,В) относятся к аналогичным пересечениям ДГП между ПО и СП.

Далее учтем, что распылитель, например, целевого типа имеет плоский конусообразный ФР РЖ с максимальным углом  $\theta$  при его вершине  $O$ . Толщиной ФР пренебрегаем, считая его совершенно плоским и веерообразным. Если ФР ориентирован горизонтально, т.е. по первому варианту вдоль  $ON$ , то с дном борозды он не встречается, а пересекая СП и ПО, достигает и, смачивает ДГП СПП.

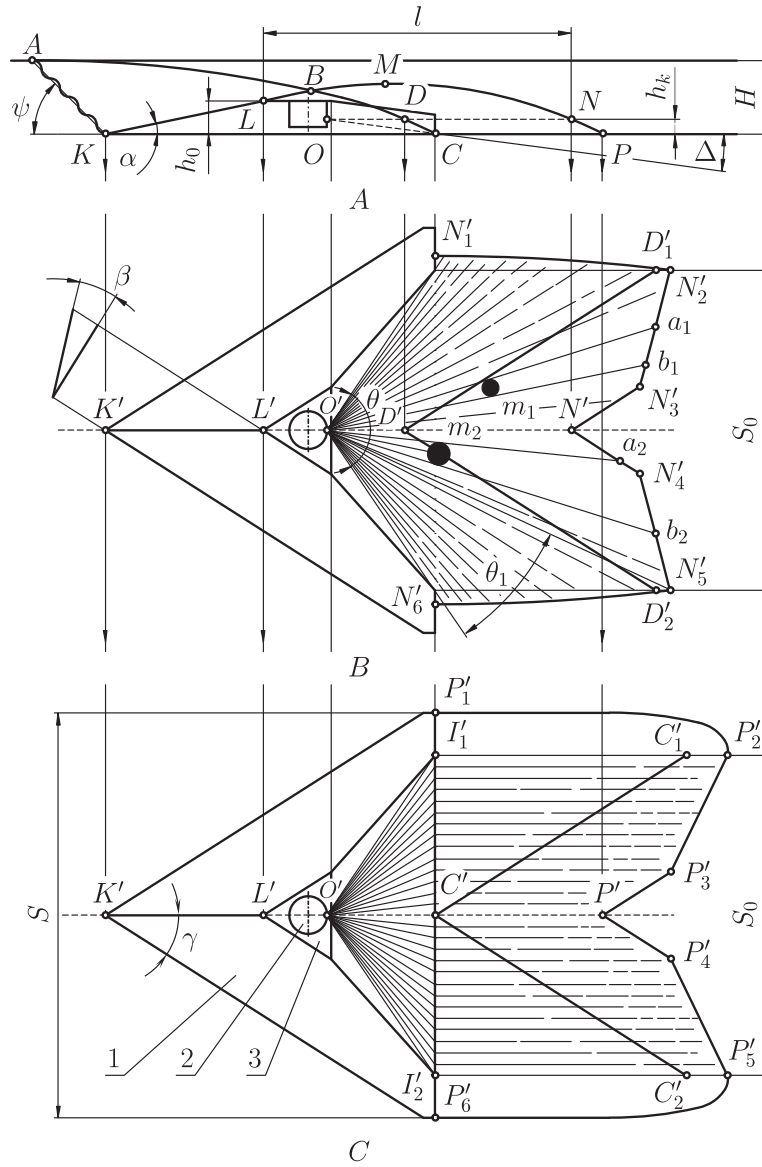


Рис. 5.2. Схема рабочего органа в состоянии взаимодействия с почвой (буквенные обозначения точек совпадают с таковыми на рис. 5.1): А — вертикальное сечение; В и С — горизонтальные проекции для случаев, когда распылитель ориентирован параллельно и под углом к плоскости резания рабочего органа (1 — стрелчатая лапа; 2 — распылитель; 3 — сводобразующая часть рабочего органа)

В отличие от СП, ПО от падающих одиночных почвенных частиц, например  $m_1$  и  $m_2$ , несвободна (рис. 5.2,В). Встречаясь на пути движущихся капелек распыленной РЖ, такие частицы смачиваются сами, одновременно затеняя собой соответствующие участки на ДГП СПП. Эффект тут двойкий. Во-первых, появляются несмоченные участки на ДГП СПП, например  $a_1b_1$  и  $a_2b_2$ . Во-вторых, сами частицы, например, те же  $m_1$  и  $m_2$ , смачиваются в несколько раз сильнее планируемой плотности обработки. Превышение плотности обработки таких частиц пропорционально отношению диаметра необработанного пятна на ДГП СПП к диаметру самой частицы, тенью которой является пятно (т.е. в этом случае РЖ распределяется случайным образом). Этот тезис тем более актуален, чем меньше удельный расход РЖ. При больших расходах она достаточно равномерно распределяется под слоем почвы уже после заделки. Происходит это капиллярным способом. 50 л/га — примерная предельная норма расхода РЖ, при использовании которой без дополнительных поступлений влаги в почву капиллярного движения РЖ не происходит. Установлена эта норма экспериментальным способом — изотопным методом [297].

Распределение РЖ по ширине, если распылитель ориентирован горизонтально, напрямую зависит от скорости  $v$  движения РО. Дело в том, что от  $v$  зависит форма и размеры полости, образующейся в почве. С достаточной для инженерных расчетов точностью, размеры полости в почве, т.е. ДГП СПП, можно определить, используя следующие приближения: 1) взаимодействие почвы с РО абсолютно неупругое; 2) в процессе взаимодействия и перемещения каждая из частиц движется параллельно вертикальной плоскости симметрии РО; 3) модуль относительной скорости частицы почвы остается постоянным, начиная с момента столкновения ее с поверхностью РО и до момента отрыва; 4) после отрыва от поверхности РО частица движется в состоянии свободного падения.

Таким образом, считаем, что ДГП между ПО и СПП есть не что иное, как геометрическое место бесконечного множества траекторий свободно летящих частиц почвы. Получить координаты интересующей точки на ДГП можно, например, задав высоту расположения точки над дном борозды и ее смещение относительно плоскости симметрии РО. Смещение интересующей точки, измеренное вдоль оси симметрии РО, или, что то же самое, перемещение  $l$  (рис. 5.2,А) частицы после ее отрыва от точки отрыва до интересующей точки на ДГП определяется выражением:

$$l = \frac{v^2 \cos^2 \alpha_0 \sin 2\alpha_k}{2g} \left( 1 + \sqrt{\frac{2g(h_0 - h_k)}{v^2 \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_k} + 1} \right). \quad (5.2)$$

где  $h_0$  — высота отрыва;  $h_k$  — высота расположения интересующей точки;  $\alpha_0$  и  $\alpha_k$  — начальное и конечное (если они не равны) значения угла подъема лемеха в плоскости отрыва;  $g$  — ускорение свободного падения. С использованием выражения (5.2) построены граничные кривые  $N'_2N'_3N'_4N'_5$  и  $P'_2P'_3P'_4P'_5$  на рис. 5.2,В и рис. 5.2,С, соответственно.

График зависимости величины размера  $l$  от скорости  $v$  движения РО приведен на рис. 5.3.

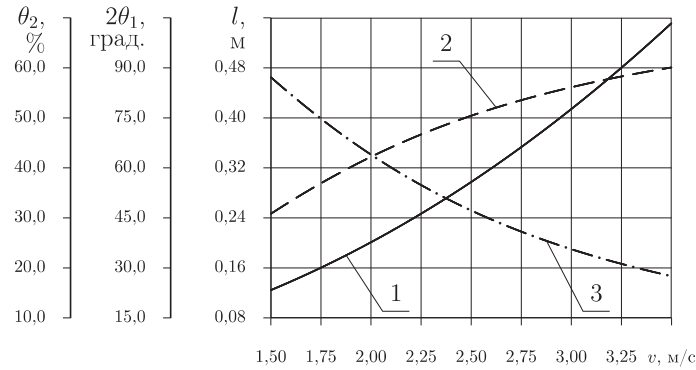


Рис. 5.3. Продольный размер  $l$  (1) создаваемой в почве полости, а также величины долей  $2\theta_1$  (2) и  $\theta_2$  (3) угла факела распыла  $\theta$ , в зависимости от скорости движения  $v$  рабочего органа

Из анализа рис. 5.2 следует, что в случае горизонтальной ориентации распылителя часть его факела распыла (ФР), измеряемого и обозначаемого углом  $\theta$ , всегда приходится за пределы планируемой ширины полосы обработки почвы  $S_0$ , т.е. далее ее граничных точек  $N'_2$  и  $N'_5$ . Введем обозначения:  $\theta_1$  — угловая часть ФР  $\theta$ , которая выходит влево или вправо за пределы  $S_0$ ;  $\theta_2 = \theta - 2\theta_1$  — угловая часть ФР  $\theta$ , которая попадает по назначению, т.е., на полосу  $S_0$ .

Очевидно, что  $2\theta_1$  тем больше, чем дальше от РО располагается граничная линия  $N'_2N'_3N'_4N'_5$ , т.е. чем больше  $l$  (5.2) и скорость  $v$  движения РО (рис. 5.3, кривая 2). Вследствие этого величина угла  $\theta_2$  со скоростью движения  $v$  связана обратной зависимостью. На рис. 5.3 (кривая 3) величина  $\theta_2$  представлена в процентах от  $\theta$ .

Если скорость  $v$  движения РО равна 2,0 м/с, то за пределы расчетной ширины  $S_0$  полосы обработки направляются  $2\theta_1$  равные  $63^\circ$  (57%) из  $110^\circ$  (100%) угла  $\theta$  раствора ФР РЖ распылителем. При скорости  $v$ , равной 2,5 м/с, доля угла  $\theta$  раствора ФР РЖ, приходящаяся за пределы полосы  $S_0$ , составит 69% ( $2\theta_1 = 76^\circ$ ), т.е. на 12% больше.

Поскольку скорость движения агрегата величина переменная, то это означает, что в текущем случае добиться программируемого распределение РЖ под слоем почвы невозможно. Необходимо либо менять саму конструкцию РО целиком, либо, как минимум — ориентацию сопла распылителя. Наиболее просто решить обозначенную проблему можно, если ориентировать распылитель 2 осью распыла вдоль линии  $OC$  (рис. 5.2), т.е. под углом  $\Delta$  к плоскости резания РО.

5.1.3. **Согласование конструктивных и режимных параметров рабочего органа.** Когда геометрические параметры лапы, место установки распылителя, угол  $\Delta$  наклона его ФР и рабочая скорость  $v$  согласованы между собой, то ФР РЖ полностью располагается в СП и, не задевая ПО, направляется на дно борозды. На рис. 5.2, С прямой  $I'_1I'_2$  показано место встречи ФР РЖ с дном борозды. Тут же видно, что ДГП между СП и ПО на уровне дна борозды, т.е. линия  $C'_1C'C'_2$  отстоит от заднего обреза лемехов РО дальше, чем  $I'_1I'_2$ , а ДГП СПП, т.е. линия  $P'_2P'_3P'_4P'_5$  — еще дальше. В этом случае распределение РЖ под слоем почвы, в частности, ширина обрабатываемой полосы  $S_0$ , являются совершенно определенными, полностью соответствуют характеристикам распылителя и, начиная с минимального критического значения, не зависят от скорости  $v$  движения РО. Тут под критическим значением рабочей скорости  $v$  РО понимается такое ее значение  $v_{\min}$ , при котором размеры СП еще достаточны для размещения в нем ФР, т.е. точка  $C'$  располагается на прямой  $I'_1I'_2$ . Таким образом, при расчете конструкции РО центральное место занимает поиск формы и положения в пространстве ДГП между СП и ПО и, в частности, линии  $C'_1C'C'_2$  пересечения этой ДГП с плоскостью дна борозды.

Для максимально точного решения такой задачи сначала необходимо определиться к какой модельной среде отнести почву. Затем сформулировать краевую задачу о взаимодействии модельной среды с РО и краевые условия к ней. И, наконец, одним из подходящих методов, например, конечных разностей, решить эту задачу. Такой путь рассматривался выше в разделах 2 и 3. С точки зрения инженерного подхода это неприемлемо трудоемкий и сложный путь.

Существенно упростить расчеты и, тем самым, привести их к приемлемому для конструкторских применений уровню можно, если принять ряд приближений. Но тут возможны варианты. С одной стороны, снижение трудоемкости. С другой — потеря точности и, следовательно, надежности принятых решений. Нельзя допустить, чтобы ФР РЖ достигал ПО. Стало быть, обоснованными следует считать такие приближения, которые корректируют результат в заведомо известном и нужном направлении. Точность найденного решения — на втором месте.

Если расчетное положение линии  $C'_1C'C'_2$  наверняка не совпадает с фактическим и гарантировано располагается слева от фактического (ближе к лапе), то это допустимо. В таком случае, ориентированный на точку  $C$  распылитель будет иметь ФР, полностью располагающийся в СП. Если с учетом принятого приближения точность расчетов даже повысилась, но при этом достоверно известно, что расчетное положение линии  $C'_1C'C'_2$  сдвинулось по отношению к фактическому вправо, то такое приближение не приемлемо. Выбирать такую позицию точки  $C$  в качестве ориентира для распылителя нельзя, поскольку фактически она располагается точно в ПО. Значит в ПО попадет и ФР, что недопустимо.

С учетом выше изложенного, опять возвращаясь к рис. 5.1, дополним ранее принятые приближения. Будем считать, что в результате абсолютно

неупругого взаимодействия почвы с двугранным клином  $\alpha$ , не все частицы почвы в равной мере изменяют свою вертикальную и горизонтальную составляющие скорости движения. Тут и дальше имеется в виду относительная скорость частиц. Некоторые из них, в полной мере до  $v \cos^2 \alpha$ , изменив свою горизонтальную составляющую, совсем не приобретают вертикальной. Это те частицы, которые непосредственно с клином  $\alpha$  не взаимодействуют и находятся от него на значительном удалении, вплоть до точки  $A$  на верхнем краю опережающей трещины  $AK$ . С точки зрения размеров СП, это самые неблагоприятные частицы. В первое мгновение, взаимодействия с клином  $\alpha$ , они вертикальной скорости не приобретают, а горизонтальную, наоборот, теряют. Если представить, что в дальнейшем эти частицы так больше с почвой и не провзаимодействуют, например, вследствие образования трещин, то в процессе свободного падения они приобретут значительную направленную вниз вертикальную составляющую скорости. Минимальный размер  $l_{СП}$  СП определят именно они.

В зависимости от модуля скорости  $v$ , глубины хода  $H$  и высоты  $h$  двугранного клина  $\alpha$  тут возможны три варианта движения рассматриваемых частиц. По первому варианту (рис. 5.1,А) частица не задевает лобовую поверхность  $KL$  клина  $\alpha$  и ее траектория  $ABC$  относительного движения располагается выше клина  $\alpha$ . В этом случае длину  $l_{СП}^{(1)}$  СП можно определить, используя известные выражения [299] для свободно падающего тела, начальная скорость которого ориентирована горизонтально и по модулю равна  $v \cos^2 \alpha$ , т.е. следующим образом:

$$l_{СП}^{(1)} = v \cos^2 \alpha \sqrt{\frac{2H}{g}} - h \operatorname{ctg} \alpha - H \operatorname{ctg} \psi. \quad (5.3)$$

По второму варианту (рис. 5.1,В) рассматриваемая частица в процессе свободного падения задевает лобовую поверхность  $KL$  клина  $\alpha$ , после чего ее вертикальная составляющая скорости движения опять становится нулевой. В этом случае размер  $l_{СП}^{(2)}$  СП составит:

$$l_{СП}^{(2)} = v \cos^2 \alpha \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (5.4)$$

а траектория движения будет ломаной, в виде  $ABLC$ . Если частица почвы проходит верхнюю точку  $L$  клина  $\alpha$  с касанием, но без изменения скорости движения, то неважно с какой точки она начала свое движение (рис. 5.1,С). Размер  $l_{СП}^{(3)}$  СП будет определяться выражением:

$$l_{СП}^{(3)} = v \cos^2 \alpha \left( \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \right). \quad (5.5)$$

Поскольку  $l_{СП}^{(1)} > l_{СП}^{(2)} > l_{СП}^{(3)}$ , то третий вариант — самый неблагоприятный. Значит, именно он и должен использоваться при проектировании РО.

Исходя из соображений эффективного использования ширины захвата  $S$  лапы, ФР РЖ распылителем следует направлять на самое широкое место на ее плоскости резания, т.е. на участок дна борозды, заключенный между свободными концами режущих кромок лемехов (на рис.5.2,С — это прямая  $I_1 I_2'$ ). Исходя из этого, с учетом выражения (5.5), для случая когда  $v = v_{\min}$  справедливо условие:

$$\frac{S}{2 \operatorname{tg} \gamma} - \frac{h}{\sin \gamma \operatorname{tg} \beta} = \frac{v_{\min} \left( \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \right)}{1 + \sin^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \beta_0}, \quad (5.6)$$

где под углом крошения  $\beta$  имеется в виду его среднее по высоте лемехов значение, а под  $\beta_0$  — его значение у режущих кромок.

Выражение (5.6) связывает основные конструктивные параметры РО, программируемую глубину обработки и минимальную скорость движения РО, при которой еще гарантируется должное качество выполнения технологического процесса. Все названные тут величины могут выбираться или определяться исходя из различных соображений, в том числе и тех, которые были приведены ранее. Ценность выражения (5.6) состоит в возможности проверки согласованности принятых значений упомянутых выше величин между собой. Простота математического представления выражения (5.6) обеспечивает его доступность для конструкторских применений.

## 5.2. Моделирование распределения жидкости по обрабатываемой поверхности

### 5.2.1. Постановка и актуальность задачи.

В конструкции подавляющего большинства машин для применения химических средств защиты растений используются гидравлические распылители различных конструкций и типоразмеров. Применительно к штанговым орудиям вопросы распределения жидкости по ширине захвата одного распылителя и орудия в целом достаточно хорошо изучены. В большинстве случаев идеальной считается треугольная характеристика распределения жидкости распылителем по ширине захвата. Для таких распылителей разработано теоретическое обоснование расположения их по ширине штанги. Практически повсеместно налажен выпуск большого разнообразия таких распылителей. Все они в основном щелевые, прямоочные с клиновидным шлицом.

Далее речь пойдет, о распылителях, предназначенных для ВВ жидкостей, например, гербицидов. С точки зрения габаритов, простоты конструкции, удобства монтажа и обслуживания для этих целей также приемлемы уже упомянутые выше распылители, хотя и с иной характеристикой распределения жидкости по ширине захвата.

Актуальность следующей далее задачи обусловлена тем, что если для штанговых орудий ориентация распылителей очевидна (вертикально вниз) и исключения очень редки, то для орудий вносящих жидкость внутрпочвенно, это далеко непростой вопрос. Чаще всего в таких конструкциях распылители ориентируют либо горизонтально, либо с незначительным накло-

ном вниз. В нашей стране и в государствах СНГ, нет и не было выпускающихся серийно подобных орудий вообще и специальных распылителей для них, в частности. Но исследовательские работы в этом направлении велись [297, 300–303]. Если абстрагироваться от конкретных характеристик распылителей внутрипочвенного применения, то удастся локализовать отдельную техническую задачу, ранее установленную автором исследовательским способом [297, 303]. Суть ее состоит в том, что ориентированный под углом к обрабатываемой плоскости распылитель дает иное, нежели при вертикальной ориентации, распределение жидкости по ширине захвата.

Таким образом иллюстрируется необходимость разработки теоретических приемов, позволяющих на основании характеристики распылителя снятой при его вертикальной ориентации прогнозировать характер распределения рабочей жидкости, которое сложится при наклонной, например, почти горизонтальной ориентации.

Следует также обосновать, достаточно ли для распылителей внутрипочвенного применения иметь одномерную характеристику распределения жидкости по ширине захвата или же необходимо получать двумерное распределение жидкости по площади пятна распыла (ПР), при нормированном удалении от контрольной поверхности.

5.2.2. Факел распыла жидкости как векторное поле [304]. Рассмотрим левую ортогональную систему координат  $Oxyz$  (рис. 5.4), базисный репер которой —  $(O, \vec{l}, \vec{m}, \vec{n})$ , [305]. Положительное направление оси  $Oz$  — вертикально вниз. Полагаем, что конечный элемент проточной части распылителя располагается в начале (точка  $O$ ) этой системы координат  $Oxyz$ . Ориентирован распылитель в направлении оси  $Oz$ . В процессе его работы истекающая из него жидкость распыляется, образуя при этом конусоподобный ФР. Вершина этого факела располагается в начальной точке ( $x = y = z = 0$ ) системы координат  $Oxyz$ .

Условимся, что поверхность, на которую напыляется жидкость располагается на удалении  $z = h$  от координатной плоскости  $xOy$  и параллельна последней. Для этой плоскости ( $x, y, z = h$ ) двумерное распределение жидкости считаем известным. Задается оно функцией  $f = f(x, y)$ . По своей физической сути эта функция является количеством жидкости, которое попадает на единицу площади в течение единицы времени в точке с координатами  $x, y$  и  $z = h$ . Тут и далее понятие “количество жидкости” в равной мере применимо к обозначению величины объема жидкости и ее массы.

В качестве ПР будем понимать прямоугольную область  $\omega$  со сторонами, параллельными осям координат  $Ox$  и  $Oy$ . По размерам эта область  $\omega = \{x, y: a_1 \leq x \leq a_2; b_1 \leq y \leq b_2\}$  такова, что полностью охватывает (возможно с “запасом”) всю территорию, на которую попадает хоть сколь угодно мало жидкости. В пределах  $\omega$ , которая фактически является областью определения функции распределения  $f(x, y)$ , на основе экспериментальных данных, путем сбора жидкости, попадающей на каждую элементарную площадку ПР  $\omega$  можно получить ее сеточное представление  $f = f_{k,l}(x, y)$ , где



индексы  $k$  и  $l$ , задаются сеткой  $\omega_{k,l} = \{x_k, y_l : a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a_2; b_1 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2\}$ . Выполнив сплайн-интерполяцию с помощью кусочно-бикубической функции [202, 306] будем понимать

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^3 a_{i,j}^{k,l} (x - x_k)^i (y - y_l)^j, \quad (5.7)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, m),$$

когда  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ ,  $y \in [y_l, y_{l+1}]$ . На сетке  $\omega_{k,l}$  сплайн-функция  $f(x, y)$  (5.7) принимает заданные значения  $f_{k,l}$ , которые, в свою очередь, равны свободным членам ее полиномов:

$$f(x_k, y_l) = f_{k,l} = a_{0,0}^{k,l}, \quad (k = 0, 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, m), \quad (5.8)$$

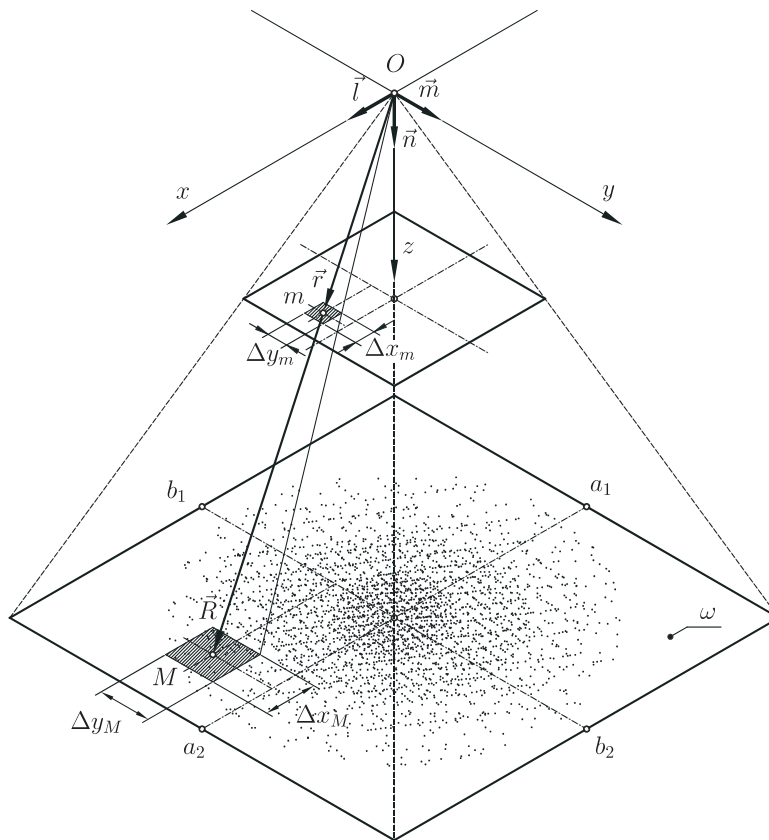


Рис. 5.4. Расчетная схема факела распыла с пятном распыла  $\omega$  площадью  $(a_2 - a_1) \times (b_2 - b_1)$  в координатах  $Oxyz$  и вспомогательные построения для определения векторного поля  $\vec{B}(x, y, z)$  потока жидкости

в пределах  $\omega$  дважды непрерывно дифференцируема:

$$f(x, y) \in C^2(\omega), \quad (5.9)$$

вдоль внешнего контура  $\Gamma$  площадки  $\omega$  ( $\Gamma \in \omega$ ) выполняется условие:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (5.10)$$

где  $\nu$  — внешняя нормаль к границе  $\Gamma$  области  $\omega$ . Кроме уже приведенного, в отношении функции  $f(x, y)$ , а, следовательно, и в отношении ее сплайн-представления (5.7), в силу специфики реального процесса распределения жидкости по площадке  $\omega$ , который они отражают, укажем, что  $f(x, y)|_{\omega} \geq 0$ . Пример такого распределения для конкретного распылителя приведен на рис. 5.5. На нем функция  $f(x, y)$  изображена в виде совокупности изолиний. Тут и далее в пределах текущего раздела все величины рассматриваем как безразмерные. В дальнейшем распределение  $f(x, y)$  условимся называть нормированной двумерной характеристикой распылителя.

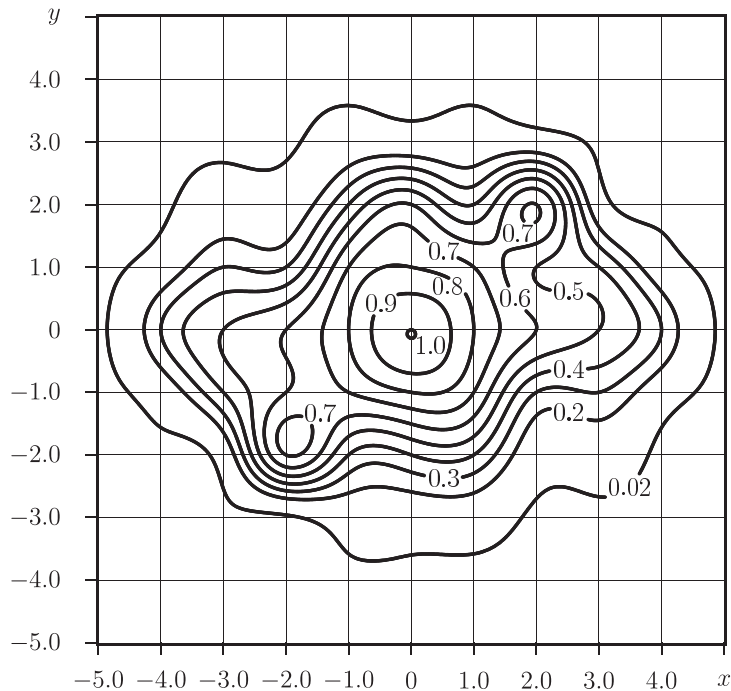


Рис. 5.5. Пример распределения жидкости распылителем при удалении  $h$  и нормальной ориентации его относительно плоскости напыления  $\omega$  размером  $(a_2 - a_1) \times (b_2 - b_1)$ . Изолинии соответствуют количеству жидкости, которое попадает на единицу площади в единицу времени

С учетом принятых ограничений на форму и размеры площадки  $\omega$  конусообразный ФР жидкости распылителем полностью располагается внутри объема пирамиды  $\Omega$ , основанием которой является эта площадка  $\omega$ , а вершиной точка  $O$ , начала системы координат  $Oxyz$ . В дальнейшем именно эту пирамиду условимся считать ФР.

Применение сплайн-интерполяции далее позволит стандартизовать аналитическое представление функции  $f(x, y)$  распределения жидкости распылителем, а, следовательно, и все последующие выкладки. Тому же способствует использование прямоугольной области  $\omega$ , ортогональной сетки  $\omega_{k,l}$ , а также представление ФР  $\Omega$  в виде пирамиды.

Предполагается, что система координат  $Oxyz$  неподвижна, но известно вероятное направление перемещения распылителя при установке его на сельскохозяйственном орудии. В общем случае (в дальнейшем остановимся именно на нем) это направление может быть различным. В частном же случае, когда вектор перемещения распылителя совпадает с осью  $Oy$  или параллелен ей, под термином “распределение жидкости по ширине захвата” следует понимать “распределение жидкости вдоль оси  $Ox$ ”. Это распределение может быть найдено путем интегрирования:

$$F(x) = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy \Big|_{x \in [a_1, a_2]}, \quad (5.11)$$

и описывает характер реального распределения жидкости отдельными распылителями штанговых орудий, для которых характерна именно вертикальная ориентация сопел распылительных головок.

Подстановка сплайн-функции  $f(x, y)$  (5.7) в уравнение (5.11), а затем интегрирование дает:

$$F(x) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i,j=0}^3 a_{i,j}^{k,l} (x - x_k)^i (y_{l+1} - y_l)^{j+1} \Big|_{x \in [a_1, a_2]}, \quad (5.12)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, m),$$

Характер распределения и движения жидкости в пределах ФР  $\Omega$  опишем, используя векторное поле  $\vec{B}(x, y, z)$ . Модуль  $B(x, y, z)$  векторов этого поля  $\vec{B}(x, y, z)$  определяет количество жидкости, которое перемещается через единичную, перпендикулярную потоку площадку в текущей точке в единицу времени. Направляющие косинусы его  $\cos \alpha_x$ ,  $\cos \alpha_y$  и  $\cos \alpha_z$  указывают направление переноса жидкости. Если записать

$$\vec{B} = B(\vec{l} \cos \alpha_x, \vec{m} \cos \alpha_y, \vec{n} \cos \alpha_z), \quad (5.13)$$

то направляющие косинусы  $\cos \alpha_x$ ,  $\cos \alpha_y$ ,  $\cos \alpha_z$  можно трактовать как относящиеся к радиус-вектору, указывающему на точку общего положения с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и располагающуюся в объеме ФР  $\Omega$ . Сами направляющие косинусы, через координаты все той же точки общего положения,

определяются так:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \alpha_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \alpha_z &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Исходя из физической природы векторного поля  $\vec{B}(x, y, z)$ , пренебрегая дискретностью распределения жидкости внутри объема ФР  $\Omega$ , полагаем, что векторная величина  $\vec{B}(x, y, z)$  непрерывная и гладкая при всех  $(x, y, z) \in \Omega$ , т.е.  $(\vec{B}(x, y, z) \in C^2(\Omega))$ .

Уравнение связи между  $\vec{B}(x, y, z)$  и  $f(x, y)$  с учетом обозначения  $\vec{B}|_\omega = \vec{B}(x, y, z=h)$  можно представить в виде скалярного произведения [305]:

$$f(x, y) = \vec{n}\vec{B}|_\omega. \quad (5.15)$$

Опираясь на последнее выражение (5.15) и определение векторного поля  $\vec{B}$  решим первую часть задачи — выразим  $\vec{B}$  через известные величины. Функцию  $f$  распределения жидкости по ПР  $\omega$ , с учетом предпринятой сплайн-интерполяции (5.7) считаем известной.

Запишем скалярное произведение (5.15) в развернутом виде [305]:

$$f(x, y) = (0, 0, 1)(B_x|_\omega, B_y|_\omega, B_z|_\omega). \quad (5.16)$$

Из (5.16) следует:

$$f(x, y) = B_z|_\omega. \quad (5.17)$$

Учитывая, что в пределах области определения функции  $f(x, y)$  (площадки  $\omega$ ) значение  $z = h$  и, принимая во внимание (5.13), (5.14) из (5.17), имеем:

$$f(x, y) = \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} B(x, y, z = h). \quad (5.18)$$

Рассмотрим произвольную точку  $M$ , имеющую координаты  $x_M, y_M, z_M$  и располагающуюся в пределах площадки  $\omega$  ( $M \in \omega$ ).  $M$  является конечной точкой радиус-вектора  $\vec{R}$ , исходящего из начала системы координат  $Oxyz$  и имеющего направляющие косинусы  $\cos \alpha_{x_M}, \cos \alpha_{y_M}$  и  $\cos \alpha_{z_M}$ , совпадающие с таковыми (уравнения (5.14) для  $\vec{B}|_M = \vec{B}(x_M, y_M, z_M)$ ). Рассмотрим другую точку  $m$  ( $m \in \Omega$ ), располагающуюся на радиус-векторе  $\vec{R}$ . Ее координаты  $x_m, y_m, z_m$ . Эта точка также является конечной у радиус-вектора  $\vec{r}$  с точкой приложения в начале координат  $Oxyz$  и, следовательно, совпадающего по направлению с  $\vec{R}$ .

Поскольку значения  $B|_M$  и  $B|m$  функционально связаны, с очевидной зависимостью от  $R/r$ , используя функцию-множитель  $\Psi(R/r)$  запишем:

$$B|m = \Psi B|_M. \quad (5.19)$$

Учитывая свободу выбора точки  $M$ , а также принимая во внимание (5.18), можно утверждать, что выражение (5.19) определяет значение  $B$  по всей ее области определения, т.е. по объему  $\Omega$  ФР. Следует только определить функцию-множитель  $\Psi(R/r)$ .

Возвращаясь все к тем же точкам  $m$  и  $M$  (рис. 5.6), определим прямоугольные площадки, параллельные друг-другу и плоскости  $xOy$ , размером  $\Delta x_m \times \Delta y_m$  и  $\Delta x_M \times \Delta y_M$ . Точки  $m$ ,  $M$  располагаются в центре этих площадок, а ориентация и размеры  $(\Delta x_m, \Delta y_m)$  и  $(\Delta x_M, \Delta y_M)$  последних согласованы таким образом, что приложенные к их угловым точкам и центру системы координат  $Oxyz$  радиус-векторы попарно совпадают по направлению. Величины  $\Delta x_m, \Delta y_m, \Delta x_M$  и  $\Delta y_M$  выбраны настолько малыми, чтобы в их пределах отклонением фактических значений модуля и ориентации  $\vec{B}$

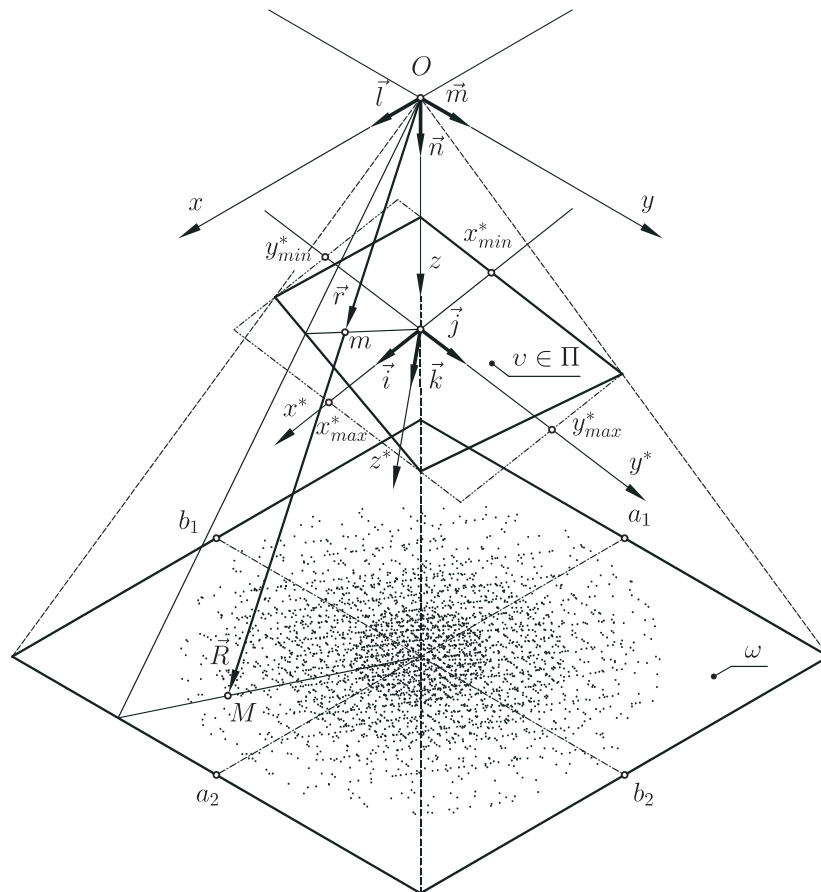


Рис. 5.6. Область  $v$  пересечения факела распыла плоскостью общего положения  $\Pi$  и новая система координат  $O^*x^*y^*z^*$

от  $\vec{B}_m$  и  $\vec{B}_M$  можно было пренебречь. С учетом оговоренного выше справедливо следующее:

$$B|_m \Delta x_m \Delta y_m = B|_M \Delta x_M \Delta y_M. \quad (5.20)$$

В силу согласованности размеров рассматриваемых тут площадок можно записать следующие соотношения:

$$\frac{\Delta x_M}{\Delta x_m} = \frac{\Delta y_M}{\Delta y_m} = \frac{R}{r}. \quad (5.21)$$

Теперь из равенств (5.20) и (5.21) имеем:

$$\frac{B|_m}{B|_M} = \frac{\Delta x_M \Delta y_M}{\Delta x_m \Delta y_m} = \left(\frac{R}{r}\right)^2. \quad (5.22)$$

Из выражений (5.19) и (5.22) находим искомую функцию  $\Psi(R/r)$ :

$$\Psi = \left(\frac{R}{r}\right)^2. \quad (5.23)$$

Окончательно имеем:

$$B|_m = \left(\frac{R}{r}\right)^2 B|_M. \quad (5.24)$$

Поскольку точка  $M$  произвольная точка на поверхности  $\omega$ , то уместно изменить запись функции  $f(x, y)$  на  $f(x_M, y_M)$ . Аналогичные изменения рационально внести и в выражение (5.18):

$$f(x_M, y_M) = \frac{h}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2 + h^2}} B(x_M, y_M, z_M = h). \quad (5.25)$$

Прибегнув к последней замене независимых переменных  $x$  и  $y$  на  $x_M$  и  $y_M$  вправе пользоваться старыми обозначениями относительно точек свободного расположения  $m$  в пределах всего пространства  $\Omega$ :

$$\frac{x_M}{R} = \frac{x}{r}; \quad \frac{y_M}{R} = \frac{y}{r}. \quad (5.26)$$

Из выражений (5.26) получаем координаты точки  $M$ , располагающейся на поверхности  $\omega$  и соответствующей точке  $m$  свободного расположения:

$$x_M = x \frac{R}{r}; \quad y_M = y \frac{R}{r}. \quad (5.27)$$

Используем также аналогичную (5.26) замену:

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{z}. \quad (5.28)$$

Теперь, выполнив подстановку соотношения (5.28) в выражения (5.27), затем полученных значений  $x_M, y_M$  в выражение (5.25), и последнего вместе с соотношением (5.28) — в (5.24), в итоге простых преобразований получим:

$$B(x, y, z) = \left(\frac{h}{z}\right)^3 \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{h} f\left(x\frac{h}{z}, y\frac{h}{z}\right). \quad (5.29)$$

Напомним, что точка  $m$  — фактически произвольная точка в объеме ФР  $\Omega$  ( $m \in \Omega$ ). Поэтому в левой части последнего выражения (5.29) вместо частного обозначения  $B|_m$  использовано общее —  $B(x, y, z)$ .

Подставив в выражение (5.13) значения направляющих косинусов (5.14) и модуля  $B$  (5.29), получим общее выражение:

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{h^2}{z^3} f\left(x\frac{h}{z}, y\frac{h}{z}\right) (\vec{l}x, \vec{m}y, \vec{n}z), \quad (5.30)$$

для векторного поля  $\vec{B}$ , иллюстрирующее количество и направление перемещения жидкости в произвольной точке объема ФР  $\Omega$ .

5.2.3. Распыление жидкости по свободно ориентированной площадке [304]. Изучим характер распределения жидкости распылителем по площадке общего положения. Для этого рассмотрим произвольную плоскость  $\Pi$ , заданную нормированным уравнением [305]:

$$x \cos \beta_x + y \cos \beta_y + z \cos \beta_z - p = 0, \quad (5.31)$$

где  $\cos \beta_x, \cos \beta_y$  и  $\cos \beta_z$  — направляющие косинусы ориентированного в сторону положительной ветви оси  $Oz$  единичного вектора нормали  $\vec{k}$  к этой плоскости  $\Pi$ , а  $p$  — постоянная, обозначающая минимальное расстояние от начала системы координат  $Oxyz$  до плоскости  $\Pi$  ( $p > 0$  — по определению). Свобода в ориентации плоскости  $\Pi$  ограничена лишь тем, что она обязательно пересекается с положительной ветвью оси  $Oz$  системы координат  $Oxyz$ , т.е.  $\cos \beta_z > 0$ .  $v$  — область пересечения этой плоскости с пирамидой  $\Omega$  ( $v = \Pi \cap \Omega$ ). По отношению к реальному сельхозорудию площадка  $\Pi$  имитирует свободное положение распылителя относительно поверхности, на которую наносится жидкость, а  $v$  являет собою новое ПР жидкости. Тот факт, что сейчас на ориентацию  $\Pi$  ограничений практически не накладывается говорит о том, что рассматривается общий случай.

Поток вектора  $\vec{B}$  через единицу поверхности площадки  $v$  можно определить так же в виде скалярного произведения, подобно (5.15):

$$f^*(x, y) = \vec{k}\vec{B}|_v, \quad (5.32)$$

где  $\vec{B}|_v = \vec{B}(x, y, z(x, y))$ , а  $z(x, y)$  определяется из уравнения (5.31) плоскости  $\Pi$ :

$$z(x, y) = \frac{p - x \cos \beta_x - y \cos \beta_y}{\cos \beta_z}. \quad (5.33)$$

Аналогично  $f(x, y)$  функция  $f^*(x, y)$  есть количество жидкости, которое попадает на единицу поверхности  $v$  за единицу времени в каждой точке последней. Областью определения  $f^*(x, y)$  являются  $(x, y) \in v$ .

Представим выражение (5.32) для  $f^*(x, y)$  в развернутом виде:

$$f^*(x, y) = (\cos \alpha_x \cos \beta_x + \cos \alpha_y \cos \beta_y + \cos \alpha_z \cos \beta_z) B(x, y, z(x, y)). \quad (5.34)$$

Далее, выполнив подстановку в уравнение  $f^*(x, y)$  (5.34) выражения для модуля  $B$  векторов поля  $\vec{B}$  из (5.29) и направляющих косинусов из (5.14), а также понимая, что  $z = z(x, y)$  привязано к плоскости  $\Pi$  и задается уравнением (5.33), получим общее выражение для  $f^*(x, y)$  — распределения жидкости по ПР  $v$  на произвольной плоскости  $\Pi$ :

$$f^*(x, y) = \frac{p h^2}{z^3(x, y)} f\left(x \frac{h}{z(x, y)}, y \frac{h}{z(x, y)}\right). \quad (5.35)$$

Для дальнейшего анализа представленной в системе координат  $Oxyz$  функции  $f^*(x, y)$  выражение (5.35) неудобно, поскольку независимые координаты  $x, y$  не являются в полном смысле таковыми и должны удовлетворять уравнению (5.33) плоскости  $\Pi$ , участком которой является ПР  $v$ . Чтобы лишиться таких неудобств, воспользуемся новой левой ортогональной системой координат  $O^*x^*y^*z^*$ , базисный репер которой  $(O^*, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , точка  $O^*$  начала координат располагается на пересечении плоскости  $\Pi$  с осью  $Oz$  ( $x_{O^*} = 0; y_{O^*} = 0; z_{O^*} = p / \cos \beta_z$ ), а вектор нормаль  $\vec{k}$  одновременно является направляющим ортом оси  $O^*z^*$ . Следовательно, две другие оси  $O^*x^*$ ,  $O^*y^*$ , которым соответствуют орты  $\vec{i}, \vec{j}$ , располагаются на плоскости  $\Pi$ . В пределах плоскости  $\Pi$  ориентация пары векторов  $\vec{i} \perp \vec{j}$  может быть произвольной или диктоваться логикой анализа функции  $f^*(x, y)$ . Последняя теперь может быть представлена и в новых координатах  $f^*(x^*, y^*)$ .

Учитывая приведенное выше и сельскохозяйственный смысл решаемой задачи, зададимся произвольным направлением перемещения распылителя, совпадающим с  $\vec{j}$ . Плоскость  $\Pi$  можно рассматривать как, например, плоскость резания РО для ВВГ или удобрений. В таком случае вектор перемещения этого РО совпадает с его плоскостью резания. Поскольку орты  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  вместе образуют базисный репер новой системы координат  $O^*x^*y^*z^*$  и ориентация  $\vec{k}$  по отношению к старой системе координат  $Oxyz$  уже определена, то чтобы однозначно определить ориентацию осей новой системы  $O^*x^*y^*z^*$  условимся, что линия действия  $\vec{i}$  совпадает с линией пересечения плоскости  $\Pi$  и вертикальной плоскости  $Z$ , совмещенной с осью  $Oz$ . Уравнение последней:  $y - \operatorname{tg} \phi x = 0$ , где  $\phi$  — угол между положительным направлением оси  $Ox$  и плоскостью  $Z$ . Тогда направление  $\vec{i}$  задается прямой:

$$\begin{cases} -x \sin \phi + y \cos \phi = 0, \\ x \cos \beta_x + y \cos \beta_y + z \cos \beta_z - p = 0, \end{cases} \quad (5.36)$$

которая пересекается с осью  $Oz$  на высоте  $z = p / \cos \beta_z$ . Важно заметить, что знаки в уравнениях системы (5.36) однозначно определяют прямую или



обратную ориентацию  $\vec{i}$ . Важно также помнить, что репер  $(O, \vec{l}, \vec{m}, \vec{n})$  системы координат  $Oxyz$ , в которой определены уравнения плоскостей из системы (5.36), в соответствии с начальными условиями образует левую тройку векторов  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ , а не правую. С учетом всего сказанного, через направляющие косинусы  $\cos \gamma_x, \cos \gamma_y$  и  $\cos \gamma_z$  орта  $\vec{i}$ , уравнение прямой (5.36) может быть переписано в каноническом нормированном виде [305]:

$$\frac{x}{\cos \gamma_x} = \frac{y}{\cos \gamma_y} = \frac{z - p \cos^{-1} \beta_z}{\cos \gamma_z}, \quad (5.37)$$

а сами направляющие косинусы определены так:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_x &= t \cos \phi \cos \beta_z, \\ \cos \gamma_y &= t \sin \phi \cos \beta_z, \\ \cos \gamma_z &= -t (\cos \phi \cos \beta_x + \sin \phi \cos \beta_y), \end{aligned} \quad (5.38)$$

где

$$t = 1 / \sqrt{1 - (\sin \phi \cos \beta_x + \cos \phi \cos \beta_y)^2} \quad (5.39)$$

— нормирующий множитель. Его необходимость вытекает из того, что, несмотря на нормировку уравнений плоскостей из системы (5.36), в общем случае последние не являются взаимно перпендикулярными [305]. Все углы  $\phi, \beta_x, \beta_y$  и  $\beta_z$  правой части уравнений (5.38) и (5.39) известны. Следовательно, заключаем, что единичный вектор  $\vec{i}$  определен.

Теперь вычислим направляющие косинусы  $\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z$  третьего единичного вектора  $\vec{j}$ , перпендикулярного первым двум  $(\vec{k}, \vec{i})$  и образующего с ними базисный репер  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , новой ортогональной системы координат  $O^*x^*y^*z^*$ . Из определения векторного произведения следует [305]

$$[\vec{k} \vec{i}] = \vec{j}. \quad (5.40)$$

Порядок умножения векторов тут диктуется тем, что тройка  $\vec{i} \vec{j} \vec{k}$  должна быть левой (вытекает из определения системы координат  $O^*x^*y^*z^*$ ), также, как и тройка  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ . Орты  $\vec{i}, \vec{k}$  взаимно перпендикулярны, а значит в нормировке результирующего вектора  $[\vec{i} \vec{k}]$  нет необходимости [305]. Тогда направляющие косинусы вектора  $\vec{j}$  определяются так:

$$\begin{aligned} \cos \theta_x &= \cos \beta_y \cos \gamma_z - \cos \gamma_y \cos \beta_z, \\ \cos \theta_y &= \cos \beta_z \cos \gamma_x - \cos \gamma_z \cos \beta_x, \\ \cos \theta_z &= \cos \beta_x \cos \gamma_y - \cos \gamma_x \cos \beta_y. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Подстановка в последние выражения (5.41) значений для  $\cos \gamma_x, \cos \gamma_y$  и  $\cos \gamma_z$  из (5.38) дает:

$$\begin{aligned} \cos \theta_x &= t (\cos \phi \cos \beta_x \cos \beta_y - \sin \phi \sin^2 \beta_x), \\ \cos \theta_y &= -t (\sin \phi \cos \beta_x \cos \beta_y - \cos \phi \sin^2 \beta_y), \\ \cos \theta_z &= t \cos \beta_z (\sin \phi \cos \beta_x - \cos \phi \cos \beta_y). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Поскольку по отношению к старой системе координат  $Oxyz$  направляющие косинусы всех ортов базисного репера  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  новой ортогональной системы координат  $O^*x^*y^*z^*$  известны, а также известны координаты точки приложения нового базисного репера (точки  $O^*$ ), можно записать выражения связи старых и новых координат [307]:

$$\begin{aligned} x &= x^* \cos \gamma_x + y^* \cos \gamma_y + z^* \cos \gamma_z, \\ y &= x^* \cos \theta_x + y^* \cos \theta_y + z^* \cos \theta_z, \\ z &= x^* \cos \beta_x + y^* \cos \beta_y + z^* \cos \beta_z + p / \cos \beta_z. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Воспользовавшись выражениями (5.38) и (5.42), а также, учитывая то обстоятельство, что областью определения функции распределения  $f^*(x, y)$  является  $v \in \Pi$ , для которой  $z^* = 0$ , освобождаем уравнения преобразований координат (5.43) от неизвестных направляющих косинусов и получаем окончательные выражения для старых координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ , представленных в виде функций от новых координат  $x^*$ ,  $y^*$ :

$$\begin{aligned} x(x^*, y^*) &= t \cos \beta_z (x^* \cos \phi + y^* \sin \phi), \\ y(x^*, y^*) &= t [\cos \beta_x \cos \beta_y (x^* \cos \phi - y^* \sin \phi) + \\ &\quad y^* \cos \phi \sin^2 \beta_y - x^* \sin \phi \sin^2 \beta_x], \\ z(x^*, y^*) &= x^* \cos \beta_x + y^* \cos \beta_y + p / \cos \beta_z. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Теперь вернемся к функции  $f^*(x, y)$  — распределения жидкости по ПР  $v$  на плоскости  $\Pi$ . Имея в виду, что плоскость  $\Pi$  совпадает с координатной плоскостью  $x^*O^*y^*$ , а областью определения  $f^*(x, y)$  есть именно некоторая часть площадки  $v$  этой плоскости  $\Pi$ , где  $z^* = 0$ , выразим эту функцию (5.35) через координаты  $x^*$  и  $y^*$  в соответствии с выражениями: (5.44)

$$f^*(x^*, y^*) = \frac{p h^2}{z^3(x^*, y^*)} f\left(\frac{x(x^*, y^*)}{z(x^*, y^*)} h, \frac{y(x^*, y^*)}{z(x^*, y^*)} h\right). \quad (5.45)$$

Итак, функция  $f^*(x^*, y^*)$  распределения жидкости распылителем в пределах ПР  $v$  на произвольной плоскости  $\Pi$  получена. Из (5.45) следует, что распределение  $f^*(x^*, y^*)$  жидкости по обрабатываемой поверхности наклонно (возможно с поворотом) ориентированным распылителем, может быть определено теоретически по аналогичному двумерному распределению  $f(x, y)$ , снятому для того же распылителя в стандартных условиях при вертикальной его ориентации. Одномерного исходного распределения для этой цели недостаточно, даже если конечной целью является также одномерное распределение.

5.2.4. Методика пересчета нормированной характеристики распылителя [304]. По сути в дальнейшем остановимся на применении выражения (5.45). Область определения функции  $f^*(x^*, y^*)$ , как было сказано выше, укладывается в границы площадки  $v$ . Но поскольку она ( $v$ ) с запасом охватывает реальное ПР и вдоль контура площадки  $v$  гарантировано  $f^*(x^*, y^*) = 0$ , то ничто не мешает раздвинуть  $v$  до прямоугольника

$v = \{x^*, y^* : x_{min}^* \leq x^* \leq x_{max}^*; y_{min}^* \leq y^* \leq y_{max}^*\}$ , где граничные значения  $x_{min}^*$ ,  $y_{min}^*$  и  $x_{max}^*$ ,  $y_{max}^*$ , определяются как наименьшие и наибольшие значения координат  $x^*$  и  $y^*$  точек пересечения боковых ребер пирамиды  $\Omega$  с плоскостью  $\Pi$ . За пределами контура пресечения плоскости  $\Pi$  с пирамидой  $\Omega$ , вплоть до новых границ  $v = \{x^*, y^* : x_{min}^* \leq x^* \leq x_{max}^*; y_{min}^* \leq y^* \leq y_{max}^*\}$ , логично полагать, что  $f^*(x^*, y^*) = 0$ .

Запишем уравнение четырех боковых ребер пирамиды  $\Omega$ :

$$\frac{x}{a_k} = \frac{y}{b_l} = \frac{z}{h}, \quad (k, l = 1, 2), \quad (5.46)$$

где  $a_k$  и  $b_l$  ( $k, l = 1, 2$ ) — координаты угловых точек основания  $\omega$  (рис. 5.4) пирамиды  $\Omega$ . Координаты  $x_i$ ,  $y_i$  и  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$  — соответственно числу комбинаций  $k, l = 1, 2$ ) точек пересечения ребер (5.46) с плоскостью  $\Pi$  (5.31) получим, решив уравнения (5.46) и (5.31) как систему:

$$x_i = \frac{a_k p}{Q_{kl}}, \quad y_i = \frac{b_l p}{Q_{kl}}, \quad z_i = \frac{h p}{Q_{kl}}, \quad (i = 1, 2, 3, 4; \quad k, l = 1, 2), \quad (5.47)$$

где

$$Q_{kl} = a_k \cos \beta_x + b_l \cos \beta_y + h \cos \beta_z, \quad (k, l = 1, 2). \quad (5.48)$$

Далее старые координаты  $x_i$ ,  $y_i$  и  $z_i$  (5.47), воспользовавшись уравнениями (5.44), выразим через новые  $x_i^*$  и  $y_i^*$  ( $z_i^* = 0$ ):

$$\begin{cases} x_i^* \cos \phi + y_i^* \sin \phi = \frac{a_k p}{Q_{kl} t \cos \beta_z}, \\ x_i^* \cos \beta_x + y_i^* \cos \beta_y = p \left( \frac{h}{Q_{kl}} - \frac{1}{\cos \beta_z} \right), \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4; \quad k, l = 1, 2), \quad (5.49)$$

где  $t = \sqrt{1 - (\sin \phi \cos \beta_x + \cos \phi \cos \beta_y)^2}$ . Решим эти системы относительно  $x_i^*$ ,  $y_i^*$ , для чего обозначим определители:

$$\Delta = \cos \phi \cos \beta_y - \sin \phi \cos \beta_x, \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{x^*i} &= \frac{a_k p \cos \beta_y}{Q_{kl} t \cos \beta_z} - p \left( \frac{h}{Q_{kl}} - \frac{1}{\cos \beta_z} \right) \sin \phi, \\ \Delta_{y^*i} &= p \left( \frac{h}{Q_{kl}} - \frac{1}{\cos \beta_z} \right) \cos \phi - \frac{a_k p \cos \beta_x}{Q_{kl} t \cos \beta_z}. \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, 4; \quad k, l = 1, 2), \quad (5.51)$$

Решением (5.49) будет  $x_i^* = \Delta_{x^*i}/\Delta$ ,  $y_i^* = \Delta_{y^*i}/\Delta$ . Теперь из этих решений выберем минимальные и максимальные значения координат:

$$\begin{aligned} x_{min}^* &= \min \{x_i^*\}, & x_{max}^* &= \max \{x_i^*\}, \\ y_{min}^* &= \min \{y_i^*\}, & y_{max}^* &= \max \{y_i^*\}. \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.52)$$

И, наконец, заключаем, что, с учетом равенств (5.52), новые границы площадки  $v = \{x^*, y^* : x_{min}^* \leq x^* \leq x_{max}^*; y_{min}^* \leq y^* \leq y_{max}^*\}$  — определены. Далее с помощью сетки  $v_{k,l} = \{x_k, y_l : x_{min}^* = x_0 < x_1 < \dots < x_n =$

$x_{max}^*$ ;  $y_{min}^* = y_0 < y_1 < \dots < y_m = y_{max}^*$  } выполним разбиение площадки  $v$  на прямоугольные области, аналогично тому, как это выполнялось в отношении исходного ПР  $\omega$ , и, воспользовавшись выражением (5.45), рассчитаем значения функции  $f^*(x^*, y^*)$  в узловых точках:

$$f_{k,l}^* = f^*(x_k^*, y_l^*), \quad (k = 0, 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, m). \quad (5.53)$$

Дальше интерполируем функцию  $f^*(x^*, y^*)$  с помощью того же (5.7) бикубического сплайна

$$f^*(x^*, y^*) = \sum_{i,j=0}^3 a_{i,j}^{*k,l} (x^* - x_k^*)^i (y^* - y_l^*)^j, \quad (5.54)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, m),$$

где  $x^* \in [x_k^*, x_{k+1}^*]$ ,  $y^* \in [y_l^*, y_{l+1}^*]$ , а коэффициенты сплайна  $a_{i,j}^{*k,l}$  рассчитаны соответственно сетке  $v_{k,l} = \{x_k, y_l : x_{min}^* = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x_{max}^*; y_{min}^* = y_0 < y_1 < \dots < y_m = y_{max}^*\}$  и значениям функции  $f_{k,l}^*$  (5.53) в ее узлах.

С использованием последнего выражения построено (рис. 5.7) геометрическое представление функции  $f^*(x^*, y^*)$  распределения жидкости по ПР  $v$

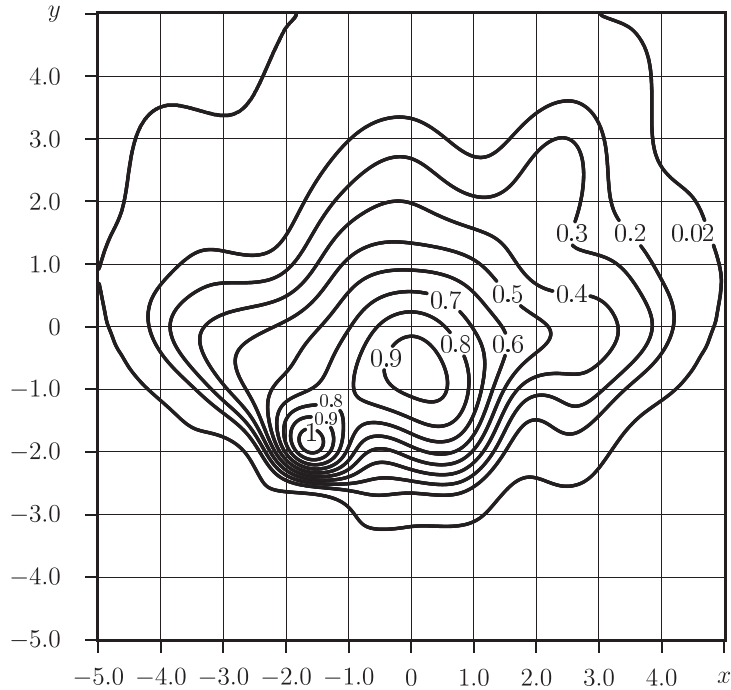


Рис. 5.7. Распределение жидкости по плоскости, если та повернута вокруг горизонтальной оси  $Ox$  на угол  $\pi/6.0$  ( $\beta_x = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\beta_y = \frac{1}{3}\pi$ ,  $\beta_z = \frac{1}{6}\pi$ ), а распылитель ориентирован вертикально вниз по направлению  $Oz$

если поверхность напыления  $\Pi$ , описываемая уравнением (5.31), ориентирована так:  $\beta_x = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\beta_y = \frac{1}{3}\pi$ ,  $\beta_z = \frac{1}{6}\pi$  и  $p = h\beta_z$ .

Проинтегрировав последнее выражение (5.54) по  $y^*$  получим функцию  $F^*(x^*)$  распределения жидкости по ширине полосы внесения, аналогичную  $F(x)$  (5.12), но относящуюся к поверхности напыления  $\Pi$ , ориентация которой может быть практически любой (5.31):

$$F^*(x^*) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{i,j=0}^3 a_{i,j}^{*k,l} (x^* - x_k^*)^i (y_{l+1}^* - y_l^*)^{j+1} \Big|_{x^* \in [x_{min}^*, x_{max}^*]}, \quad (5.55)$$

$(k = 0, 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, m).$

Графики функции  $F^*(x^*)$  распределения РЖ по ширине полосы внесения для трех вариантов ориентации распылителя показаны на рис. 5.8.

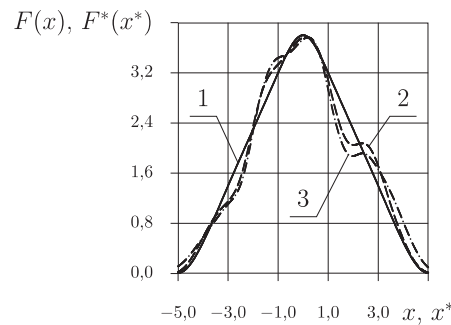


Рис. 5.8. Распределение жидкости по ширине захвата  $F(x)$  и  $F^*(x^*)$  для различных углов наклона поверхности напыления  $\Pi$  ( $\beta_x = \pi/2 = \text{const}$ ):  $F(x)$  (1) —  $\beta_y = \pi/2$ ,  $\beta_z = 0$ ;  $F^*(x^*)$  (2) —  $\beta_y = \pi/3$ ,  $\beta_z = \pi/6$ ;  $F^*(x^*)$  (3) —  $\beta_y = \pi/6$ ,  $\beta_z = \pi/3$

5.2.5. Анализ результатов моделирования [304]. Для иллюстрации предложенного алгоритма расчета функций  $f^*(x^*, y^*)$  и  $F^*(x^*)$  распределения жидкости распылителем по плоскости общего положения  $\Pi$  и вдоль одной из координатных осей (в данном случае  $O^*x^*$ ) использован распылитель, на двумерной характеристике которого (рис. 5.5) явно видно два дефекта, выражающиеся в наличии трех экстремумов вместо одного в центре ПР  $\omega$ . Но тем не менее, при использовании таких распылителей на штанговом орудии при вертикальной ориентации (в направлении оси  $Oz$ ) и расстоянии друг от друга, равном половине ширины захвата, они дают практически “идеальное” распределение (рис. 5.9). Если же такой распылитель ориентировать к плоскости напыления под углом (рис. 5.7), то распределение жидкости по поверхности будет совершенно иным. В данном случае ПР увеличилось в размерах, экстремумов стало два, причем безусловный максимум существенно сместился из центра влево. В случае одномерного

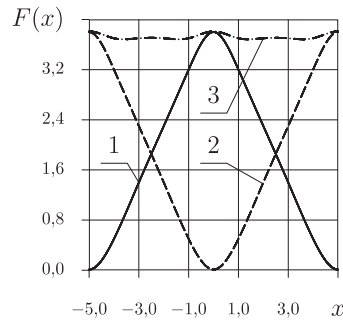


Рис. 5.9. Распределение жидкости по ширине захвата распылителями, установленными на штанге: 1 — распределение жидкости центральным распылителем; 2 — каждым из двух соседних; 3 — суммарное распределение

распределения (рис. 5.8) ситуация такая же. Чем сильнее наклон распылителя, тем существеннее искажается одномерное распределение. В отношении рассматриваемого распылителя можно сказать, что для использования на штанговом орудии он применим без всяких скидок, в то время, как вряд ли целесообразно его использование с установкой под углом, как то бывает, например, в РО для ленточного ВВГ [297, 300–303].

## ВЫВОДЫ

1. Если рабочий орган для внутрипочвенного внесения жидких средств химической защиты растений построен на основе стрелчатой лапы, то достигнуть программируемого распределения рабочей жидкости под слоем почвы можно только при наклонной по отношению к дну борозды (плоскости резания) ориентации распылителя.

2. Конструктивные параметры рабочего органа, глубина обработки и рабочая скорость взаимосвязаны между собой. Всегда есть минимальный предел скорости движения рабочего органа, при которой уже не гарантируется программируемое распределение препарата под слоем почвы. Если плоскорежущий стрелчатый рабочий орган имеет ширину захвата 270 мм, максимальную высоту сводаобразующей части 17 мм, угол раствора лемехов у режущей кромки  $65^\circ$ , угол крошения лемехов, изменяющийся от  $23^\circ$  (у режущей кромки) до  $10^\circ$  (у верхнего обреза лемехов), то для внесения рабочей жидкости на глубину 5–8 см минимальная рабочая скорость должна составлять 1,8–2,38 м/с.

3. Применение распылителей в технических средствах для внутрипочвенного внесения жидких средств защиты растений предполагает более жесткие требования на их характеристики, определяющие закономерности распределения жидкости в пределах пятна напыления. Наименее требовательными в этом смысле являются штанговые опрыскиватели, предполагающие вертикальную ориентацию установленных с перекрытием ширины захвата гидравлических распылителей.

4. Двумерной нормированной характеристикой распылителя следует называть полученное экспериментальным путем распределение рабочей жидкости по обрабатываемой поверхности для случая, когда сопло распылителя ориентировано вертикально вниз и удалено от поверхности напыления на расстояние, которое выбирается из соображений согласования размеров пятна распыла и поверхности напыления стенда, а также степени диспергирования жидкости.

5. Для аналитического представления двумерной нормированной характеристики распылителя рационально применять сплайн-интерполяцию, в частности, бикубическим сплайном.

6. Наличие двумерной нормированной характеристики распылителя дает возможность рассчитать все параметры распределения жидкости по обрабатываемой поверхности в случае его произвольной ориентации.

ГЛАВА 6  
РАЗРАБОТКА ТЕХНОЛОГИЙ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ  
ДЛЯ ВНЕСЕНИЯ ЖИДКИХ УДОБРЕНИЙ  
И ХИМЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ

6.1. Разработка комбинированных рабочих органов  
для почвообработки и внесения жидких удобрений  
и/или иных средств химзащиты растений

6.1.1. Рабочие органы для открытого ленточного внесения жидких гербицидов. Разработке авторских конструкций технических средств для ленточного внесения гербицидов предшествовал ряд испытаний. Проходили они в 1984 году на полях совхоза Кременчугский (с. Омельник, Кременчугский р-н, Полтавская обл.). Тогда исследовалась возможность использования элементов технологии и технических средств из комплекса машин для возделывания овощных культур на орошаемых землях по астраханскому методу [37, 39] применительно к возделыванию кукурузы и подсолнечника на богарных землях в условиях безотвальной системы земледелия. Ключевым моментом являлось внесение гербицидов ленточным способом, что предполагало использование бороздорезов и загортачей (рис. 6.1,А и 6.1,С) конструкции ВНИИОБ (г. Камызяк).

Бороздорез сконструирован на основе культиваторной стрелчатой лапы С-5.3 ГОСТ-1343-82 шириной захвата 270 мм, вдоль крыльев которой сверху на расстоянии 20...25 мм от режущей кромки установлены сваренные между собой вертикальные пластины [37]. Левый и правый загортачи также представляли собой расположенные под углом к направлению движения вертикальные металлические щитки, установленные один на левую, другой на правую односторонние лапы-бритвы шириной захвата 16 см [37].

Проведенные испытания позволили убедиться в высокой эффективности астраханской технологии в целом, а также определить некоторые недостатки технических средств ВНИИОБ, которые препятствуют распространению метода на пропашные культуры, возделываемые при неорошаемом земледелии и безотвальной системе обработки почвы.

Прежде всего была отмечена низкая производительность комбинированного агрегата для внесения гербицидов, состоящего из трактора Т-70, подкормщика-опрыскивателя ПОМ-630 и культиватора КРН-4,2 с шестью рабочими секциями, дополнительно оборудованного двумя щелевателями-направителями (ЩН) и двумя маркерами. РЖ тогда готовили машиной "Пемикс-1002" и простоев из-за несвоевременного приготовления рабочего раствора не было. Даже выработка 8 га за смену была достигнута только после замены бороздорезов конструкции ВНИИОБ на авторские РО, имеющие более плавные обводы и меньшую ширину захвата, которая составила 18 см (рис. 6.1,В). Такой ширины захвата оказалось достаточно. Позже этот вывод использовался при разработке других конструкций РО. В силу перечисленных факторов, новые бороздорезы имели повышенную рабочую скорость при той же интенсивности разбрасывания почвы в стороны.



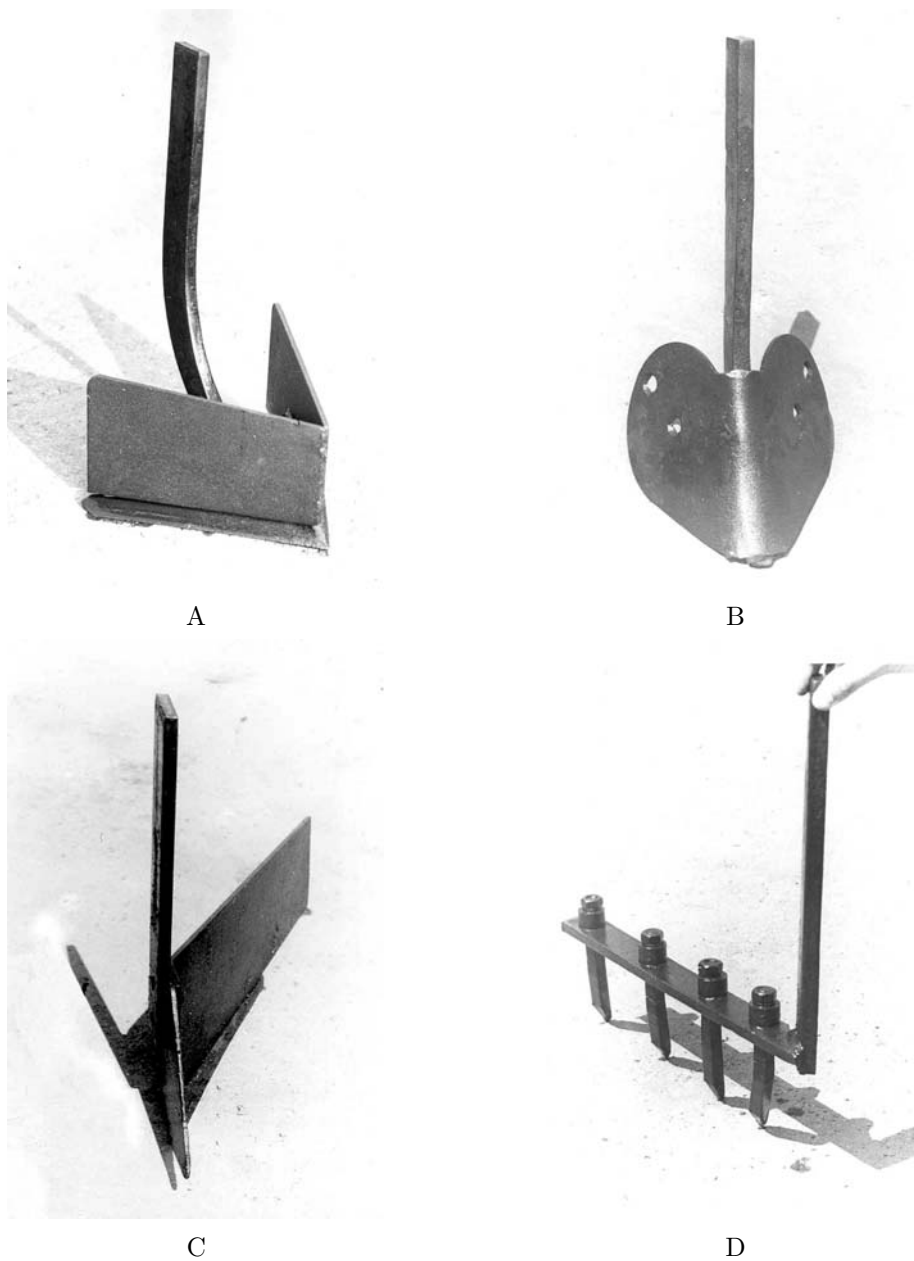


Рис. 6.1. Рабочие органы для открытого ленточного внесения жидких гербицидов: А и С — бороздорез и загортач конструкции ВНИИОБ (г. Камызяк); В и D — предлагаемые бороздорез и загортач (промежуточный вариант)

Тем не менее, загортачи конструкции ВНИИОБ, по-прежнему, плохо выполняли свои функции. В процессе их работы вдоль оси рядка образовывался почвенный валик, представляющий собой смесь комков и растительных остатков, что в последующем сильно снижало качество посева и способствовало потерям влаги. Производительность комбинированного агрегата оставалась низкой. Недостаточная прочность ЩН конструкции ВНИИОБ ограничивала рабочую скорость движения при использовании более мощных тракторов, например, ДТ-75М.

Существенно (до 11,5 га или на 40...43%) повысить сменную выработку агрегатов для внесения гербицидов удалось в 1985 году, когда нарезку направляющих щелей выделили в отдельную операцию, используя для этой цели трактор ДТ-75М с культиватором-плоскорезом-глубококорыхлителем КПП-250, заменив плоскорезы РО ножами-щелерезами, установленными на расстоянии 140 см друг от друга, и дополнительно оборудовав его двумя гидрофицированными маркерами.

Кроме этого, вместо предложенных ВНИИОБ загортачей использовали загортачи (рис. 6.1, D, 6.2) представляющие собой металлическую стойку 1, сваренную в одно целое с расположенной под углом  $30^\circ$  к направлению движения горизонтальной планкой 2, в отверстиях которой гайками 3 за-

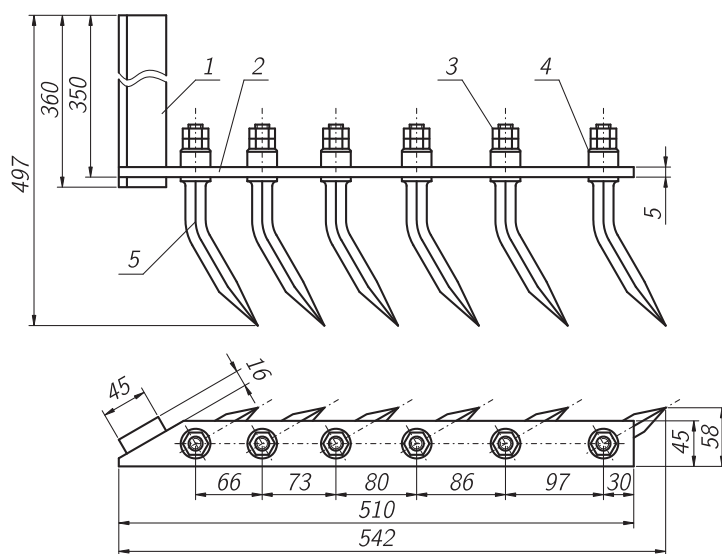


Рис. 6.2. Предлагаемый зубчатый загортач (окончательный вариант):  
1 — стойка; 2 — планка горизонтальная; 3 — гайка; 4 — шайба; 5 — зуб

креплены в первом варианте четыре (рис. 6.1, D), а в конечном итоге семь (рис. 6.2), изогнутых в вертикальной плоскости назад по ходу движения, зубьев 4 зубовой борона БЗС-1, скошенная поверхность острия которых обращена вперед. Расстояние между двумя зубьями увеличивается по за-

кону геометрической прогрессии со знаменателем 1,1 от 60 до 97 мм, по мере удаления их от стойки. Размещают загортачи по обе стороны гряды культиваторной секции на расстоянии 250 мм, причем один из них закрепляют на 150–180 мм впереди другого. Такая конструкция загортачей позволяет получить равномерный почвенный фон по всей ширине захвата секции, исключить забивание их растительными остатками, а также не требует дополнительной установки ротационного РО, чем способствует сохранению почвенной влаги и уменьшению тягового сопротивления. В последующие несколько лет предлагаемые зубчатые загортачи выпускались серийно Кременчугским колесным заводом (КрКЗ, г. Кременчуг) [308].

Для уменьшения потерь влаги из щелей за ЩН на всех операциях использовали шлейфы. При движении они закрывают щель рыхлой почвой, хотя полностью, на всю глубину ее, не засыпают. На качестве вождения агрегатов при проведении последующих операций это не сказывается, но требует более точного вождения в момент заезда на рядки.

Уменьшение ширины обрабатываемых полос позволило снизить расход гербицидов по сравнению со сплошным внесением на 74%. Но возделывание по такой технологии кукурузы и подсолнечника на площади 210 га (совхоз Кременчугский, 1984 и 1985 г.г.) показало, что открытое внесение гербицидов, предполагающее образование борозд и последующую их заделку, способствует потерям влаги из почвы [309], что негативно сказывается на дружности всходов и урожайности. В связи с этим, предложенные конструкции бороздореза (рис. 6.1,В) и загортача (рис. 6.2) было решено рекомендовать к использованию или в условиях орошаемого земледелия, или на богарных землях в зонах достаточного увлажнения. Для иных условий был разработан ряд конструкций РО, предназначенных для ВВГ с минимальным перемешиванием почвы.

6.1.2. Цельносварной стрельчатый рабочий орган для внутрпочвенного внесения гербицидов. Предлагаемая конструкция РО (рис. 6.3) состоит из правого и левого лемехов 1, вертикальной стойки 2, стойки-ребра 3, выполняющих функции ребер жесткости, накладок 4 и сводообразующей части 5, под которой расположен щелевой распылитель 6 (рис. 6.4). Рабочая жидкость к нему подается по каналу 7 через индивидуальный фильтр-клапан-отсекатель 8 (рис. 6.5) [310]. Собственно стрельчатая лапа образуется соединенными посредством стойки-ребра двумя лемехами и расположенной между ними сводообразующей частью. При этом стойка-ребро имеет тупой угол погружения в почву.

При его создании был поставлен ряд задач: 1) обеспечить надлежащее качество распределения препарата под слоем почвы; 2) минимизировать возможную глубину внесения препарата; 3) с целью уменьшения потерь влаги из почвы по возможности уменьшить степень ее перемешивания; 4) минимизировать переходные процессы заглубления и выглубления РО, а также выхода его на номинальный режим распыла жидкости; 5) повысить рабочие скорости движения; 6) снизить расход РЖ; 7) обеспечить

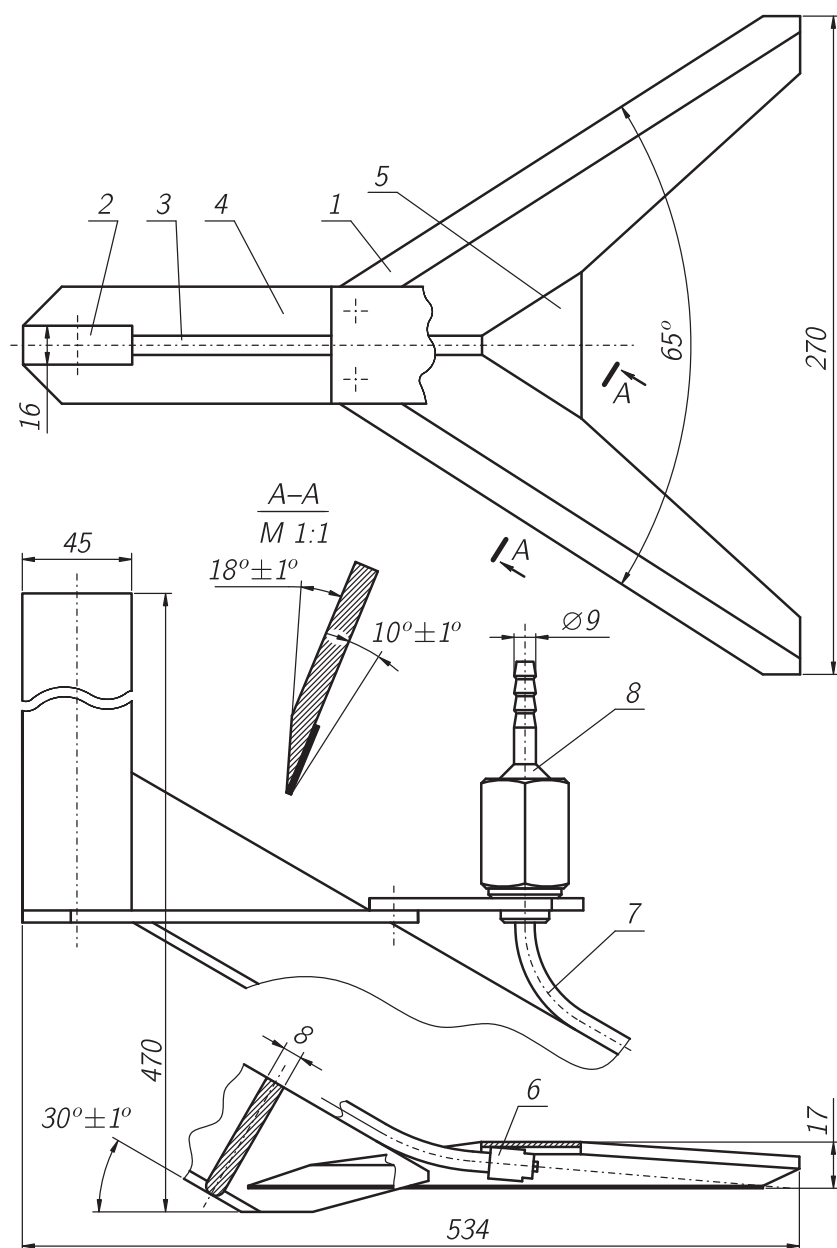
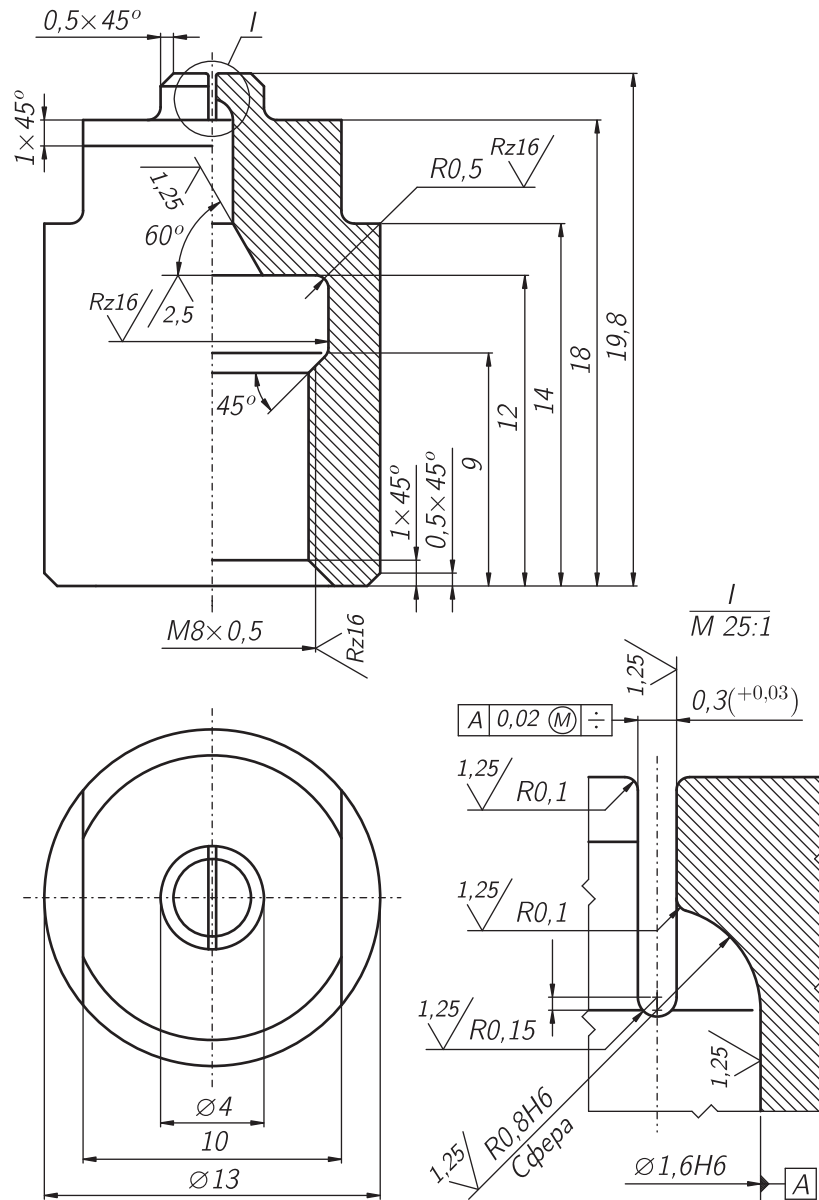


Рис. 6.3. Разработанный рабочий орган для внутрипочвенного внесения гербицидов: 1 — лемех стрельчатой лапы; 2 — стойка; 3 — стойка-ребро; 4 — накладка; 5 — сводообразующая часть; 6 — распылитель щелевой; 7 — трубопровод; 8 — фильтр-клапан-отсекатель



- Неуказанные:
- шероховатости поверхностей — Rz20;
  - предельные отклонения размеров — H12, h12,  $\pm \frac{IT12}{2}$ ;
  - технологические радиусы — 0,5мм.

Рис. 6.4. Разработанный целевой распылитель

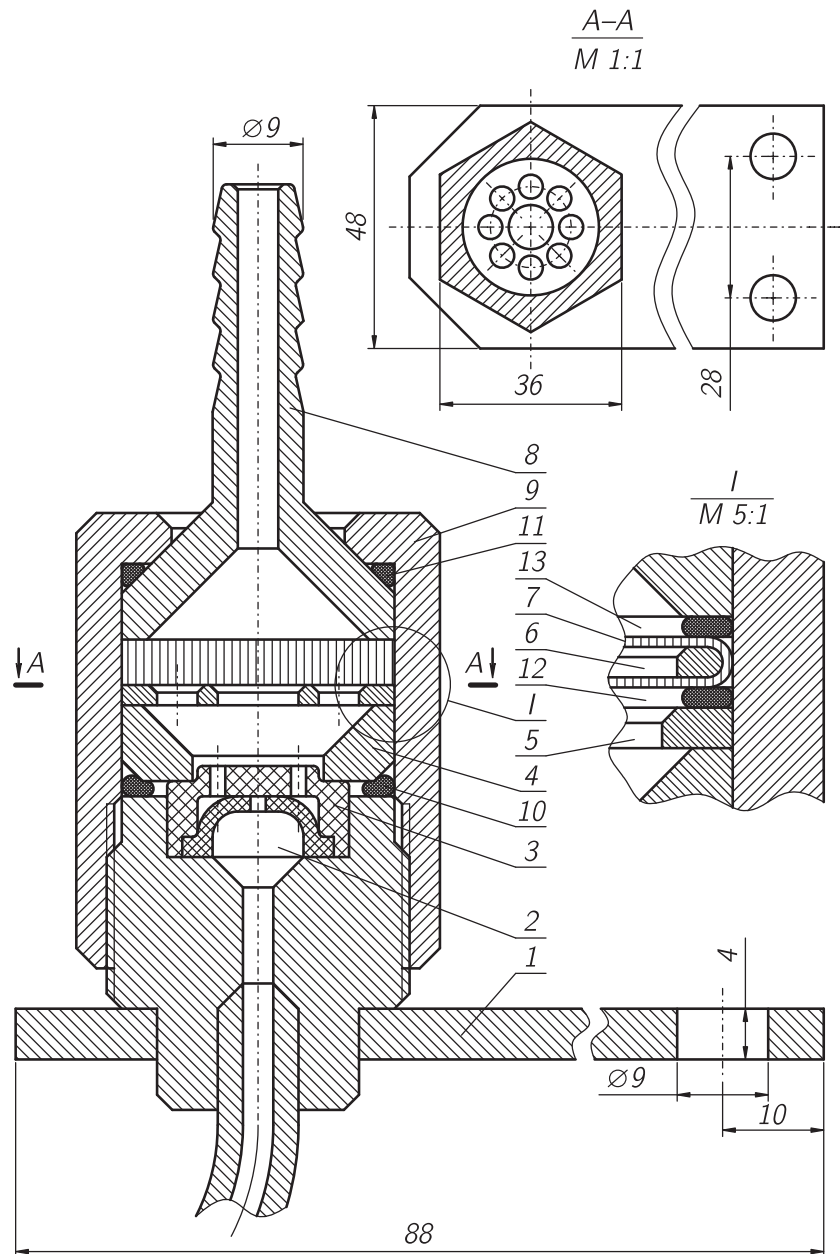


Рис. 6.5. Разработанный фильтр: 1 — корпус; 2 — клапан-отсекатель; 3 — седло клапана; 4 — втулка; 5 — шайба поддерживающая; 5 — кольцо; 7 — ткань фильтровальная; 8 — нипель; 9 — гайка накидная; 10, II, 12, 13 — кольца уплотнительные резиновые

способность РО к самоочистке от стеблей сорняков и растительных остатков, достаточную для его применения в условиях безотвальной системы земледелия; 8) обеспечить высокие эргономические показатели по его обслуживанию и использованию; 9) максимально удешевить конструкцию;

Основной вклад в решение первой задачи вносит наклонная ориентация распылителя по отношению к дну борозды [297, 311]. В данном случае угол между ФР и плоскостью резания РО составляет  $5,5^\circ$  и ФР встречается с дном борозды в пределах заднего габарита лемехов РО. Преимущества наклонной ориентации распылителя описаны выше.

Вторая и третья задачи были решены главным образом за счет использования в конструкции РО стрелчатой лапы высотой 17 мм с углом крошения в области заточки  $28^\circ$  и  $10^\circ$  в остальной части лемехов, что в 2,8 раза меньше, чем у серийной лапы С-5.3 ГОСТ-1343-82 с такой же шириной захвата в 270 мм. Это стало возможным за счет применения целевого распылителя с внешним диаметром 13 мм.

Решению первых трех и, особенно, четвертой задачи способствовало применение сводообразующей части с минимальной площадью, что прямо противоположно известной конструкции [312]. Дело в том, что в процессе использования РО, подачу РЖ необходимо включать до начала их погружения в почву, что связано с необходимостью визуального контроля за работоспособностью распылителей. В этой связи в процессе последующего погружения РО в почву ФР РЖ перебивается последней. В результате нижние поверхности лемехов и сводообразующей части лапы смачиваются и на них налипают почва. Если расход рабочей жидкости значительный (больше 1 л/мин), то это обстоятельство проблемы не составляет, поскольку налившая почва смывается РЖ и таким образом достигается быстрый выход РО на требуемый режим работы. При малых расходах РЖ процесс смыва налившей почвы может быть длительным, что допускать нельзя. По этой причине проблема была решена путем исключения большинства поверхностей, на которые может налипать почва, т.е. путем минимизации площади лемехов и особенно, сводообразующей части.

В конечном итоге вышеречисленные конструктивные особенности позволили уменьшить минимальную глубину внесения гербицида, при сохранении надлежащей его заделки, до 4 см и обеспечили работоспособность РО при расходах РЖ меньше 1 л/мин.

Малая площадь и высота профиля стрелчатой лапы РО способствовали снижению его тягового сопротивления, уменьшению дальности разброса почвы и, таким образом, положительно сказались на рабочей скорости.

Более сложным является решение задачи обеспечения самоочистки РО от растительных остатков и сорняков, что, в первую очередь, связано с конструкцией стойки. В этой связи применительно к последней анализировалось несколько дополнительных вопросов: а) вынос нижних влажных слоев почвы наружу; б) бороздообразование; в) компоновочные свойства стойки; г) способность к самозаглублению и устойчивость хода по глубине. Теоретические аспекты выбора конструкции стойки рассматривались в ра-

ботах [313,314], а практические — в работе [315], где предлагается криволинейная выпуклая конструкция стойки. Тем не менее, по совокупности перечисленных выше факторов, в конечном итоге предпочтение было отдано прямолинейной, наклонной вперед по ходу движения, стойке. Угол наклона ее лобовой поверхности (угол погружения в почву) составил  $30^\circ$ , что несколько превышает угол трения почвы о металл. Так исключается движение почвы как вниз по лобовой поверхности стойки, так и вверх.

Тем не менее, решить задачу самоочистки только за счет конструктивных факторов РО не удалось. Предлагаемая конструкция комбинированного РО предусматривает дополнительное использование культиваторной лапы рыхлительного типа С-8.3 ГОСТ-1343-82.

Рыхлительную лапу устанавливали на грядиле культиваторной секции впереди РО для ВВГ на ту же глубину и на значительном расстоянии друг от друга (сколько позволяет длина грядила). Идущий впереди рыхлительный РО, будучи установлен соосно с задним комбинированным РО, первым встречается со стеблями сорняков и растительных остатков культурных растений, “вылавливая” их. Часть таких стеблей сходит с рыхлительной лапы, но, будучи ориентированными параллельно направлению движения агрегата, не задевают стойку комбинированного РО и проходят мимо нее. Часть сорняков заводится на рыхлительной лапе и, накапливаясь, образует ком. Периодически такой ком сваливается и иногда, как правило, лишь боковой частью попадает под стойку идущего сзади комбинированного РО, что приводит к непродолжительному нарушению технологического процесса. В такой ситуации идущий сзади комбинированный РО, благодаря закрепленной спереди и имеющей тупой угол погружения в почву стойки, частично выглубляется, двигаясь через ком сорных растений, подминая его под себя или отталкивая в сторону, и снова заглубляется после этого. Частота таких циклов самоочистки зависит от количества сорных включений в обрабатываемом почвенном горизонте, но практический эксперимент (на площади более 100 га в колхозе Украина Кременчугского района Полтавской области) показал, что даже в условиях системы безотвального земледелия такой способ самоочистки вполне приемлем. В противном случае, при работе без рыхлительного РО, комбинированную стрельчатую лапу сорняки обволакивали уже на первых сотнях метров пути, после чего полностью нарушался характер движения почвы через ее крылья и, как следствие, гербицид попадал в почву неравномерно, с пропусками в десятки метров. Для восстановления работоспособности агрегата его приходилось останавливать и производить очистку вручную.

С позиций самоочистки принципиально важной является конструкция места сопряжения стойки-ребра с лемехами стрельчатой лапы. В предлагаемой конструкции стойка выступает вперед и вниз за пределы лемехов. Это способствует перерезанию стеблей, которые обогнули стойку-ребро и соскользнули по ней вниз к лемехам. Благодаря этой конструктивной особенности, такие стебли лишаются опоры в окрестностях лобовой поверхности стойки, проваливаются вниз под лемехи и дальше, увлекаясь почвой,



перезапускаются на их режущих кромках. Угол раствора режущих кромок  $65^\circ$  остался равным стандартному (Лапы С-5.3 ГОСТ-1343-82). Многолетний положительный опыт применения таких лап не дает оснований для пересмотра этого параметра.

Для повышения надежности технологического процесса, а также эргономичности обслуживания и применения предлагаемый РО оснащен индивидуальным фильтром (рис. 6.5) для очистки РЖ, подводимой к распылителю. Агрегат для ВВГ, как правило, имеет меньшую рабочую скорость движения (5–9 км/ч), чем орудие для поверхностного опрыскивания почвы штангового типа (6–12 км/ч), а поэтому, при прочих равных условиях, кроме концентрации рабочего раствора, расходует больше РЖ, чем последнее. С целью снижения нормы расхода РЖ необходимо использовать распылители с малым сечением проточной части, а, следовательно, с большей способностью к засорению. В предлагаемой конструкции ширина щели щелевого распылителя составляет 0,3 мм, а расход жидкости при рабочем давлении 0,2 МПа — 0,8 л/мин (рис. 6.4).

Фильтр (рис. 6.5) выполнен заодно с клапаном-отсекателем и представляет собой корпус 1, в цилиндрической расточке которого установлены ранее выпускаемые промышленностью, позаимствованные от серийной машины ПОМ-630, резиновый сферический клапан-отсекатель 2 с седлом 3 клапана. Закреплены клапан 2, седло 3, втулка 4, поддерживающая шайба 5, фильтрующий элемент, состоящий из стального кольца 6 обшитого фильтровальной тканью 7, и ниппель 8 с накидной гайкой 9. В качестве уплотнения в конструкции использованы стандартные (ГОСТ 9833-73) резиновые кольца 10 и 11. Такие же кольца 12 и 13 установлены с обеих сторон фильтрующего элемента 6, 7. Эти кольца предотвращают разрушение фильтровальной ткани 7 при чрезмерной затяжке накидной гайки 9. Разрушению фильтровальной ткани 7 при сильном ее засорении препятствует также поддерживающая шайба 5.

В процессе работы жидкость через ниппель 8 и фильтровальную ткань 7 проникает к седлу 3 клапана и далее через отверстия в основании последнего к клапану 2. Клапан 2 под действием избыточного давления прогибается, освобождая тем самым путь жидкости к распылителю. В случае снятия давления клапан 2 быстро перекрывает ток жидкости, предупреждая бесконтрольное подтекание ее.

Представляет также интерес общая компоновочная схема разработанного РО, обеспечивающая максимальную близость фильтра и клапана-отсекателя к распылителю и одновременно не налагающая серьезных ограничений на габариты и конструкцию упомянутых деталей.

При изготовлении РО в приспособленных условиях в качестве материала для фильтрующего элемента удобнее всего использовать сложенную вчетверо капроновую чулочную ткань, для деталей соприкасающихся в процессе работы с РЖ — коррозионностойкую сталь. В условиях серийного производства соприкасающиеся с РЖ детали лучше изготавливать из полимеров. Следует учитывать, что рабочая площадь фильтрующего элемента,

обеспечивающая надежную работу устройства в хозяйственных условиях в течение светового дня, составляет не менее  $1,5 \text{ см}^2$ . При этом учитывается, что в гидравлической схеме, применявшейся серийной базовой машины (например, ПОМ-630), уже имеется двустадийная, в каналах всасывания и нагнетания, очистка всей РЖ, подводимой к РО. Конструктивно весь узел фильтра с клапаном-отсакателем в целом и сам клапан-отсекатель, в частности, могут быть выполнены без ущерба для качества конструкции со значительными отступлениями от предлагаемого варианта.

В предлагаемой конструкции РО используется щелевой распылитель (рис. 6.4) практически идентичный серийным, но имеющий шлиц прямоугольной формы. Его гидравлические параметры можно рассчитать в соответствии с методикой [316, 317]. Такой распылитель также не дает прямоугольной характеристики распределения жидкости по ширине захвата, но имеет менее ярко выраженный максимум расхода жидкости в центре обрабатываемой полосы. Распылитель с позиции изготовления — пожалуй самая сложная деталь из всех тут рассмотренных. Для мелкосерийного изготовления металлических распылителей лучше использовать электроэрозионное оборудование [318], но надлежащее их качество можно получить только в условиях массового производства. Материал распылителей должен быть износостойким (из расчета на возможность внесения суспензий) и коррозионностойким, как, например, керамика.

Дешевизна предлагаемого РО связана с применением плоских лемехов, цельносварной конструкцией и резьбового крепления распылителя.

6.1.3. Рабочий орган с криволинейными лемехами и разборной стойкой. Описанный выше РО [310, 315, 319] имел хорошие технологические качества, а поэтому в дальнейших исследованиях его общая компоновка была сохранена и отрабатывались лишь отдельные, требующие совершенствования детали. В частности, подвергалась изменениям сама стрельчатая лапа. В целом она по-прежнему представляла собой конструкцию, подобную стандартной, т.е. лапе С-5.3 ГОСТ-1343-82. Так, угол раствора лапы  $65^\circ$  и ширина захвата ее — 270 мм были всегда неизменными и соответствовали стандарту [126]. Изменениям подвергали конструкцию лемехов лапы, а также угол их установки, т.е. угол крошения.

Поскольку испытанный ранее [319] вариант конструкции лапы с углом крошения  $\beta$  лемехов 1 (рис. 6.6,А) равным  $10^\circ$ , верхней заточкой и нижней наплавкой 2 показал неплохие технологические качества, то и в этот раз он стал отправным. Далее требовалось устранить изменение высоты стрельчатой лапы вследствие износа ее режущих кромок.

Ранее такие попытки уже предпринимались. Был разработан вариант стрельчатой лапы [319] с углом крошения лемехов 1 (рис. 6.6,В)  $\beta = 20^\circ$ , с нижней наплавкой 2 и нижней заточкой. Значительное увеличение (в два раза) угла крошения  $\beta$  лемехов 1 лапы не являлось тогда самоцелью, а вытекало из других конструктивных особенностей. Так, горизонтальная ориентация наплавленного слоя 2 обеспечивает значительный ресурс лапы, в

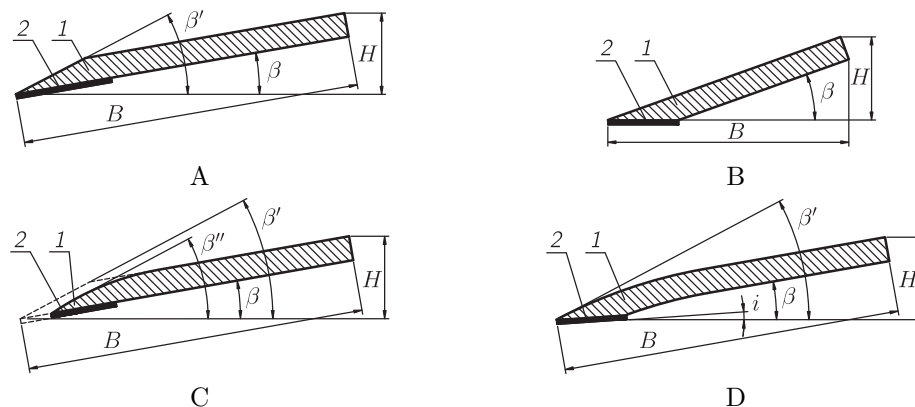


Рис. 6.6. Нормальное сечение лемехов рабочих органов для внутрипочвенного ленточного внесения жидких гербицидов: А — плоский лемех с верхней заточкой и нижней наплавкой; В — плоский лемех с нижней заточкой и наплавкой; С — схема износа первого (А) варианта лемеха; D — гнутый лемех, с нижней заточкой и наплавкой; 1 — лемех; 2 — наплавленный слой

течении которого высота ее  $H$  практически не изменяется. Очевидно, что при таком исполнении лемехов 1 изменение их высоты  $H$  возможно только после полного износа наплавленного слоя 2. В первом же варианте изменение высоты  $H$  лапы происходит сразу же, даже при незначительном износе наплавленного слоя 2 и ее лемехов 1. Сама же высота  $H$  в обоих вариантах сохранялась минимально возможной и выбиралась из условия достаточности для размещения распылителя.

Понятно, что увеличение угла крошения лемехов 1 стрелчатой лапы, при прочих равных обстоятельствах, неизбежно приводит к увеличению розвальняющей борозды, а, следовательно, к увеличению минимальной глубины обработки и к ухудшению качества заделки вносимого ею препарата. Уменьшить угол крошения возможно и без изменения высоты  $H$ , но в этом случае неизбежно увеличение ширины лемехов  $B$ , что в конечном итоге, при прочих равных обстоятельствах, опять приводит к тому же результату. Выбранный угол крошения  $\beta = 20^\circ$  и ширина  $B$  лемехов 1 лапы, равная 51 мм, явили собою компромисс из проанализированных вариантов.

Проведенные опыты показали, что в сравнении с первым, второй вариант конструкции имеет значительно более низкие технологические качества, хотя ресурс лапы действительно вырос.

Возвращаясь к анализу первого варианта конструкции лемехов лапы (рис. 6.6,А) видим, что, фактически, при таком исполнении лемехи имеют переменный угол крошения. У режущей кромки этот угол  $\beta'$  равен  $28-30^\circ$ , а в целом для всего лемеха —  $\beta = 10^\circ$ . В процессе работы все взаимодействующие с почвой грани лемехов, подвергаясь абразивному износу, скругляются (рис. 6.6,С), а измеренный по внешней поверхности лемехов угол

крошения, становится непрерывнопеременным, уменьшающимся с  $\beta''$ , равного  $\beta'$  и  $28-30^\circ$ , до  $\beta$ , равного  $10^\circ$ . Именно эти соображения и натолкнули на мысль о создании второго “компромисного” варианта (рис. 6.6,B), но, как уже было сказано ранее, ожидания не оправдались.

Последним, третьим вариантом конструкции стрелчатой лапы стал вариант с гнутыми поверхностями лемехов 1 (рис. 6.6,D). В этом случае, действительно, достигался симбиоз двух предыдущих вариантов. Как и в первом варианте, угол крошения тут также изменялся с начального  $\beta'$ , равного  $23^\circ$ , до конечного  $\beta$ , равного  $10^\circ$ . Параметры  $B$  и  $H$  в точности соответствуют первому варианту, а наплавленный износостойкий слой 2 ориентирован практически горизонтально. Наличие небольшого угла  $i$  величиной в  $2-4^\circ$ , согласно известному опыту [133], способствует улучшению заглубляемости РО и стабильности его хода по глубине.

Изложенные выше изыскания в отношении лемехов стрелчатой лапы, а также ряд других нововведений реализованы в конструкции РО с разборной стойкой (рис. 6.7) [297]. Теперь стрелчатая лапа 1 изготовлена заодно с наклонной частью стойки и крепится к верхней вертикальной части стойки 2 с помощью четырех болтов, два из которых заодно крепят и фильтра-клапан-отсекатель 3. Щелевой распылитель 4, как прежде, располагается в кинематической тени лапы под ее сводообразующей частью, но крепится с помощью пары винтов, а жидкость к нему подается по трубопроводу 5 через безрезьбовое соединение. Поскольку верхняя часть стойки 2 теперь выполнена отъемной, то в случае износа лемехов лапы 1, стойка 2 замене не подлежит. Сами лемехи стрелчатой лапы 1 выполнены выпуклыми наружу. Почти горизонтальная ориентация упрочненного слоя режущих частей лемехов позволяет сохранять неизменной высоту свода стрелчатой лапы 1 на протяжении практически всего ресурсного срока.

Изменения коснулись и индивидуального фильтра-клапана-отсекателя (рис. 6.8) [297]. Новый вариант отличается повышенной компактностью и удобством обслуживания. Корпус его 1, накидная гайка 2 и ниппель 3 принципиальных изменений не претерпели. Фильтрующий элемент, состоящий из обтянутого фильтровальной тканью 4 кольца 5, теперь приобрел резиновый кант 6, выполненный из отрезка тонкостенного шланга. Такое нововведение позволило исключить из конструкции два резиновых кольца и упростить сборку всего узла в целом. Клапан-отсекатель 7 представляет собой серийную манжету 1-12-24-4 ГОСТ 8752 -70. В работе такой клапан более надежен и в меньшей степени дросселирует жидкостный поток. Пружина манжеты 7 в данном случае не применяется. Седло клапана 8 теперь выполнено заодно с поддерживающей шайбой.

Распылитель 1 (рис. 6.9) [297], с точки зрения проточной части, остался идентичным. Изменения коснулись способа сопряжения распылителя 1 с трубчатым каналом 2 и способа крепления его к сводообразующей части лапы. Соединение между каналом 2 и распылителем 1 выполнено безрезьбовым, посредством втулки 3. Герметичность соединения достигается за счет применения уплотнения в виде резинового кольца 4.

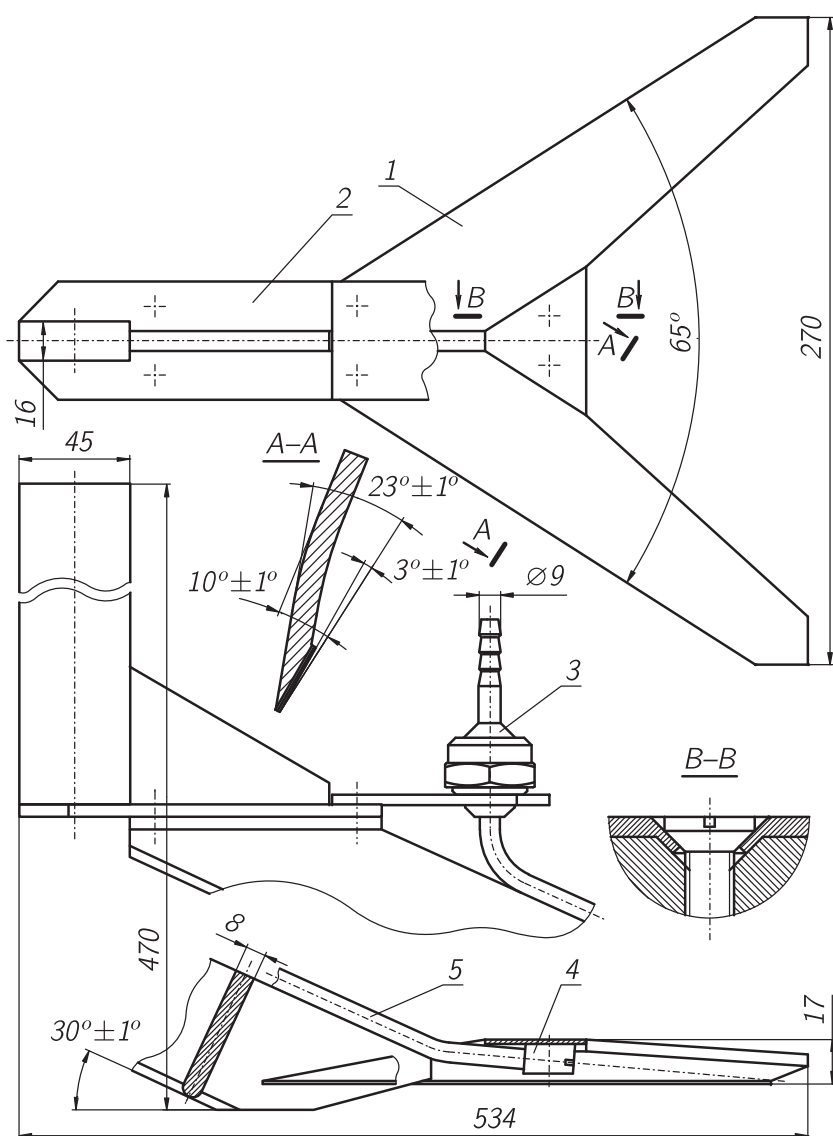


Рис. 6.7. Разработанный рабочий орган для внутривнепочвенного внесения гербицидов: 1 – стреляющая лапа; 2 – стойка; 3 – фильтр-клапан-отсекатель; 4 – распылитель щелевой; 5 – трубопровод

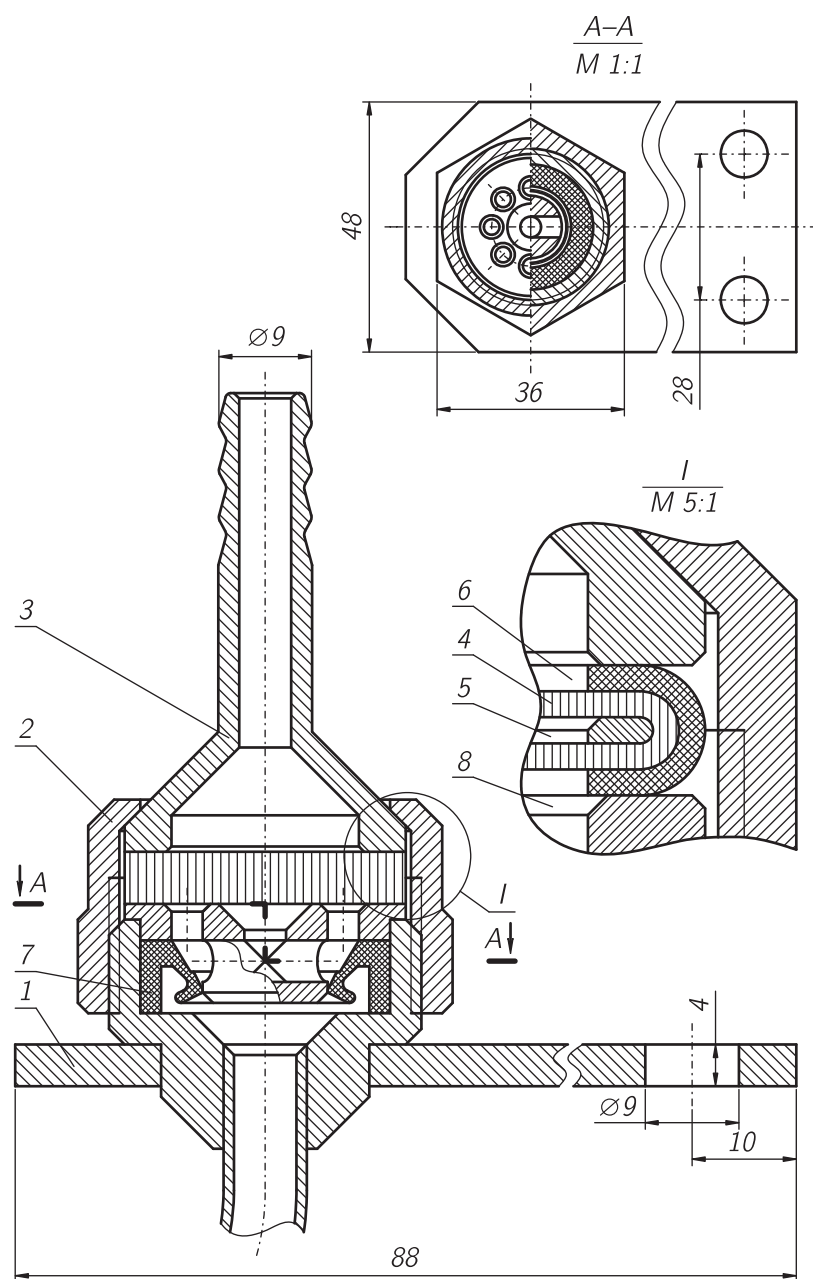
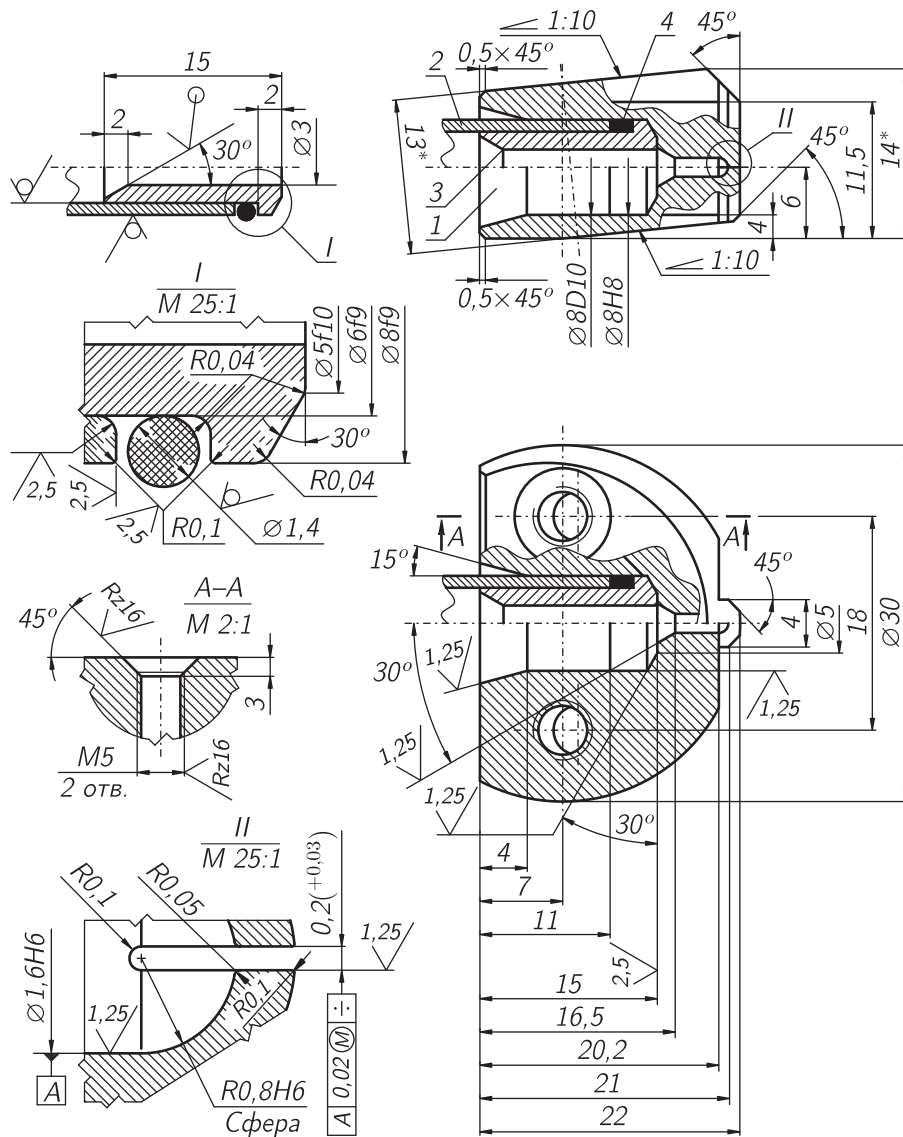


Рис. 6.8. Разработанный фильтр: 1 — корпус; 2 — гайка накидная; 3 — нипель; 4 — ткань фильтровальная; 5 — кольцо; 6 — кант; 7 — клапан-отсекатель; 8 — седло клапана



- Неуказанные:
- а) шероховатости поверхностей —  $Rz20$ ;
  - б) предельные отклонения размеров —  $H12, h12, \pm \frac{IT12}{2}$ ;
  - в) технологические радиусы —  $0,5\text{мм}$ .
- \* Размеры для справок.

Рис. 6.9. Разработанный распылитель: 1 — щелевой распылитель; 2 — трубчатый канал для подвода рабочей жидкости; 3 — втулка; 4 — уплотнительное резиновое кольцо

В целом этот РО [297], в сравнении с выше описанным [300], имеет повышенный ресурс и качество распределения жидкости под слоем почвы, а также более удобен в эксплуатации, ремонте и обслуживании. Его техническая характеристика приведена в табл. 6.1.

Таблица 6.1

**Техническая характеристика рабочего органа  
для ленточного внутрпочвенного внесения гербицидов**

Параметры	
Наименование	Величина
Тип рабочего органа: лапа стрелчатая плоскорежущая	
Угол раствора лапы, град.	65
Угол крошения лемехов лапы, град.	10–23
Высота лапы, мм	17
Ширина захвата лапы, мм	270
Ширина полосы внесения, мм	240
Глубина обработки, см	5–10
Рабочая скорость, км/ч	5–9
Рабочее давление жидкости, МПа	0,2–0,4
Расход рабочей жидкости, л/мин	0,6–1,0

6.1.4. Эргономичный рабочий орган. Минимизировать трудоемкость и время на обслуживание распылителей (подбор, замену, очистку, осмотр и пр.) можно, используя предлагаемое техническое решение [301, 320], в соответствии с которым РО имеет в целом (рис. 6.10) уже известную конструкцию [297, 300, 320], построенную на базе стрелчатой лапы 1 с наклонной вперед по ходу движения стойкой, верхняя вертикальная часть 2 которой выполнена отъемной. Изменения коснулись распылителя 3, канала 4 для подвода РЖ и наклонной части стойки лапы 1.

Канал 4 выполнен *S* – образным по форме, со свободным отогнутым вниз нижним концом, без резьбы сопрягающимся с распылителем 3. В средней своей части канал 4 с помощью винта 5 крепится к стойке лапы 1. Верхний конец канала 4 сопряжен с корпусом фильтра 6 методом сварки. Материал канала 4 пружинный, коррозионностойкий.

Распылитель 3 установлен на двух направляющих 7, выполненных вдоль краев лемехов лапы 1. Будучи установленным между лемехами на одном уровне с верхними их поверхностями, распылитель 3 сам выполняет функцию сводообразующей части лапы 1. От осевого смещения вдоль направляющих 7 распылитель 3 фиксируется располагающимся в выемке на его верхней поверхности свободным пружинным концом подводящего к нему



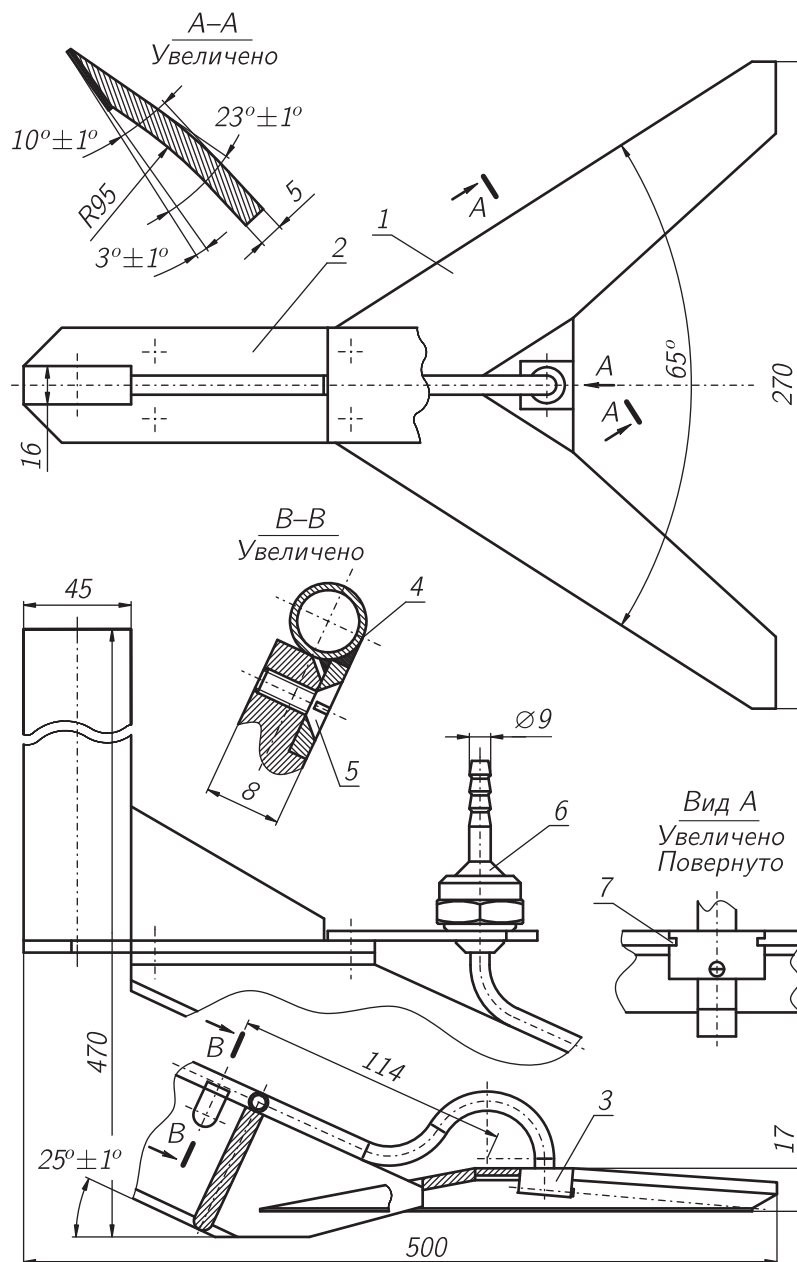


Рис. 6.10. Разработанный рабочий орган для ленточного внутривспашного внесения гербицидов: 1 – стрелчатая лапа; 2 – отъемная часть стойки; 3 – распылитель; 4 – канал для подвода рабочей жидкости; 5 – винт; 6 – фильтр-клапан-отсекатель; 7 – направляющая

РЖ канала 4. Чтобы снять распылитель 3, нет необходимости в подъеме РО из земли. Для этого, наступив ногой на лемех РО и задев за петлеобразный нижний конец канала 4, преодолевая силы упругости, необходимо приподнять свободный его конец настолько, чтобы он полностью вышел из выемки на верхней поверхности распылителя 3. После этого распылитель 3 сдвигают по направляющим 7 до полного освобождения.

Узел сопряжения распылителя 1 (рис. 6.11) с каналом 2 для подвода РЖ в значительной степени напоминает ранее разработанную [297] безрезьбовую конструкцию. Канал для подвода РЖ заканчивается закрепленным при помощи сварки штуцером 3, а уплотнение между ним и корпусом распылителя 1 выполняется путем резинового кольца 4. Прижимается штуцер 3 к распылителю 1 за счет сил упругости канала 2.

Принципиально важным является наличие на боковых поверхностях распылителя 1 направляющих канавок (рис. 6.11 вид А, и 6.12). По ним распылитель 1 задвигается в пространство между лемехами лапы. От осевого смещения он удерживается штуцером 3, который в этом случае выполняет роль фиксатора, у которого в качестве пружины используется свободный конец канала 2. Такой способ крепления распылителя 1 позволяет до минимума упростить его монтаж и демонтаж.

Проточная часть распылителя отличается уменьшенной шириной щели в 0,2 мм, выполненной электроэрозионным способом [318]. Винт 4 с шайбой 5 из мягкого металла выполняют роль заглушки.

Предложенные технические решения направлены на снижение расхода РЖ, а, значит, затрат труда и времени на ее приготовление и заправку агрегата, на сокращение трудоемкости обслуживания агрегата в целом и РО в частности, а также на улучшение условий труда человека.

6.1.5. Рабочий орган для внутрпочвенного внесения гербицидов на комковатых почвах. Многообразие почвенно-климатических и хозяйственных условий порождает необходимость проектирования технических средств для ленточного ВВГ, способных работать на плохо разработанных полях. Имеется ввиду наличие в приповерхностном слое комков, соизмеримых с планируемой глубиной внесения гербицидов. В нашем случае при глубине заделки препарата 4–12 см критичными являются комки, размером 3 см и более. Особенно проблематично мелкое ВВГ в случае, если прочность комков такова, что обеспечивает им целостность после очередной встречи с почвообрабатывающим РО.

При осуществлении технологического процесса ВВГ на комковатых почвах образующаяся в кинематической тени РО полость не имеет программируемой геометрии и по этой причине целостность ФР РЖ регулярно нарушается пересекающими его отдельно падающими комками, а, следовательно, не достигается требуемая равномерность распределения препарата.

Рассматриваемый РО в основе своей устроен традиционно (рис. 6.13 [321, 322]). Стрельчатая лапа по прежнему имеет угол раствора  $65^\circ$  и ширину захвата 270 мм. Образована она парой лемехов 1, сваренных воедино со



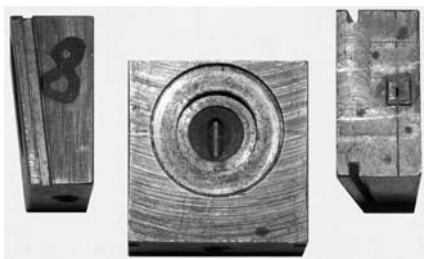


Рис. 6.12. Распылитель: слева направо — вид сбоку, сверху, спереди

ниже высоты лапы в период ее ресурсного срока, вследствие износа.

Распылитель 6 РЖ установлен в центре кинематической тени лапы под ее сводообразующей частью 2 и ориентирован вниз под углом  $5,5^\circ$ . Площадь лемехов 1 и сводообразующей части 2 лапы, которая выступает за распылитель 6 лишь на несколько миллиметров, сведены до минимума. В продолжении сводообразующей части 2 и лемехов 1 в пространстве между их верхними краями установлен козырек 7 из соприкасающихся параллельных друг другу горизонтальных прутков, соединенных между собой лишь в месте крепления к лемехам 1 лапы и сводообразующей части 2 и изготовленных из износостойкого эластичного материала, например, капрона. Закрепляется козырек с помощью клеевого соединения и фиксаторов 8.

РЖ к распылителю 6, как прежде, подается через индивидуальный фильтр-клапан-отсекатель 9 по трубопроводу 10.

Такой РО рассчитан на малую норму (менее 50 л/га) расхода РЖ. В этом случае РЖ недостаточно для того, чтобы оперативно смывать почву, налипающую в момент погружения на нижние поверхности лемехов сводообразующую часть лапы. Проблема решается путем сведения до минимума общей площади жестких поверхностей, на которые почва могла бы налипать. Эластичный прутковый козырек, в силу постоянных деформаций и колебаний в процессе работы, способен к самоочистке.

Такая низкая и плоская стрельчатая лапа, обладающая малой площадью жестких контактирующих с почвой поверхностей, в значительно меньшей мере склонна к бороздообразованию. Созданию розвальней борозды препятствует также и козырек. Его прутки выполняют роль направляющих для почвы и тем самым препятствуют ее смещению в стороны от траектории движения. В конечном итоге, это позволило улучшить качество заделки РЖ и уменьшить нижний порог глубины внесения препарата до 4 см.

6.1.6. Рабочий орган для внутрпочвенного внесения гербицидов с применением технологии размазывания. РО (рис. 6.14) [323] был создан по итогу успешных испытаний предыдущей конструкции с прутковым козырьком, как на рис. 6.13. Оказалось, что он одинаково работоспособен как на комковатых, так и на рыхлых, хорошо

сводообразующей частью 2 и наклонной вперед частью 3 стойки, которая путем болтового соединения крепится к вертикальной части 4 стойки.

Лемехи 1 выполнены цилиндрическими, с образующей параллельной режущей кромке. Установлены они с минимальным наклоном к горизонту. Их выпуклость ориентирована в направлении движения. Нижняя заточка и нижняя наплавка 5 лемехов 1 твердым сплавом замедляет изменение

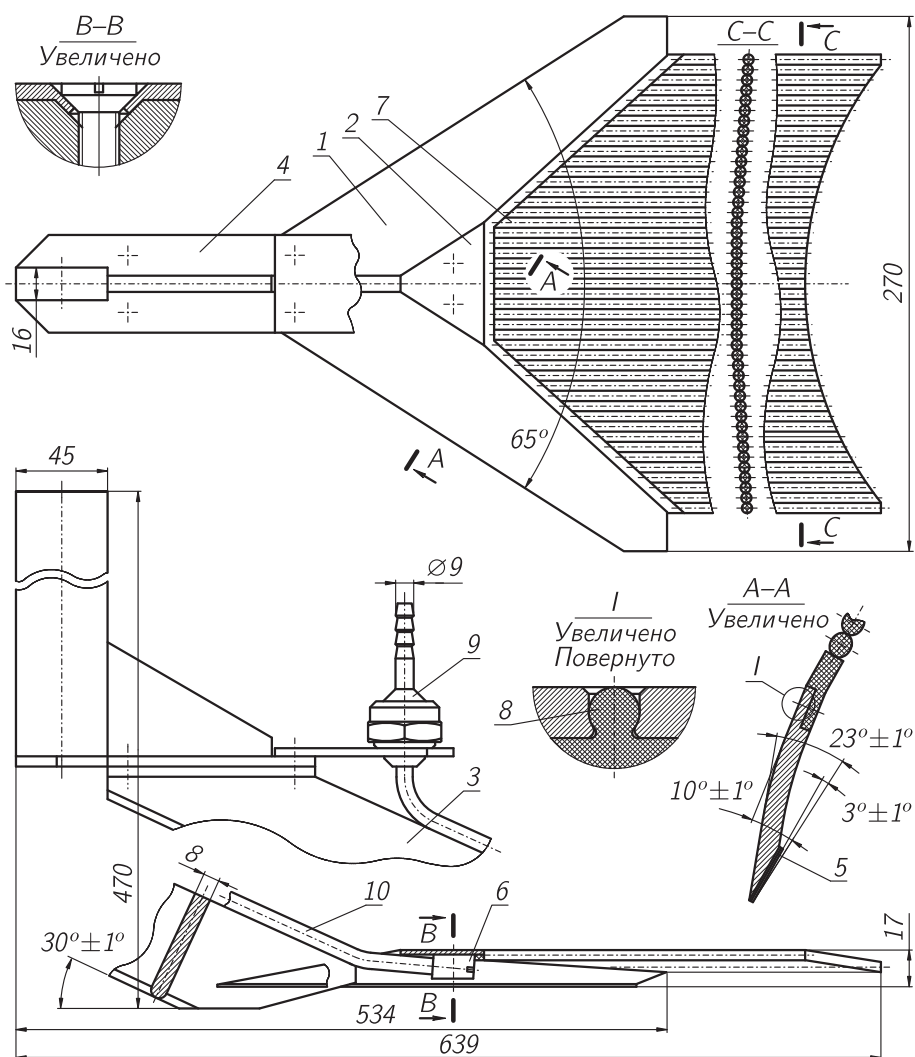


Рис. 6.13. Разработанный рабочий орган для внутрпочвенного внесения гербицидов на комковатых почвах: 1 — лемехи; 2 — сводообразующая часть; 3 и 4 — наклонная и вертикальная части стойки; 5 — наплавленный слой; 6 — распылитель; 7 — прутковый козырек; 8 — фиксатор козырька; 9 — фильтр-клапан-отсекатель; 10 — канал для подвода рабочей жидкости



обработанных почвах. Новая конструкция (рис. 6.14) имеет те же детали и то же устройство. Разницу представляет только прутковый козырек 7. Его прутки изогнуты в вертикальной плоскости, имеют переменное сечение и, как следствие, жесткость. Заканчиваются прутки горизонтальным участком на уровне дна борозды. Материал прутков прежний — предпочтительно капрон или иной упругий полимер. Желательно, чтобы материал прутков хорошо смачивался водой, ибо большинство РЖ представляют комбинацию гербицида и воды. Длина прутков выбирается такой, которая гарантированно превышает дальность пролета поднятой лемехами почвы. В этом случае во время выполнения технологического процесса внесения гербицидов горизонтальные придонные части прутков все время остаются приваленными почвой, т.е. прижатыми ко дну борозды, благодаря чему, путем размазывания, улучшают равномерность распределения препарата по длине пути движения. Механизм самоочистки от налипшей почвы у такого рабочего органа такой же, как и у предыдущего.

#### 6.2. Разработка технологии ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов

6.2.1. Обоснование и анализ возможных вариантов реализации технологии ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов. Как и большинство технологических операций в растениеводстве, ленточное ВВГ можно осуществить различными способами (табл. 6.2). На первый взгляд, самым прогрессивным является применение комбинированных машин, осуществляющих посев и ВВГ одновременно, в частности, путем использования комбинированных РО, подобных, например, сошникам [327, 328] или дискретных РО, как, например, в агрегате Краснодарского НИИСХ им. П.П.Лукияненко [329]. Широкому использованию таких агрегатов препятствует их низкая производительность, связанная со значительным ростом затрат времени на их технологическое обслуживание (в основном, на заправку семенами, удобрениями и гербицидами).

Если же сравнивать показатели качества работы комбинированных машин различных типов 3а–3г (табл. 6.2), то предпочтительнее машины с дискретными РО, установленными на индивидуальных подвесках (секциях с механизмом копирования поверхности поля), причем сошник должен располагаться впереди РО, вносящего гербицид, что связано с разностью оптимальной глубины заделки гербицида и семян высеваемых растений.

В большинстве случаев семена полезных растений по размеру больше, чем семена сорняков, а, значит, и оптимальная глубина заделки семян культурных растений, которая может достигать десяти их диаметров, больше, чем глубина наиболее вероятного расположения прорастающих семян сорняков. Очевидно, что гербицид следует вносить в горизонт наиболее вероятного прорастания сорняков, т.е. выше уровня заделки семян полезных растений. Таким образом, если гербицид внести первым, то идущий следом сошник, двигаясь глубже разрушит целостность гербицидного экрана и тем самым ухудшит общую его эффективность.

Если же РО для ВВГ располагается на отдельном механизме подвески после сошника, то, кроме сохранения целостности гербицидного экрана, достигается доуплотнение почвы в области заделки уже высеянных семян с одновременным сохранением рыхлости поверхностного слоя. Т.е. достигается эффект применения послепосевого прикатывания и последующего боронования легкими боронами или прикатывания кольчатошпоровыми катками, а, значит, отпадает необходимость в проведении таких операций.

Таблица 6.2

**Возможные варианты реализации  
технологии ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов**

Вариант агрегатирования	Порядок выполнения операции внесения гербицидов по отношению к посеву	Способ осуществления	Особенности конструкции
1 Отдельные машинно-тракторные агрегаты	До [297, 300, 301, 303, 319, 324] или после [310, 325, 326] посева	Вожделение агрегатов с помощью GPS или по каким либо направляющим, включая борозды или щели [300, 308–310, 319, 324, 325], выполненные в почве	Агрегаты дооснащаются соответствующим оборудованием для вождения
2 Комбинированный агрегат	До или после посева	Трактор интегрального типа с передней и задней навесками [301]	Одна из машин должна иметь возможность агрегатирования с трактором посредством передней навески
3а Комбинированная машина	До или после посева	Трактор с задним навесным или сцепным устройством	Две машины комбинируются в одну путем объединения их рам
3б — ” —	— ” —	— ” —	На общей раме на индивидуальных подвесках монтируются посевные секции и РО для внесения гербицидов
3в — ” —	— ” —	— ” —	На общей раме на общих подвесках попарно монтируются посевные секции и РО для внесения гербицидов
3г — ” —	— ” —	— ” —	Применяются комбинированные РО для посева и внесения гербицидов



Приведенные выше мотивации легли в основу разработки нового способа (технологии) послепосевного ленточного ВВГ [310, 325, 326] на посевах пропашных культур. Для выполнения посева и внесения гербицидов такая технология предполагает использование самостоятельных машинотракторных агрегатов, перемещающихся по полю с применением метода вождения по направляющим щелям [37, 39]. Одним из преимуществ предлагаемой технологии является ее гибкость. Например, в случае достаточного увлажнения почвы во время посева (в Харьковской области бывает не чаще, чем 2 раза на 7 лет), когда высев полезных растений осуществляется на малую глубину (такую же, как и внесение гербицида), можно отказаться от применения послепосевного внесения гербицидов в пользу предпосевного. В таком случае не придется ни привлекать новой техники, ни даже переналаживать ее, следует поменять только порядок следования агрегатов.

В конкретной реализации (рис. 6.15) агрегат для внесения гербицидов под посев кукурузы состоял из базовой машины 1 (монтируемый подкормщик-опрыскиватель ПОМ-630), навешенной на трактор 2 (ЮМЗ-6АЛ) и культиватора-растениепитателя 3 (КРН-4.2), дооборудованного двумя щелевателями-направителями 4 конструкции ВНИИОБ [37, 39] и комплектом опытных РО [297, 300, 301, 310, 319, 325].

При сборке агрегата (рис. 6.16) культиваторные секции 1 устанавливали на раме 2 культиватора по схеме расстановки сошников посевного агрегата на базе сеялки СПЧ-6ФС. Две культиваторные секции с опорными



Рис. 6.15. Агрегат для ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов: 1 — подкормщик-опрыскиватель ПОМ-630; 2 — трактор ЮМЗ-6АЛ; 3 — культиватор-растениепитатель КРН-4.2; 4 — щелеватель-направитель

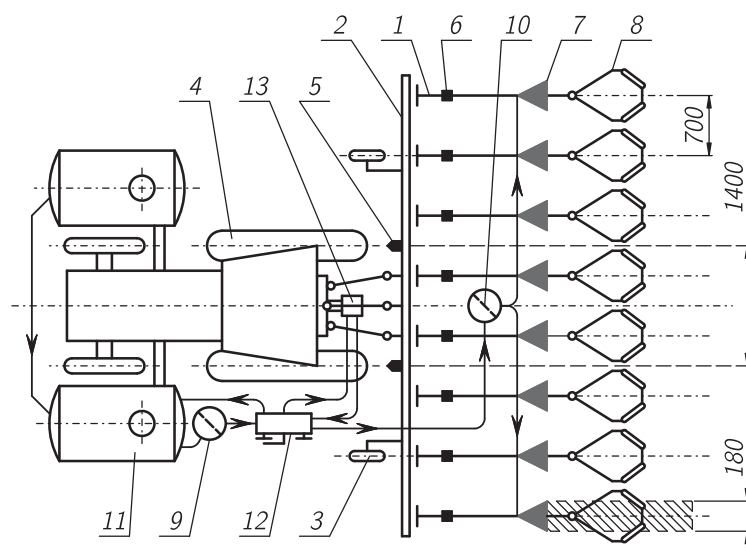


Рис. 6.16. Схема агрегата для ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов под посев кукурузы: 1 — секция культиваторная; 2 — рама культиватора; 3 — колесо опорное культиватора; 4 — трактор; 5 — щелеватель-направитель; 6 — рабочий орган рыхлительного типа; 7 — рабочий орган для внутрипочвенного внесения гербицидов; 8 — шлейфы; 9, 10 — фильтры; 11 — емкость для рабочей жидкости; 12 — пульт управления; 13 — насос

колесами 3, чтобы исключить задевание колес трактора 4, устанавливали по краям агрегата. ЩН 5 монтировали на бруске культиваторной рамы 2 строго за колесами трактора 4 на расстоянии 140 см друг от друга, что в точности соответствует колее трактора и расстановке ножей-щелерезов на агрегате, предназначенном для нарезки направляющих щелей в почве. РО 6 рыхлительного типа устанавливали на каждой культиваторной секции 1 непосредственно на грядках, в передней их части. В задней части грядок, непосредственно возле задних держателей, закрепляли РО 7 для ВВГ, а в задних держателях — шлейфы 8.

Глубина установки рыхлительного РО 6 и РО 7 для ВВГ — одинакова. Все работы по расстановке и регулировке РО культиватора следует проводить на регулировочной площадке согласно существующим методикам и рекомендациям. В противном случае глубину заделки гербицида 4–5 см получить не удастся. Техническое состояние самого культиватора также должно соответствовать норме. Штатные фильтрующие элементы 9 всасывания и 10 нагнетания машины ПОМ-630 следует усиливать, соответственно, двумя и четырьмя слоями капроновой чулочной ткани. Остальные узлы и детали подкормщика-опрыскивателя, а именно емкости 11, пульт управления 12, насос 13 и др. переделке не подвергали.

Имея по одному РО для ВВГ на рядок (рис. 6.17), такой агрегат обеспечивал внесение гербицида с шириной обработанных лент 18 см. При качественном выполнении всех операций как предшествующих внесению гербицидов, так и последующих, такая ширина является достаточной.

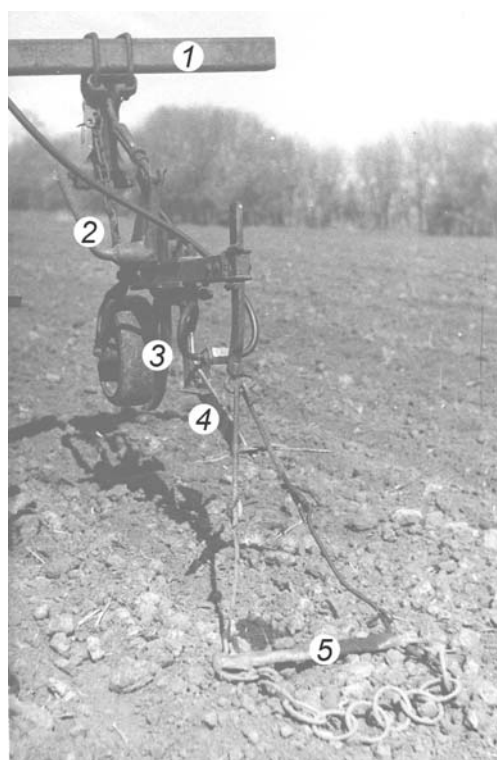


Рис. 6.17. Секция агрегата для ленточного внесения гербицидов: 1 — рама культиватора-растениепитателя КРН-4.2; 2 — секция КРН-4.2; 3 — долотообразный рабочий орган С-8.3 ГОСТ-1343-82; 4 — предлагаемый рабочий орган для внутривспашечного внесения гербицидов; 5 — шлейф

Нарезку направляющих щелей в почве выполняли как самостоятельную операцию, используя для этого трактор ДТ-75М в агрегате с культиватором-плоскорезом-глубокорыхлителем КПП-250, предварительно заменив плоскорезные РО ножами-щелерезами, установленными на расстоянии 140 см друг от друга, или агрегатом, состоящим из трактора и щелвателя ЩЦ-00-000, с двумя РО. В обоих случаях сельхозмашины дооборудовали двумя гидрофицированными маркерами (рис. 6.18).

Посев кукурузы выполняли агрегатом (рис. 6.19), состоящим из трактора МТЗ-80 и сеялки СПЧ-6ФС с двумя ЩЦ.



Рис. 6.18. Агрегат для нарезки направляющих щелей в почве: 1 — трактор Т-74; 2 — щелеватель ЩП-00-000; 3 — маркер

Очень важным, с точки зрения точности вождения агрегатов, является правильная регулировка навески трактора. На всех упомянутых выше операциях, кроме нарезки направляющих щелей в почве, диагональные растяжки навески тракторов были ослаблены. Так достигается некая необхо-



Рис. 6.19. Агрегат для посева кукурузы: 1 — трактор МТЗ-80; 2 — сеялка СПЧ-6ФС; 3 — щелеватель-направитель

димая свобода в движении трактора относительно агрегируемой с ним навесной машины и, следовательно, относительно направляющих щелей в почве, не приводящая к разрушению их стенок. Направление движения агрегируемой сельхозмашины в этом случае, в основном, задается именно щелями. Уход в сторону всего агрегата возможен только при значительном отклонении трактора от заданного щелями курса.

Применение предлагаемой технологии [326] послепосевного ленточного ВВГ на посевах пропашных культур и, в частности, кукурузы совхозов Кременчугский и Ватутина, а также колхоза Украина Кременчугского р-на Полтавской обл. (1984–1989 г.г.) показал, что вождение агрегатов по двум и более направляющим щелям (ВНИИОБ [37, 39]) имеет недостатки. Поскольку территория перечисленных хозяйств располагается в зоне недостаточного увлажнения, а пропашные и технические культуры у них возделывали на богарных землях, то в итоге было замечено, что соседние с направляющими щелями рядки полезных растений отставали в росте и урожайности. Пояснялось это потерями влаги из почвы через щели.

В связи с этим было предложено: во-первых, водить агрегаты по одной щели; во-вторых, засыпать их рыхлой почвой после каждого прохода [308, 309, 324]. На рис. 6.20 показан агрегат для выполнения междурядных обработок на посевах пропашных культур, оборудованный предлагаемым устройством для вождения по одной направляющей щели. Трактор 1, посредством навесной системы 2 и сцепного устройства 3, традиционным образом агрегируется с культиватором, на раме 4 которого закреплена рама 5 направляющего устройства, включающего в себя два ЩН 6 и 7. Длина рамы 5 такова, что располагающаяся под ней культиваторная секция 8 вместе с РО 9 и 10 не задевает ни переднего 9, ни заднего 10 ЩН.

Применение этого направляющего устройства не отличается от оригинального метода вождения сельхозагрегатов по направляющим щелям в почве (ВНИИОБ [37, 39]). Единственное отличие — диагональные растяжки 2 навесной системы трактора 3 должны быть ослаблены, а за последним из щелевателей 10 должны быть закреплены шлейфы произвольной конструкции. В наших опытах, это были самодельные цепи из проволоки 10 мм в диаметре. По сравнению с оригинальными ЩН, предлагаемое устройство лучше удерживает сельхозорудие на заданном курсе и в меньшей степени разрушает направляющие щели в почве. Засыпание верхней части щелей почвой вызывает затруднения только в момент заезда на рядки.

Еще в большей мере можно улучшить вождение агрегатов по одной направляющей щели в почве, если применить двушарнирное звено-сцепку предлагаемой конструкции (рис. 6.21) [330].

В процессе комплектования агрегата на раме 1 сельскохозяйственного орудия устанавливают и жестко закрепляют уже известное направляющее устройство, состоящее из двух ЩН 2, 3 и собственной рамы 4. Сопряжение сельхозмашины с трактором 5 выполняют с использованием двушарнирного звена-сцепки, состоящего из двух автосцепок 6 и 7, соединенных между собой двушарнирным звеном 8. В пространстве звено 8 расположено

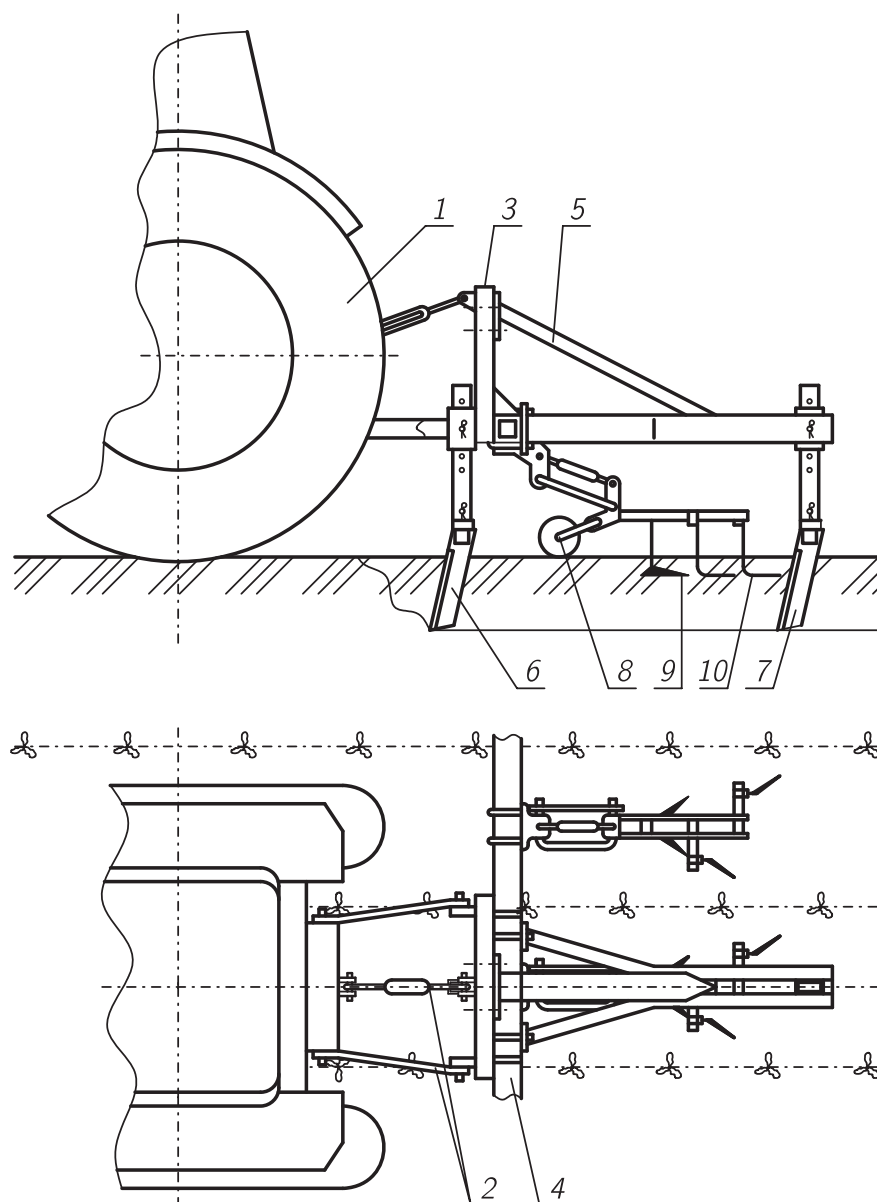


Рис. 6.20. Культиваторный агрегат с предлагаемым направляющим устройством для вождения по одной, нарезанной в почве щели: 1 — трактор; 2 — навесное устройство; 3 — сцепное устройство; 4 — рама культиватора; 5 — рама направляющего устройства; 6 и 7 — щелеватели-направители; 8 — секция культиватора; 9 и 10 — рабочие органы культиватора

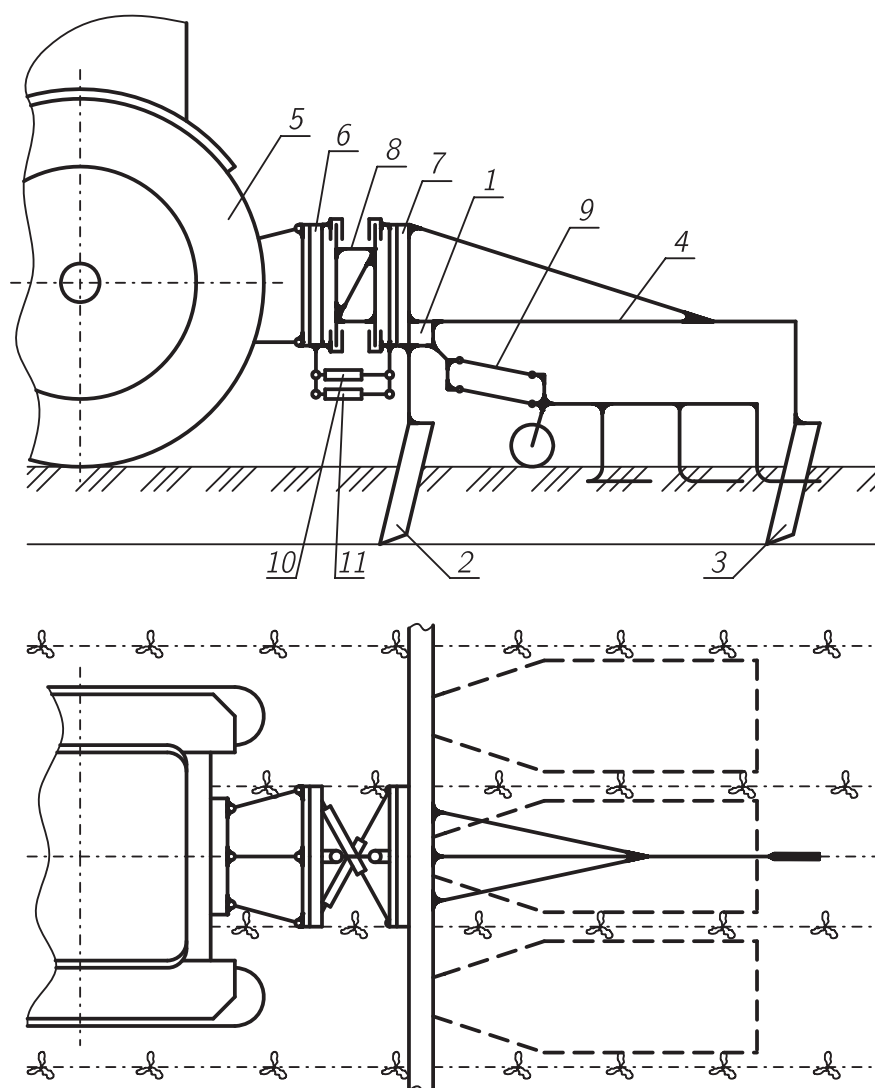


Рис. 6.21. Схема агрегата для междурядной обработки почвы, сконструированного с использованием двухшарнирного звена-сцепки и предусматривающего применение направляющего устройства для вождения по технологическим щелям в почве: 1 — рама культиватора; 2 и 3 — щелеватели-направители; 4 — рама направляющего устройства; 5 — трактор; 6 и 7 — автосцепные устройства; 8 — двухшарнирное звено; 9 — секция культиватора; 10 и 11 — гидроцилиндры

так, что его цилиндрические шарниры сориентированы вертикально, равно как плоскость конструкции самого звена, которая совпадает с вертикальной плоскостью симметрии агрегата.

Рабочие секции 9 (на рис. 6.21 изображены пунктиром) сельхозмашины располагают на ее раме 1 традиционным образом в соответствии с назначением и требованиями к технологии выполняемой ими операции.

Если агрегируемая машина навесная, то автосцепные устройства 6 и 7 дополнительно комплектуют гидроцилиндрами 10 и 11, соединяющими посредством шаровых шарниров их между собой. Оси гидроцилиндров 10 и 11 не параллельны плоскости, проходящей через оси шарниров звена 8. Такая конструкция, в случае запятого состояния гидроцилиндров 10 и 11, позволяет получить жесткое соединение трактора 5 с сельхозмашиной.

В процессе движения агрегата ШЦН 2 и 3 двигаются внутри предварительно нарезанной технологической щели в почве, удерживая сельхозмашину на заданной щелью траектории, исключая уход ее в сторону или поворот вокруг вертикальной оси. Трактор 5 при этом может двигаться сравнительно свободно. В некоторых пределах отклонение трактора 5 относительно технологической щели практически не оказывает вредных воздействий на характер движения сельхозмашины. Происходит это за счет наличия двухшарнирного звена 8, соединяющего в единое целое трактор 5 и сельхозорудие. При уходе в сторону трактора 5, в ту же сторону отклоняется и звено 8, но сама сельхозмашина остается на требуемом курсе, поскольку удерживается на нем двумя ШЦН 2 и 3. Будучи расположенной в одной плоскости с ШЦН 2 и 3, звено 8 исключает уход сельскохозяйственного орудия в сторону в случае, если трактор 5 движется точно по заданному курсу. Гидроцилиндры 10 и 11 при этом никаких воздействий на систему трактор-сельхозмашина не оказывают, поскольку находятся в плавающем положении.

Возможность подъема и транспортировки навесной сельхозмашины полностью сохраняется за счет вертикальной ориентации цилиндрических шарниров звена 8 и наличия гидроцилиндров 10 и 11, которые для этого переводят в запятое состояние, чем и блокируют шарниры звена 8.

Возможно использование гидроцилиндров 10 и 11 в случае прохода агрегатом разрушенного участка направляющих щелей. Для этого гидроцилиндры 10 и 11 также переводят в запятое состояние без вывода сельхозмашины из рабочего положения. Точность движения агрегата в этом случае будет полностью определяться траекторией движения трактора 5.

Использование разработанного устройства позволяет реализовать многократное вождение сельскохозяйственных агрегатов вдоль одной и той же направляющей щели в почве, взамен известных устройств, предполагающих использование на каждый проход агрегата двух или четырех направляющих щелей (ВНИИОБ [37, 39]). В экономическом смысле применение устройства существенно повышает производительность труда на операции по нарезке направляющих щелей и расширяет применимость способа вождения сельскохозяйственных агрегатов по направляющим щелям в почве на богарное земледелие в зонах с недостаточным увлажнением почв.



6.2.2. Обоснование и анализ перспективных гидравлических схем машин для ленточного внутрпочвенного внесения гербицидов. Актуальность проблемы снижения расхода РЖ при внутрпочвенном способе ее внесения является более острой по сравнению с другими технологиями по причине малой рабочей скорости движения агрегатов для ВВ и большего нижнего предела расхода жидкости в единицу времени одним распылителем. При ВВГ растет значимость точности дозирования жидкости по отдельным рабочим органам [317].

Известно, что расход жидкости  $q$  (в л/мин) через гидравлический щелевой распылитель пропорционален площади щели [331]:

$$q = \mu F \sqrt{2\Delta p / \rho}, \quad (6.1)$$

где  $\mu$  — коэффициент расхода, который зависит от формы щели, режима течения жидкости (степени турбулентности потока) и принятых единиц измерения [331];  $F$  — площадь щели,  $10^{-6}$  м<sup>2</sup>;  $\Delta p$  — перепад давления в щели,  $10^5$  Па;  $\rho$  — плотность жидкости,  $10^{-3}$  кг/м<sup>3</sup>.

Точность изготовления такого распылителя с расходом жидкости до 1 л/мин соответствует восьмому качеству [316], согласно которому для номинальных размеров величиной до 3 мм определен допуск 14 мкм [332]. При такой точности изготовления щелевого распылителя с прямоугольной щелью с шириной щели 0,3 мм, ее площадь может варьировать в пределах 0–4,7%. Для щели шириной 0,2 мм эта погрешность может достигать 7%. С учетом варьирования рабочего давления, такой распылитель не сможет обеспечить точность дозирования жидкости в пределах  $\pm 5\%$ .

Повышение точности изготовления распылителей экономически нецелесообразно. Ведь в процессе эксплуатации его проточная часть изнашивается и расход жидкости изменяется. Гораздо эффективнее гидравлическую схему агрегата для ВВГ традиционного дозирования по давлению или по объему для всех рабочих органов в целом заменить на индивидуальное объемное дозирование для каждого рабочего органа отдельно [317].

Для этой цели наиболее пригодными являются многосекционные насосы-дозаторы перистальтического типа [333–336]. Вследствие отсутствия механических пар, работающих в агрессивной среде, они более надежны в работе, могут быть легко скомпонованы в многосекционный агрегат, позволяют просто реализовать возможность изменения производительности в широких пределах и не нуждаются в предохранительных клапанах от превышения допустимого давления. Перистальтический насос [334] уже сам по себе является многосекционным.

В системах индивидуального объемного дозирования расход РЖ через каждый распылитель определяется только производительностью и техническим состоянием насоса дозатора или его секции. Ни качество распылителя, ни степень его износа или засорения, ни расстояние от насоса-дозатора до распылителя, ни гидравлическое сопротивление подводящих каналов никаким образом не сказываются на расходе жидкости. Все это вместе взятое

открывает путь к дальнейшему снижению норм расхода РЖ и, в конечном итоге, позволяет перейти к применению одноразовых или оборотных, заполняемых в фабрично-заводских условиях емкостей для РЖ [301].

Такой подход весьма эффективен. Главное — это повышение производительности, безопасности и эргономичности труда человека. Исключаются обычно выполняемые в поле, в неприспособленных или частично приспособленных условиях, операции по приготовлению и переливу РЖ.

В силу существенного снижения вероятности попадания сора в гидравлическую систему машины и в распылители, в частности, применение такого инженерного решения неизбежно благоприятно скажется на надежности работы гидравлических систем таких орудий и, главное, на качестве распыления. Это весьма важно, поскольку приемлемых для практического использования систем контроля качества внутрисочвенного распыления жидкости пока нет и за рубежом. Есть системы, контролирующие лишь факт наличия распыления [337], но не его качество.

6.2.3. Разработка перспективных технических средств для вождения агрегатов по направляющим щелям в почве. Ранее рассматривался метод вождения агрегатов по одной направляющей щели в почве [308,309,324] (рис. 6.20) и предназначенное для этого разработанное устройство — двушарнирное звено-сцепка (рис. 6.21) [330]. Для нарезки технологических щелей в почве создан специальный щелеватель [338] (рис. 6.22), который содержит раму 1 с опорными колесами 2, на которой последовательно друг за другом закреплены ножи-щелерезы 3, 4 и 5.

Рабочий участок  $B$  ножей-щелерезов 3, 4 и 5 имеет неодинаковую толщину. Совпадает она только на верхнем участке  $B_B$ , а в нижней своей части  $B_H$  у ножей-щелерезов 3 и 4 толщина убывает книзу. Неизменную толщину имеет последний нож-щелерез 5. Кроме того, нож-щелерез 3 внизу имеет

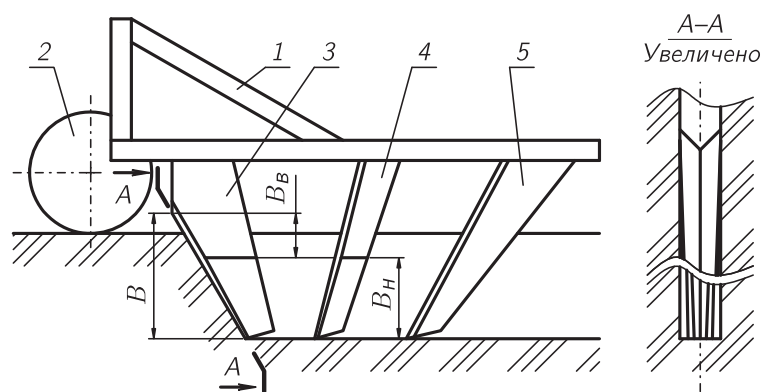


Рис. 6.22. Щелеватель для нарезки направляющих щелей в почве: 1 — рама; 2 — опорное колесо; 3, 4 и 5 — ножи-щелерезы

меньшую толщину, чем нож-щелерез 4, а нож-щелерез 4 имеет меньшую толщину, чем последующий последний нож-щелерез 5. Угол погружения в почву первого ножа-щелереза 3 является тупым. Два последующих ножа-щелереза 4 и 5 имеют острый угол погружения в почву, причем последний нож-щелерез 5 входит в почву с наименьшим углом.

В процессе перемещения первый нож-щелерез 3 формирует щель, верхняя часть которой имеет большую ширину, чем нижняя. Таким образом достигается уплотнение верхнего слоя почвы, что исключает ее осыпание. Тупой угол погружения в почву первого ножа-щелереза исключает выход опережающей трещины на дневную поверхность впереди него, т.е. препятствует разрушению (рыхлению) стенок щели в процессе ее нарезки. В плотных нижних слоях почвы щель выполняется методом последовательного расширения за счет уплотнения почвы. В конечном итоге это повышает точность вхождения сельскохозяйственных агрегатов на последующих операциях. Острый угол погружения в почву двух последних ножей-щелерезов необходим для стабилизации хода орудия по глубине. Чрезмерному заглублению орудия препятствуют опорные колеса.

Для последующего вождения агрегатов по уже готовым направляющим щелям в почве был создан щелеватель [339] (рис. 6.23). Его можно успешно использовать и для нарезки направляющих щелей в почве, особенно, если последние относятся к легким почвам и не оказывают значительного тягового сопротивления при обработке. Прототипом для его создания послужил щелеватель конструкции ВНИИОБ [37, 39]).

Щелеватель состоит из ножа 1, в верхней части которого с помощью винта 2 закреплен следоуказатель 3. При этом нож 1 посредством пальца 4 установлен в нижней части стойки 5, которая посредством пальца 6, фиксатора 7, кронштейна 8 и хомутов 9 с гайками закрепляется на раме 10 сельскохозяйственного орудия.

Нижняя часть ножа 1 имеет острый угол вхождения в почву  $\alpha_1$ , который по численному значению близок к прямому. Это необходимо, чтобы опережающая трещина в почве образовывала с дном щели как можно меньший угол. Верхняя часть режущей кромки ножа 1 имеет тупой угол вхождения в почву  $\alpha_2$  и по длине не должна превышать половины рабочей длины ножа 1, поскольку эта его часть должна двигаться в культивированном слое почвы, но не глубже, чтобы не увеличивать тяговое сопротивление.

Следоуказатель 3, выполненный в виде выпуклой поверхности, устанавливается непосредственно перед режущей кромкой ножа 1. Причем его лобовая поверхность также имеет тупой угол вхождения в почву  $\alpha_3$ , который может отличаться по величине от угла  $\alpha_2$ .

Наличие наклонного вперед участка ножа 1 и следоуказателя 3 способствует уплотнению стенок щели и уменьшает вынос нижних слоев почвы наружу. Это обеспечивает высокое качество выполнения стенок щели и увеличивает ее рабочую глубину. На ноже 1 имеются также регулировочные отверстия, с помощью которых изменяют положение следоуказателя 3 в зависимости от требуемой глубины хода.

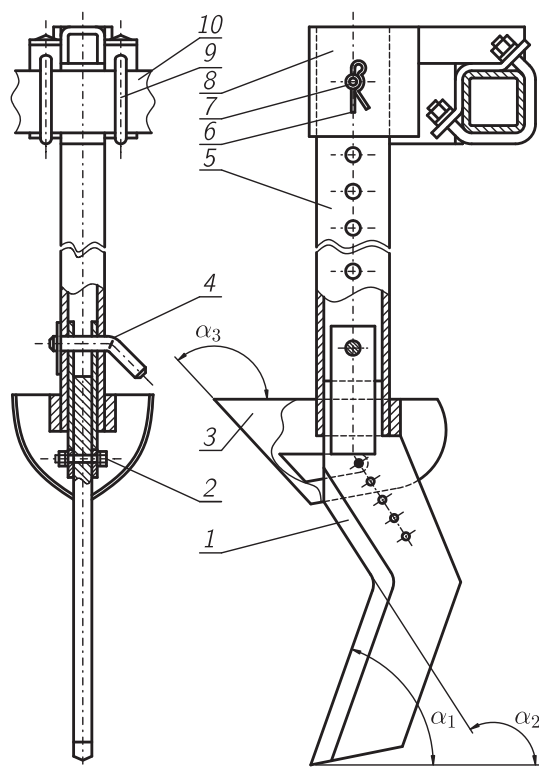


Рис. 6.23. Разработанный щелеватель для нарезки направляющих щелей в почве и вождения сельскохозяйственных агрегатов по ним: 1 — нож; 2 — винтовое соединение; 3 — следоуказатель; 4 и 6 — палец; 5 — стойка; 7 — фиксатор; 8 — кронштейн; 9 — хомут; 10 — рама сельхозорудия

При движении щелевателя в почве наличие у ножа 1 участка с острым углом  $\alpha_1$  вхождения в почву способствует появлению сил, заглубляющих его. Эти силы частично компенсируются противоположными реакциями на следоуказателе 3 и участке ножа 1 с тупым углом вхождения в почву  $\alpha_2$ . В целом это улучшает стабильность хода щелевателя по глубине. Таким образом выполняют в почве хорошо заметные щели с плотными стенками. Отсутствие вырванных комков и глыб по всей глубине щели способствует сокращению потерь из нее влаги.

В случае, когда щелеватель используется не для нарезки технологических щелей в почве, а для вождения сельскохозяйственных агрегатов, то технологический процесс протекает аналогичным образом. Осыпавшаяся внутрь щелей почва в таком случае также не выносится наружу, а вдавливается в их стенки.

## ВЫВОДЫ

1. Применительно к возделыванию пропашных культур в случае, когда используется метод вождения агрегатов по направляющим щелям в почве, ширину лент внесения гербицидов можно уменьшить до 180 мм.

2. Открытое ленточное внесение гербицидов, предполагающее образование борозд и последующую их заделку, способствует потерям влаги из почвы. В связи с этим, разработанные конструкции бороздореза и загор-тача следует рекомендовать к использованию или в условиях орошаемого земледелия, или на богарных землях в зонах достаточного увлажнения.

3. Разработанная компоновочная схема рабочего органа, включающая стрельчатую лапу, индивидуальный фильтр-клапан-отсекатель, канал для подвода рабочей жидкости и распылитель, а также предполагающая разборную стойку, нижняя часть которой имеет тупой угол погружения в почву ( $150-155^\circ$ ) и соединена с лемехами лапы так, что выступает за их пределы вниз (до 10 мм) и вперед (до 45 мм), эффективна и может быть взята за основу в случае проектирования новых рабочих органов такого типа.

4. Применение разработанных гнутых лемехов с нижней заточкой и нижней наплавкой твердым сплавом (угол между плоскостью резания и наплавкой  $2-4^\circ$ , угол крошения уменьшается от  $23^\circ$  у режущей кромки до  $10^\circ$  у верхнего обреза лемеха, высота лемеха в рабочем положении 17 мм, ширина наплавленного слоя 20–25 мм) позволяет получить конструкцию рабочего органа, технологические параметры которого в минимальной степени связаны со степенью износа его лемехов.

5. Разработанное безрезьбовое крепление распылителя наиболее эффективно с точки зрения эргономики и минимизации потерь рабочего времени на обслуживание рабочего органа.

6. Полной заделки жидких препаратов при внутрипочвенном их внесении на комковатых почвах можно добиться, если применить разработанную конструкцию прутковой сводообразующей части рабочего органа.

7. В случае малорасходного внесения гербицидов внутрипочвенным способом ( $< 50$  л/га) эффективно применять разработанный метод размазывания, который предполагает использование в конструкции стрельчатого рабочего органа прутковой сводообразующей части с гнутыми прутками.

8. На пропашных культурах технологию ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов возможно осуществить шестью способами, используя отдельные машины, комбинированные агрегаты и комбинированные машины. Наиболее перспективным следует считать разработанный способ после-посевного ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов.

9. Для вождения сельскохозяйственных агрегатов с применением направляющих щелей в почве рациональнее применять разработанные метод и механизмы, предназначенные для нарезки технологических щелей в почве, для агрегатирования сельхозмашины с трактором и, собственно, для осуществления вождения агрегата по одной направляющей щели. При этом сами технологические щели следует засыпать рыхлой почвой, используя шлейфы. Все перечисленное, во-первых, позволяет повысить точность вождения, а, во-вторых, минимизировать потери влаги из почвы.

ГЛАВА 7  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ТЕХНОЛОГИЙ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ  
ДЛЯ ЛЕНТОЧНОГО ВНУТРИПОЧВЕННОГО  
ВНЕСЕНИЯ ГЕРБИЦИДОВ

7.1. Испытание распылителей

В основу методики и аппаратуры для испытаний распылителей положены стандарты ISO 5682-1:1996 и 5682-2:1997, которые в настоящее время приняты в России [340, 341], и Украиной. Ими нормируются методы испытаний и оценки характеристик распределения РЖ гидравлическими распылителями, используемыми в растениеводстве для химической защиты растений и внесения удобрений.

О специфике применения распылителей на орудиях для ВВГ вообще и о необходимости иметь нормированные двумерные характеристики распылителей такого назначения показано в работах [297, 303, 304]. Поскольку выше упомянутые стандарты [340, 341] снятие таких характеристик не предполагают, а предусмотренное ими оборудование для этого непригодно, то в регламент проведения испытаний внесены соответствующие изменения.

7.1.1. Стенд для испытания распылителей. Стенд для испытания распылителей (рис. 7.1) [343] представляет собой матрицу с пробирками 1, на которой закреплены две стойки 2 с подвижной балкой 3. Распылитель крепится в центральной части перемещаемой по высоте балки 3. Под этой балкой и распылителем располагается поворотное отводное устройство 4. РЖ подается к распылителю через канал 5. Представленный стенд является упрощенной версией уже известного [342].

В конструкцию стенда входит компрессор с ресивером, который частично заполняется РЖ. На ресивере имеется манометр для измерения давления и кран. Последний служит для коммутирования подачи РЖ в канал 5. В процессе испытания распылителя сначала включали компрессор, который доводит давление в ресивере до нормы. В это время отводное устройство 4 располагали под распылителем. Как только рабочее давление достигнуто, компрессор выключали и открывали подачу жидкости через канал 5 к распылителю. Когда распылитель выходил на установившийся режим работы, включали секундомер и быстро отворачивали отводное устройство 4 в сторону. По истечении минуты времени отводное устройство 4 также быстро возвращали назад, а подачу жидкости прекращали.

Далее каждую из пробирок взвешивали и вычитали собственный вес. Полученные цифры заносили в таблицу.

7.1.2. Основные положения методики подготовки распылителей к испытаниям и самих испытаний. Поскольку методика испытания распылителей базировалась на действующих стандартах [340, 341], то далее перечислим только оригинальные пункты, которые стандарту не соответствуют.

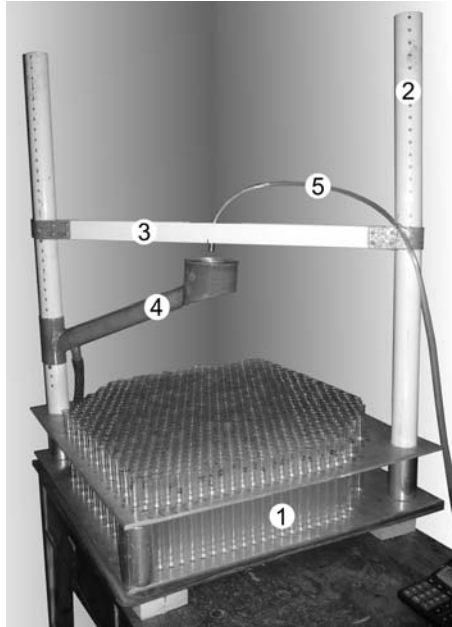


Рис. 7.1. Разработанный стенд для испытания распылителей: 1 — матрица с пробирками; 2 — стойка; 3 — подвижная балка крепления распылителей; 4 — поворотное отводное устройство; 5 — подводной канал

1. В процессе испытаний задействовали разработанный стенд (рис. 7.1) [342, 343].

2. Внутренний диаметр используемых пробирок составлял  $d_{\min} = 14,7$  мм, наружный —  $d_{\max} = 16,3$  мм, а средний —  $d = \frac{1}{2}(d_{\max} + d_{\min}) = 15,5$  мм. Все пробирки располагали по узлам прямоугольной сетки. Межцентровое расстояние между соседними пробирками по обоим измерениям было одинаковым и составляло  $\Delta x = \Delta y = 18$  мм. Поскольку края пробирок округлены по радиусу, равному половине толщины ее стенок, то считалось, что внутрь пробирки попадает жидкость, приходящаяся на круг с диаметром  $d = 15,5$  мм, который отождествлялся с ее поперечным сечением. Жидкость, попадающая в пространство между пробирками, учитывалась перерасчетом. Если  $m_{kl}$  — масса жидкости фактически попавшей в пробирку с номером  $k$  по горизонтали (вдоль абсциссы) и  $l$  по вертикали (вдоль ординаты), то учетная масса  $m_{kl}^*$  определялась так:

$$m_{kl}^* = \eta m_{kl}, \quad (7.1)$$

где коэффициент пересчета

$$\eta = \frac{4\Delta x \Delta y}{\pi d^2} = 1,717, \quad (7.2)$$

определяется как отношение площади  $\Delta x \Delta y$  квадрата, занятого пробиркой, к площади  $\pi d^2/4$  поперечного сечения самой пробирки. Тут индексы  $k$  и  $l$ , задаются сеткой  $\omega_{k,l} = \{x_k, y_l : a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a_2; b_1 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2\}$  на пятне распыла  $\omega$ , где все обозначения соответствуют принятым ранее в п.г. 5.2.

В таком случае общий расход жидкости через распылитель в единицу времени можно посчитать по формуле:

$$V = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m m_{kl}^*, \quad (7.3)$$

а единичный по времени расход жидкости  $f_{kl}$ , которая приходится на единицу площади пятна распыла  $\omega$  в точке с координатами  $x_k, y_l : a_1 = x_0 <$

$x_1 < \dots < x_n = a_2; b_1 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$  по формуле:

$$f_{kl} = \frac{4m_{kl}}{\pi d^2}. \quad (7.4)$$

3. Высота установки распылителя  $h$  в соответствии со стандартом [340] должна быть равной 300, 400, 500, 600, 700 или 800 мм. В п.г. 5.2 показано, что используя предлагаемую методику, можно пересчитать распределение жидкости по пятну распыла  $\omega$  для любого значения  $h$ . В связи с этим в экспериментах высота положения распылителя  $h$  выбиралась такой, при которой пятно распыла имеет максимальные размеры, но не выходит за пределы матрицы с пробирками. В большинстве случаев  $h$  равнялось 250 мм.

4. Стандартом [340] предполагается, что в испытаниях должно быть задействовано не менее 200 распылителей. Это требование связано с тем, что стандарт оценивает не только качество конструкции распылителя, а и надежность технологического процесса их изготовления. Поэтому заведомо понятно, что, с точки зрения серийного производства, примененные механические приемы изготовления распылителей не приемлемы. В связи с этим, в процессе испытаний оценивали только конструкцию распылителя и применяли ручную доводку каждого из них. Так, распылителей в соответствии с рис. 6.9 [297], за вычетом отбракованных, было испытано 16 шт. Их доводка предполагала правку сферы в конце канала проточной части распылителя. Для этого внутрь канала запрессовывали шарик диаметром 1,6 мм из шарикоподшипника. Чтобы щель распылителя при этом не расширилась, на выступающую часть распылителя предварительно одевали металлический бандаж. Если щель распылителя оказывалась прорезанной глубже положенного, то ее запаивали, а потом поправляли с помощью стальной проволоки соответствующего диаметра (0,3 мм). С помощью многократного повторения перечисленных манипуляций добивались максимального сходства параметров распылителей одного к другому. Очевидно, что для серийного производства эти методы не предназначены.

7.1.3. Характеристики прямооточных щелевых распылителей с прямоугольным шлицом. Из более сотни изготовленных в соответствии с рис. 6.4 распылителей для полевых экспериментов отобрали 16 шт. (два комплекта из расчета на восьмирядные машины). Их одномерные  $F(x)$  и двумерные  $f(x, y)$  характеристики распределения жидкости по ширине захвата приведены на рис. 7.2 и в прил. А на рис. А.1–А.8.

Из рисунков видно, что характеристики распылителей предлагаемой конструкции, в значительной мере, повторяют таковые для щелевых распылителей с треугольным шлицом (рис. 1.8,E; 1.8,F). Разница состоит в том, что в нашем случае пятно распыла более округлое по краям, а распределение жидкости по ширине захвата — более равномерное, т.е. вместо двух ломаных сторон равнобедренного треугольника, представляет собой выпуклую кривую. Если бы такой распылитель предполагалось использовать на штанговом орудии, то можно было бы говорить о его непригодности.



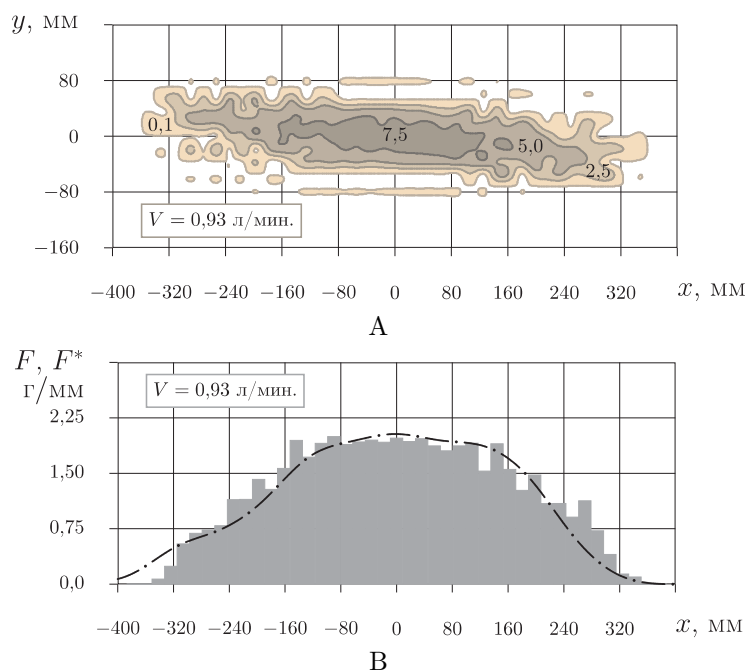


Рис. 7.2. Характеристики распылителя № 1: А — изолинии соответствуют количеству РЖ в граммах, которое приходится на квадрат  $\Delta x \times \Delta y = 18 \times 18 \text{ мм}^2$  площади пятна распыла, занятой одной пробиркой; В — гистограмма  $F(x)$  соответствует количеству РЖ в граммах, которое приходится на 1 мм ширины захвата, в случае вертикальной ориентации распылителя, а кривая линия  $F^*(x)$  соответствует полученному расчетным путем тому же распределению, но в случае, когда распылитель ориентирован под углом  $45^\circ$  к поверхности напыления. Параметры проведения эксперимента: высота установки распылителя —  $h = 250 \text{ мм}$ ; давление РЖ —  $P = 0,4 \text{ МПа}$ ; время испытания —  $\Delta t = 1 \text{ мин.}$

В нашем случае они предназначены для ВВГ, а, значит, чем больше равномерность распределения РЖ по ширине захвата, тем лучше. Более точных требований на параметры распределения РЖ по ширине полосы обработки применительно к ленточному внесению гербицидов агрономы не сформулировали. Идеальным является вовсе не равномерное распределение и уж тем более не треугольное, а такое, когда в центр полосы внесения попадает меньше РЖ, чем на ее края. Последний тезис требует агрономического подтверждения и в дальнейшем не затрагивается.

Из анализа графиков двумерного распределения (рис. 7.2, рис. А.1–А.8 с индексами А, С) видно, что все распылители имеют системные и случайные дефекты. К системным дефектам следует отнести перекося и изгиб цели, а к случайным — царапины, заусенцы и прочие микронеровности

на поверхностях проточных частей распылителей. Все дефекты связаны со спецификой технологии изготовления распылителей, хорошо заметны на графиках и проявляются в системных деформациях всего пятна распыла и бессистемных вариациях в его деталях.

Ореол мелких пятен с количеством жидкости в 0,1 г на одну пробирку (квадрат  $\Delta x \times \Delta y = 18 \times 18 \text{ мм}^2$ ), который присутствует на каждом пятне распыла на самом деле связан с математическими трудностями интерполяции вдоль границы пятна распыла. С помощью бикубического сплайна, который применялся для интерполяции, любой излом (в данном случае переход “не ноль — ноль”) неизбежно сглаживается. В виду конечности численных значений коэффициентов сплайна еще более трудно интерполировать поверхность, окружающую пятно распыла, где  $f(x, y) = \text{const} = 0$ . Ввиду вышеизложенного, мелкие пятна ореола окружающего пятна распыла в подавляющем большинстве случаев следует игнорировать.

В процессе испытаний и ручной доводки предлагаемых распылителей с прямоугольным шлицом (рис. 6.4) обнаружено важное отличие таких распылителей от известных с треугольным шлицом (рис. 1.8,E; 1.8,F). В процессе работы последних жидкость прекращает взаимодействие с элементами конструкции распылителя сразу же по выходу из сферы, которой заканчивается его проточная часть. В предлагаемых распылителях после выхода за пределы сферы жидкость продолжает двигаться между двумя параллельными поверхностями прямоугольного шлица. Чем длиннее этот путь, тем большее сопротивление испытывает жидкость. Таким образом, изменяя площадь и конфигурацию этих двух параллельных поверхностей можно управлять распределением жидкости. В техническом смысле это весьма простая задача. Площадь и конфигурация упомянутых поверхностей однозначно определяется формой и размерами наружной части распылителя в окрестностях вытока жидкости.

Так, если противоположный от резьбы торец распылителя дополнительно шлифовать, например, с 19,8 до 19,7 мм, то измеренное вдоль оси распылителя расстояние от границы сферы до дневной поверхности уменьшится на 0,1 мм. В результате проход жидкости в осевом направлении облегчится, общий ее расход увеличится, а в центральной части двумерной характеристики распылителя появится более ярко выраженный пик.

Увеличить количество РЖ, которая попадает на дальние края пятна распыла, можно, уменьшив внешний диаметр корпуса распылителя в области щели, например, с 4,0 до 3,9 мм, или увеличив наклон и размеры фаски. В таком случае облегчится продвижение жидкости в стороны и за счет этого будет достигнут желаемый эффект.

Эти две иллюстрации показывают, что манипулируя внешней формой распылителя в окрестностях его щели, можно радикальным образом менять параметры распределения жидкости по пятну распыла. Упомянутое обстоятельство использовали для достижения более точного совпадения характеристик всех задействованных в эксперименте распылителей. Добиться такого эффекта, применяя известные распылители с треугольным шлицом

(рис. 1.8,E; 1.8,F), нельзя. Подобный результат можно получить, если на одном распылителе использовать две особо сориентированные треугольные щели. Выполнить это можно только при наличии весьма сложного и дорогостоящего оборудования, а результат все равно будет хуже. Такой распылитель вместо одного отверстия будет иметь два меньших по площади, а значит, по сравнению с предлагаемым, будет более склонным к засорению.

На рис. 7.2, рис. А.1–А.8 с индексами В, D, кроме гистограммы, которая соответствует вертикальной ориентации распылителя, представлена штрих-пунктирная кривая, отражающая распределение жидкости по ширине захвата в случае наклона распылителя на  $45^\circ$ . Эта кривая построена с применением методики, изложенной в п.г. 5.2 (стр. 241–256). Как видим, эти кривые в большинстве случаев не соответствуют гистограммам. Пояняется такой результат наличием частных дефектов на двумерных распределениях каждого из распылителей. Из этого следует вывод, что в случае наклонной ориентации распылителей, требования на их качество и точность изготовления весьма значительно возрастают.

В процессе испытания распылителей обнаружено (рис. 7.3), что угол раствора  $\theta$  факела распыла РЖ зависит от величины ее давления  $P$ . Меж-

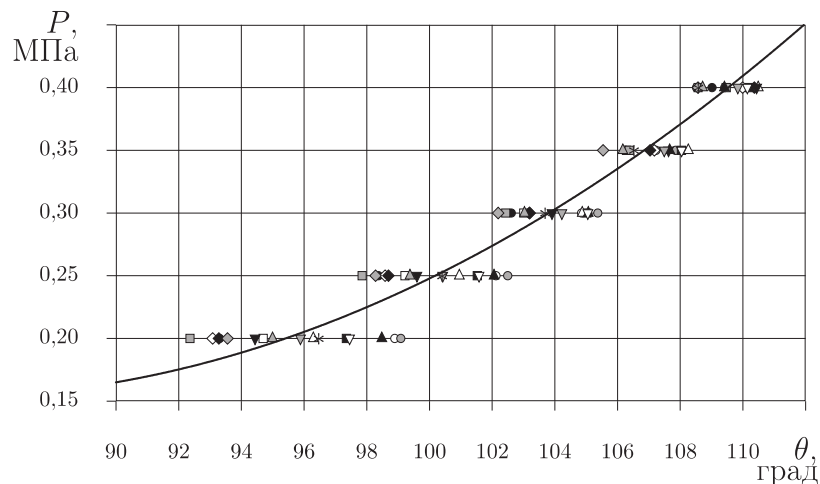


Рис. 7.3. Зависимость между рабочим давлением  $P$  и углом раствора  $\theta$  факела распыла. Каждому из шестнадцати распылителей соответствует своя по форме и цвету точка. График аппроксимирует средние значения  $\theta$

ду собой они связаны почти линейной (с учетом величин коэффициентов) зависимостью:

$$P = C_2\theta^2 - C_1\theta + C_0, \quad (7.5)$$

где  $C_0 = 2,965995$ ;  $C_1 = -0,066582$ ;  $C_2 = 0,000394$ . Для практики это обстоятельство существенного значения не имеет. Ведь при изменении давления в 2 раза угол раствора меняется весьма незначительно, т.е. при давлении

$P \in [0,2; 0,4]$  величина угла  $\theta$  попадает в интервал  $[92,35; 110,49]$ . Справедливо ожидать, что в случае более качественного изготовления распылителей этот интервал будет еще уже.

Иначе обстоят дела с минутным расходом  $V$  РЖ. Как видно из рис. 7.4, взаимозависимость между расходом  $V$  и давлением  $P$  куда более значи-

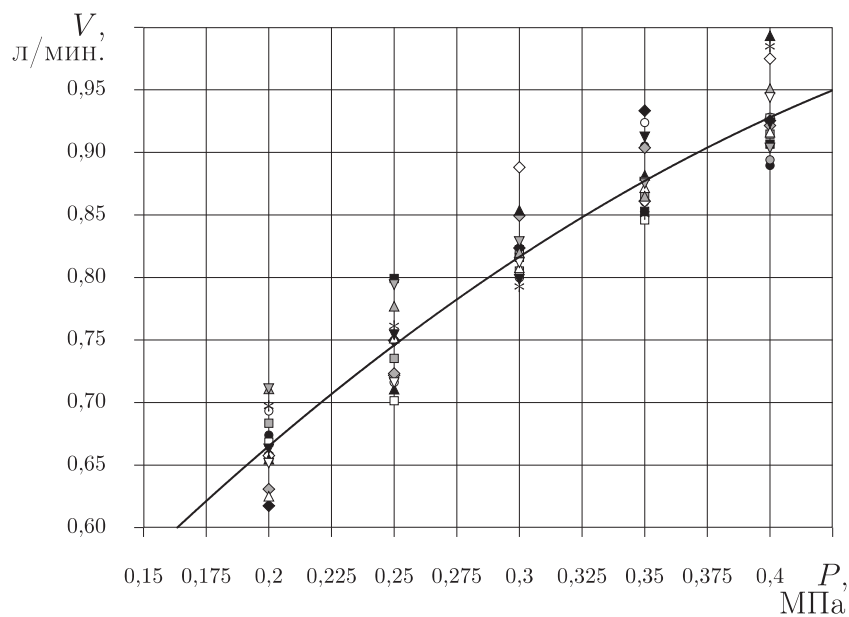


Рис. 7.4. Зависимость между рабочим давлением  $P$  и минутным расходом  $V$  рабочей жидкости. Каждому из шестнадцати распылителей соответствует своя по форме и цвету точка. График аппроксимирует средние значения  $V$

тельна. Аппроксимирует ее следующее выражение:

$$V = C_2 P^2 - C_1 P + C_0, \quad (7.6)$$

где  $C_0 = 0,229471$ ;  $C_1 = 2,592901$ ;  $C_2 = -2,093916$ . Для группы испытанных распылителей при изменении давления  $P$  в пределах от 0,2 до 0,4 МПа минутный расход  $V$  РЖ варьировал в пределах от 0,62 до 0,99 л/мин., т.е. изменялся почти на половину. В табл. 7.1 приведены статистические данные по минутному расходу жидкости экспериментальными щелевыми распылителями с прямоугольным щлицем.

Большая зависимость между минутным расходом  $V$  РЖ и давлением  $P$  указывает на то, что в конструкциях гидравлических схем машин для ленточного внесения гербицидов нежелательно применять дозирование по давлению. Это связано с тем, что гидравлическое сопротивление каналов подвода жидкости к каждому из распылителей всегда разное, а, значит, нет

Таблица 7.1

**Статистические данные по минутному расходу жидкости  
экспериментальными щелевыми распылителями  
с прямоугольным шлицем (рис. 6.4)**

Рабочее давление, в МПа	Расход жидкости (в г/мин.):			Среднее квадратическое отклонение	Доверительный интервал для среднего
	минимальный	максимальный	средний		
0,2	617,44	712,32	665,86	28,41	±13,92
0,25	701,45	799,16	742,57	29,80	±14,60
0,3	793,23	888,09	822,24	23,92	±11,72
0,35	846,05	933,34	880,27	27,28	±13,37
0,4	889,53	991,99	931,15	30,76	±15,07

оснований полагать, что расход РЖ будет одинаковым. Наиболее эффективный выход из сложившейся ситуации — это применение индивидуального объемного дозирования по каждому из распылителей.

**7.2. Радиоизотопный эксперимент по исследованию конечного  
распределения рабочей жидкости при ее внутрипочвенном  
внесении разработанными рабочими органами**

7.2.1. Полевая исследовательская машина. Полевой исследовательский агрегат (рис. 7.5,А), предназначенный для оценки качества распределения РЖ под слоем почвы в случае применения разработанных РО и технологий состоял из трактора МТЗ-80 и специально разработанной навесной исследовательской машины (НИМ). В ее основе — культиватор растениепитатель КРН-4.2 с укороченной до 1,7 м рамой 1 и двумя стандартными рабочими секциями 2, которые установлены из расчета на междурядья 0,7 м. На раме закреплены два щелевателя-направителя 3 конструкции ВНИИОБ [37, 39]. Располагаются они на расстоянии 1,4 м друг от друга симметрично продольной оси агрегата. Поскольку на раме культиватора предполагали установить сидение исследователя 4 и ряд другого оборудования 5—10, то крепление рамки навесного устройства сдвинуто вперед. Таким образом, на машине удалось расположить ресивер 5, емкость для воды 6 и емкость для меченой изотопом РЖ 7. Между собой эти емкости соединены рядом трубопроводов. Управление подачей воздуха, воды и меченого раствора выполняли с помощью трех кранов 8. Для контроля уровня меченого раствора в емкости 7 предназначено мерное окно 9. Давление воздуха и РЖ в системе контролировали манометром 10. Сжатый воздух от компрессора трактора подается к машине по гибкому трубопроводу 11. В конечном итоге РЖ (вода или меченый изотопом раствор) подается через систему трубопроводов 12 к испытуемым РО 13.

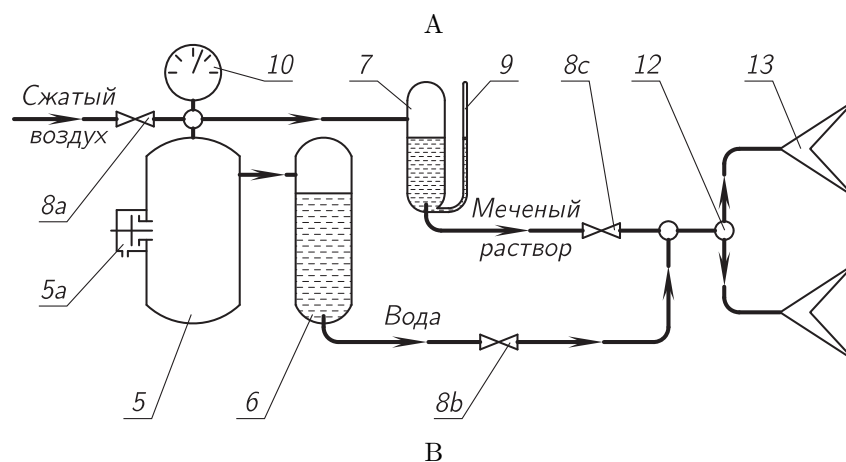
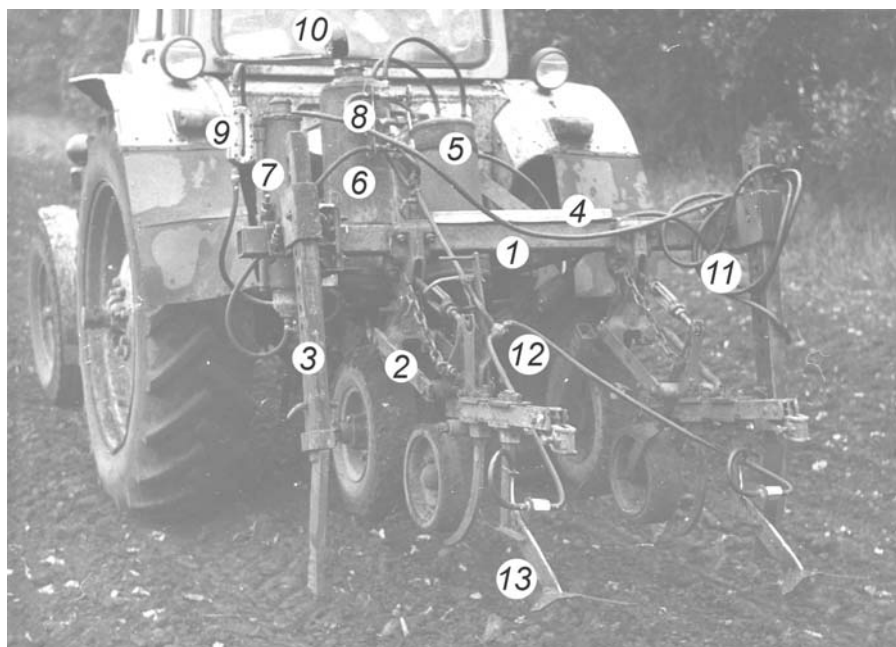


Рис. 7.5. Исследовательский агрегат (А) и принципиальная схема навесной исследовательской машины (В): 1 — рама; 2 — секция культиватора КРН-4.2; 3 — щелеватель-направитель; 4 — рабочее место оператора; 5 — ресивер; 5а — предохранительный клапан; 6 и 7 — емкости для воды и меченого раствора; 8 — краны управления подачей сжатого воздуха (8а), воды (8b) и меченого раствора (8с); 9 — указатель уровня; 10 — манометр; 11 — трубопровод для подвода сжатого воздуха; 12 — система трубопроводов для подачи РЖ к РО; 13 — РО для ЛВВ гербицидов

Принципиальная схема НИМ представлена на рис. 7.5,В [325]. Для подготовки к работе ее переводили в транспортное положение, испытуемые РО 13 устанавливали на свое место, краны 8b и 8с закрывали, а емкости 6 и 7 на 60–70% заполняли чистой водой. Далее гибкий шланг 11 присоединяли к компрессору трактора, и открывали кран 8a для подачи сжатого воздуха в ресивер 5. Двигатель трактора запускали и включали подачу сжатого воздуха в систему машины. Трактор при этом оставляли неподвижным. Как только показания манометра 10 достигало требуемой величины, подачу воздуха прекращали, закрыв кран 8a. Дальше поочередно открывали и закрывали краны 8b и 8с подачи воды из емкостей 6 и 7. Так продолжали до полного удаления воздуха из гидравлической части системы машины. После этого все краны закрывали и медленно, открыв заливные пробки емкостей 6 и 7, стравливали воздух из пневматической системы машины. Далее, в емкость 7 заливали маточный раствор меченой изотопом жидкости и доливали воду в емкости 6 и 7, доводя общее количество жидкости до прежнего уровня. Воспользовавшись механической мешалкой, через открытую заливную горловину емкости 7 тщательно перемешивали меченую изотопом РЖ. Заливные пробки емкостей 6 и 7 устанавливают на место и рабочее давление воздуха снова доводят до заданной величины. В таком состоянии машина готова к испытаниям.

В процессе самих испытаний вначале вносили чистую воду из емкости 6. Затем, не прекращая подачу чистой воды, открывали подачу меченой изотопом РЖ из емкости 7 и уже затем прекращали подачу чистой воды из емкости 6. Компрессор трактора при этом не использовали. К РО 13 вода или меченая РЖ подается за счет давления воздуха в ресивере 5. Движение агрегата продолжали до полного расходования меченой РЖ.

**7.2.2. Мерительный инструментарий и приборы.** Поскольку проведение испытаний с применением НИМ предполагает длительный переходный период движения, когда РО находятся в рабочем состоянии, а вносимая жидкость постепенно заменяется из воды на меченую изотопом РЖ, то встает вопрос, как найти то начальное место, где система вышла на номинальный режим работы. Очевидно, что лучше всего для этого подходит сцинтилляционный радиометр СРП-68-01 (рис. 7.6), который производителем изначально позиционируется как универсальный поисковый прибор, предназначенный для быстрого нахождения границ и мест локализации радиоактивности по мощности излучения.

В качестве основного прибора для оценки равномерности распределения меченой изотопом РЖ в пределах обработанной полосы без выемки проб из почвы и без какого либо вмешательства в нее, использовали радионуклидный анализатор NC-482В болгарского производства (рис. 7.7,А) со сцинтилляционным детектором ND-484В (рис. 7.7,В; 7.8,А) [297, 325].

Созданный на основе прибора NC-482В полевой мерительный комплект для двухкоординатных измерений представлен на рис. 7.7,В, 7.8,С. Его состав понятен из рисунка. Анализатор 1 вместе со сцинтиблоком 2 пред-



Рис. 7.6. Сцинтилляционный радиометр поисковый СРП-68-01

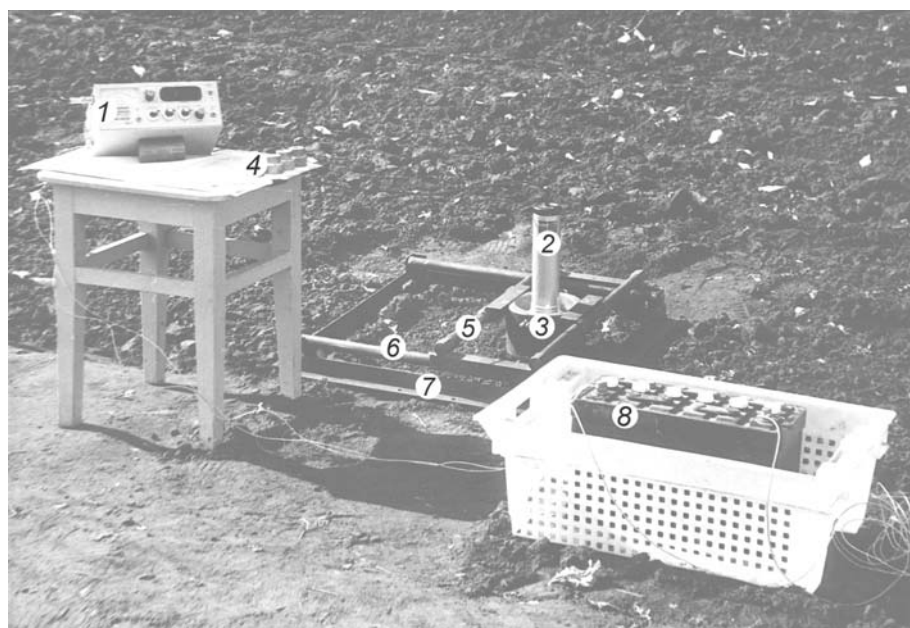
назначены для селективирования и регистрации ионизирующего  $\beta$  или  $\gamma$ -излучения в определенном диапазоне энергий. Прибор NS-482B позволяет устанавливать и автоматически контролировать временной интервал ( $\geq 1$  с), в течение которого проводятся измерения. Чтобы защитить сцинтиллок от фонового излучения и повысить осевую направленность измерений, основа каретки 3 выполнена в виде биметаллического стакана — сталь 4 мм снаружи и свинец от 15 мм внутри цилиндрической части до 35 мм, напротив входного окна детектора. Размеры стакана согласованы с размерами сцинтиблока так, что последний вставляется внутрь первого с минимальным зазором. Напротив входного окна сцинтиблока 2, т.е. в центре днища стакана каретки, выполнено сквозное ступенчатое отверстие, предназначенное для размещения сменных коллимирующих вставок 4 с осевым отверстием 5, 7, 10 и 14 мм (рис. 7.7,А; 7.8,В).

Каретка 3 установлена на круглых трубчатых направляющих балки 5, а та — на таких же направляющих 6 рамки 7. Таким образом, каретка 3 совместно со сцинтиблоком 2 получили возможность перемещения в плоскости и пределах рамки 7. Вдоль каждой из направляющих с шагом 20 мм просверлены вертикальные отверстия, которые согласуются с отверстиями в проушинах каретки 3 и балки 5. При совмещении отверстий в направляющих и проушинах в них помещаются вставные штифты. Все эти отверстия и штифты предназначены для фиксации положения сцинтиблока 2 в узлах ортогональной координатной сетки соответствующего шага.





А



В

Рис. 7.7. Сцинтилляционный радионуклидный анализатор NC-482В (А) и полевой мерительный комплект для двухкоординатных измерений (В): 1 — анализатор NC-482В; 2 — сцинтиблок ND-484В; 3 — каретка; 4 — набор свинцовых коллиматорных вставок; 5 — балка подвижная; 6 — направляющая; 7 — рамка; 8 — аккумуляторная батарея 6СТ-132

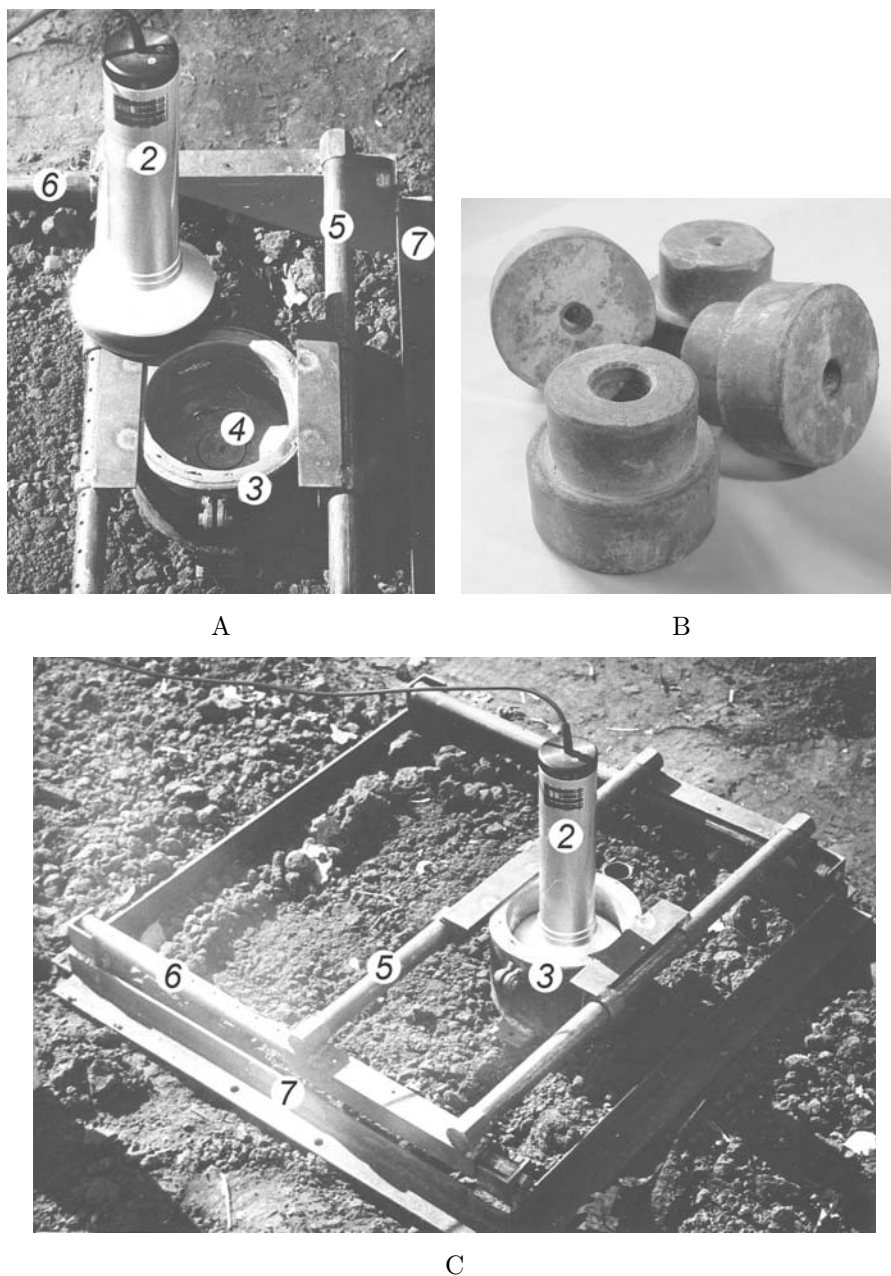


Рис. 7.8. Сцинтиллок ND-484В вне каретки (А), свинцовые коллиматорные вставки (В) и мерительная рамка в состоянии двухкоординатных измерений (С): 2 — сцинтиллок ND-484В; 3 — каретка; 4 — свинцовая коллиматорная вставка; 5 — балка подвижная; 6 — направляющая; 7 — рамка

Аккумуляторная батарея БСТ-132 выполняла функцию полевого блока питания. В лабораторных условиях прибор НС-482В предполагал питание от электросети переменного тока напряжением 220 В.

На рис. 7.9 показаны устройство для выемки проб из почвы, а также мерительная рамка, подготовленная для однокоординатных измерений. Назначение этого комплекта состоит в оценке глубины внесения препарата путем выемки проб грунта и последующего поиска уровня локализации радиоактивности по мощности излучения.

Устройство для выемки проб из почвы (рис. 7.9,А и 7.9,В) состоит из двух частей: пробника 10 и черенка 11. Основу пробника составляет тонкостенная труба из нержавеющей стали: толщина стенки 2 мм, наружный диаметр 45 мм, длина 320 мм. На 250 мм ее длины выполнен продольный разрез шириною 4 мм. Свободный конец трубы пробника заточен под конус. К черенку пробник крепится путем штекерного соединения. Чуть ниже этого соединения установлен упор. Для выемки пробы пробник опускали свободным концом на землю, ориентируя его вертикально, и, воспользовавшись упором, ногой вдавливали в почву. Глубина погружения пробника не должна превышать длину боковой щели. Вынимали пробник после предварительного наклона. Почву из пробника не извлекали, а сам пробник отсоединяли от черенка. После этого проба готова к измерениям.

Для измерений использовали уже описанную выше мерительную рамку (рис. 7.9,С и 7.9,Д). В данном случае она перенастраивается под однокоординатные измерения, для чего в ее средней части устанавливали ложе 9, внутрь которого укладывали пробник 10 с пробой. Размеры и конструкция всех этих устройств согласованы таким образом, что прорезь в трубе пробника 10 располагается строго сверху и горизонтально, а также симметрично подвижной балке 5. В процессе измерений перемещали только каретку 3 с детектором 2.

Лабораторная мерительная установка (рис. 7.10) построена на основе того же анализатора НС-482В 1 и сцинтиблока ND-484В 2, который установлен внутри известной каретки 3, а та закреплена на стойке 4. Теперь сцинтиблок 2 вместе с кареткой 3 могут перемещаться в вертикальном направлении над горизонтальным координатным столиком 5. Радиоактивную пробу 6 располагали в чашке Петри под сцинтиблоком 2, ориентируясь на координатную сетку столика 5. В комплект также входят сменные свинцовые коллиматорные вставки 7. Для того, чтобы иметь возможность накрывать пробу 6 слоем почвы определенной толщины с шагом в 10 мм, предусмотрен набор из 10 шт. стальных надставных колец 8 (рис. 7.10,В). Эти кольца имеют внутренний диаметр 50 мм. Устанавливаются они одно на другое с перекрытием в 2 мм и тем самоцентрируются.

В процессе подготовки пробы к измерениям, вначале ее укладывали на дно чашки Петри строго по центру. В таком состоянии проба готова к измерениям ее собственной активности. После проведения первой серии измерений в ту же чашку тоже по центру укладывали первое надставное кольцо и засыпали его почвой, которую затем слегка уплотняли и выравнивали. В

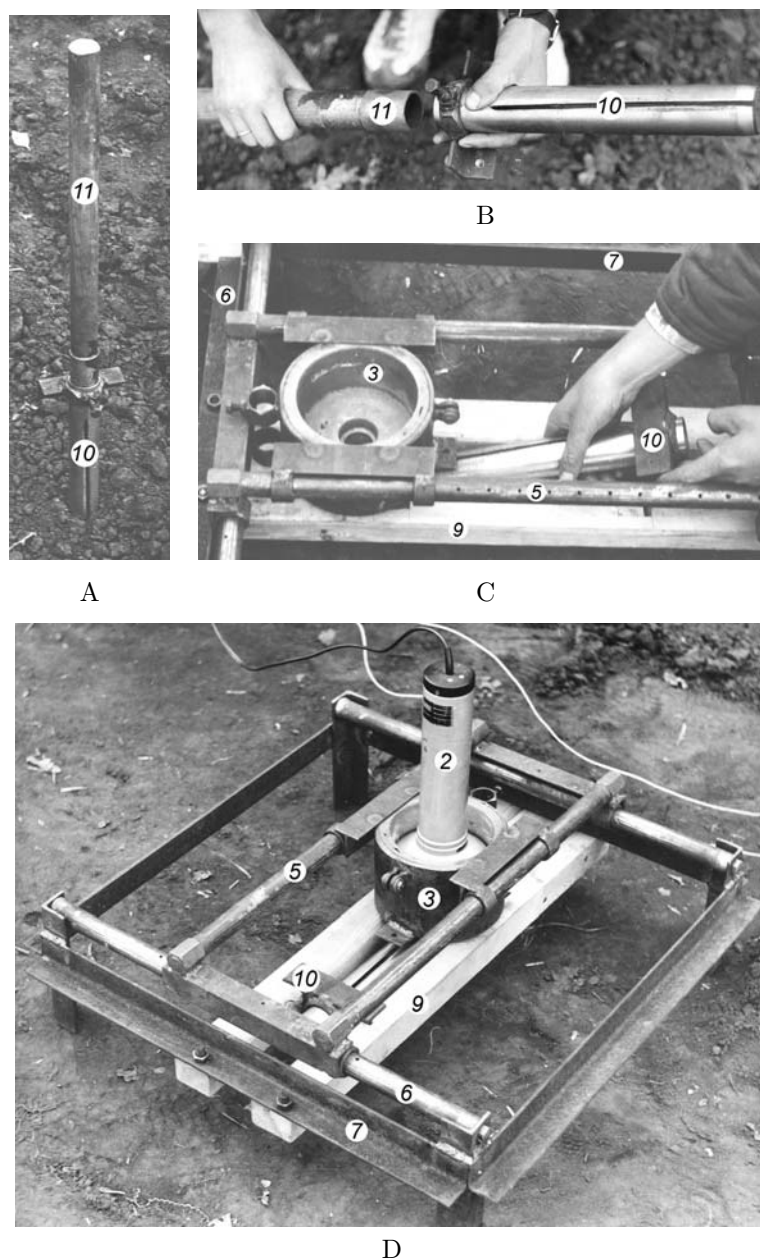


Рис. 7.9. Устройство для выемки проб из почвы (А и В — в рабочем и разобранном состояниях), а также мерительная рамка, подготовленная для однокоординатных измерений (С и D — в процессе подготовки и готовом состоянии): 2 — сантиметр ND-484В; 3 — каретка; 5 — балка подвижная; 6 — направляющая; 7 — рамка; 9 — ложе; 10 — пробник; 11 — черенок

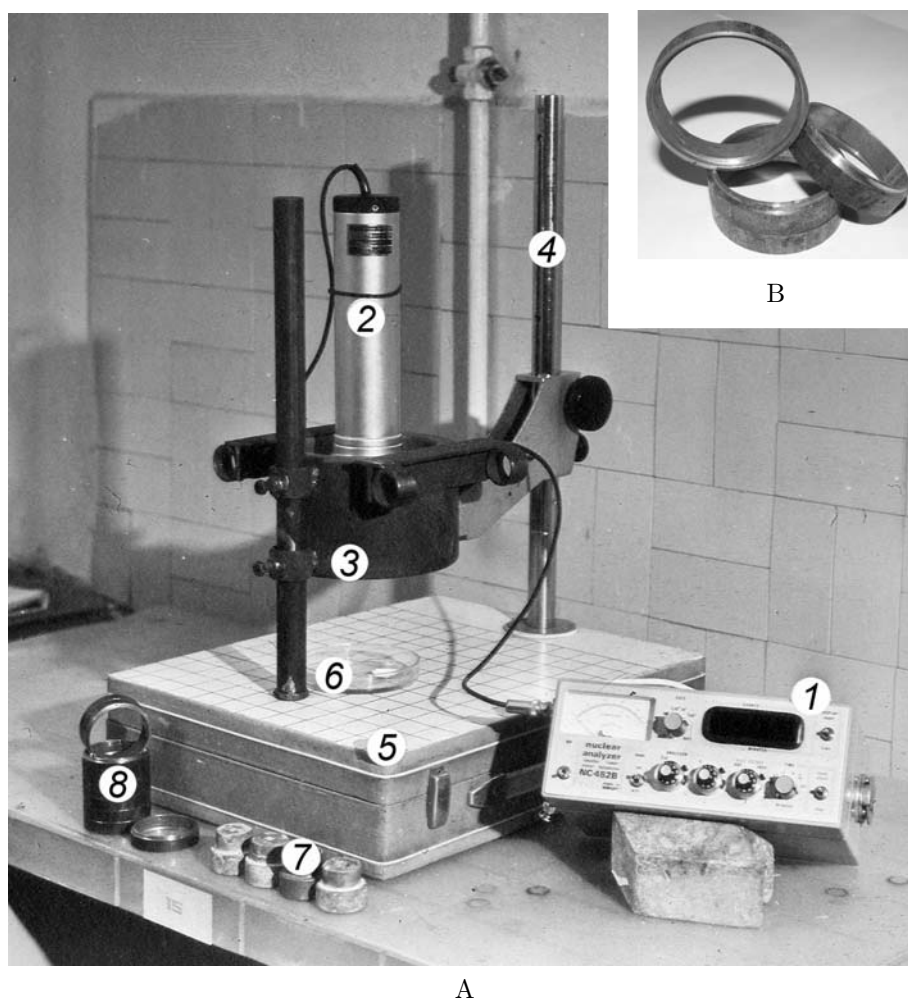


Рис. 7.10. Лабораторная мерительная установка (А) и надставные кольца (В): 1 — анализатор NC-482В; 2 — сцинтиблок ND-484В; 3 — каретка; 4 — стойка; 5 — стол координатный; 6 — проба с радиоактивностью; 7 — набор свинцовых коллиматорных вставок (4 шт.); 8 — кольца надставные (10 шт.)

таком состоянии проба готова к новой серии измерений, в процессе проведения которых оценивается проникающая способность излучения выбранного изотопа сквозь слой почвы высотой в 10 мм. Далее добавляют следующее кольцо и также засыпают почвой. Процесс повторяют, пока это необходимо.

Для того, чтобы подготовить РО 1 (рис. 7.11,А) к испытаниям, необходимо иметь возможность оценки ориентации распылителей, для чего разработаны специальная методика и устройство 2 [297].

Их суть (рис. 7.11) состоит в следующем. Под стрельчатой лапой 4, напротив распылителя 5 располагали емкость 6 (обычное бытовое ведро), оборудованную плоской перегородкой 7 внутри. Перегородку 7 ориентировали строго перпендикулярно к плоскости симметрии лапы 4 и в притык к ее режущим кромкам. В процессе замеров, включив подачу РЖ, отыскивали такое положение емкости 6, в котором ее плоская перегородка 7 делила бы ФР пополам. Доказательством того, что такое положение найдено является равная скорость поступления РЖ в обе части емкости 6, или, что то же самое, измеренный мерным стаканом 3 равный объем РЖ, скопившейся по обе стороны перегородки 7 за период замера (одну минуту). Когда место пересечения ФР плоскости резания (расстояние  $l_k$ ) найдено, по известной высоте  $h_k$  установки сопла распылителя 5 над той же плоскостью, вычисляют искомое значение угла  $\Delta = \arctg(h_k/l_k)$ . Таким же способом определяется и угол  $\eta$  вертикального раствора ФР.

7.2.3. Выбор радионуклида. Как известно *изотопы* — разновидности атомов одного химического элемента с разным количеством нейтронов в ядре. Химические свойства атома зависят практически только от строения электронной оболочки, которая, в свою очередь, определяется в основном зарядом ядра (т.е. количеством протонов в нем) и почти не зависит от его массового числа (т.е. суммарного числа протонов и нейтронов). Все изотопы одного элемента имеют одинаковый заряд ядра, отличаясь лишь числом нейтронов. Обычно изотоп обозначается символом химического элемента, к которому он относится, с добавлением верхнего левого индекса, означающего массовое число (например,  $^{32}P$ ). Можно также написать название элемента с добавлением через дефис массового числа (например, фосфор-32). В последнее время для обозначения атомов одного химического элемента с одинаковой атомной массой чаще используется термин *нуклид*, а термин *изотопы* рекомендуется применять для обозначения совокупности нуклидов одного элемента. Так правильно сказать, что два нуклида фосфор-32 и фосфор-33 являются изотопами фосфора.

Нуклиды делятся на *стабильные* и *радиоактивные (радионуклиды)*. Стабильные нуклиды не испытывают спонтанных радиоактивных превращений из основного состояния ядра. Радионуклиды путем радиоактивных превращений переходят в другие нуклиды. В зависимости от типа распада образуется нуклид того же самого или другого элемента [347]. Например  $\beta$ -распад  $^{32}P$  происходит на основное состояние  $^{32}S$  (стабильный нуклид серы). У фосфора стабильным является  $^{31}P$ .

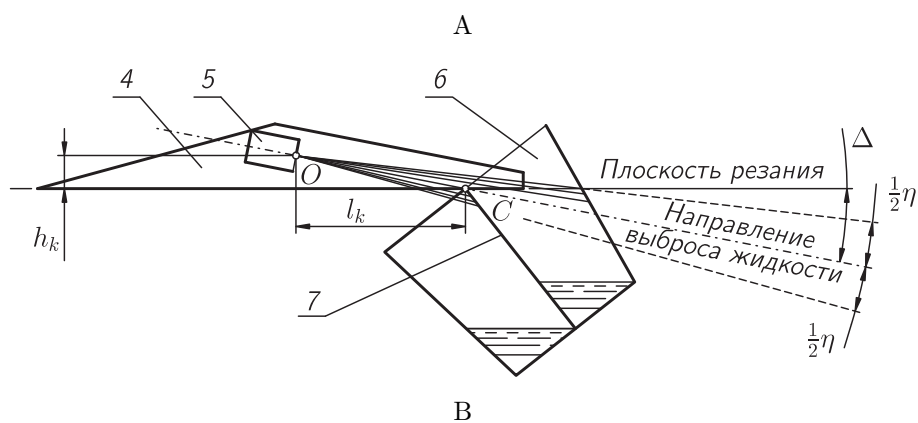
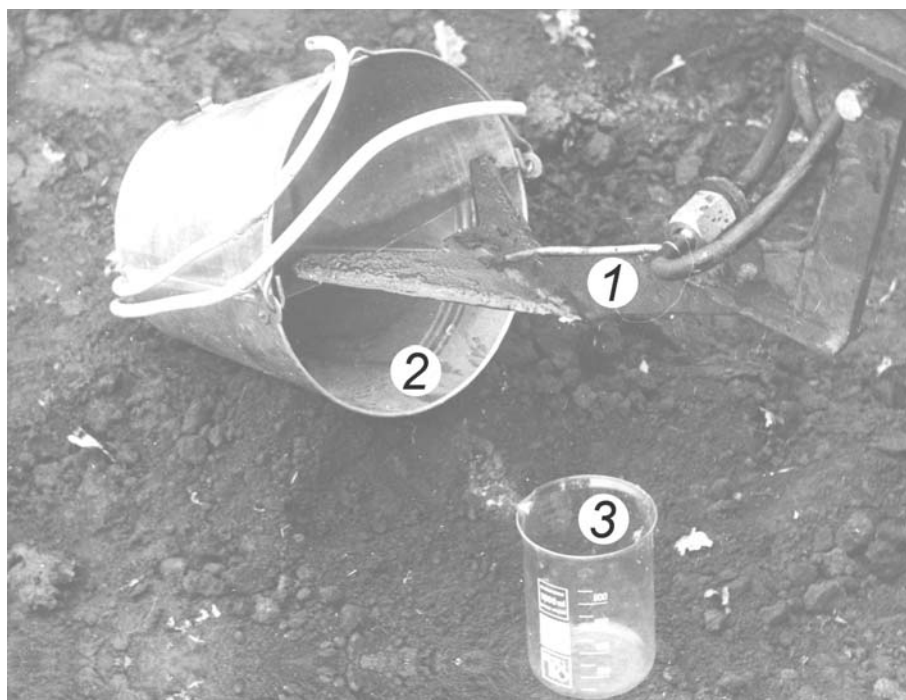


Рис. 7.11. Устройство для регулировки угла наклона распылителя: (А — в действии; В — схема устройства и применения) 1 — рабочий орган для ЛВВГ в сборе; 2 — устройство для оценки угла наклона распылителя в сборе; 3 — мерный стакан; 4 — стрельчатая лапа; 5 — распылитель; 6 — емкость (ведро); 7 — перегородка

Процесс радиоактивных превращений нестабильных нуклидов сопровождается ионизирующим излучением, т.е. испусканием коротковолнового электромагнитного рентгеновского и  $\gamma$ -излучения, заряженных или незаряженных частиц [348–353]. Перечислять и тем более анализировать все известные виды ионизирующего излучения не будем, скажем только, что применительно к нашей задаче оценки распределения РЖ под слоем почвы наибольший интерес представляют  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучение [354, 355], т.к. имеют достаточную проникающую способность (сквозь почву) и относительно легко могут быть зарегистрированными.

•  $\beta$ -излучение. В случае с  $\beta$ -излучением тезис о достаточной проникающей способности не совсем очевиден. Чтобы разобраться с этим, изучим специфику взаимодействия  $\beta$ -частиц с веществом. При этом оговорим, что из  $\beta$ -частиц будем рассматривать только электроны ( $\beta^-$ -излучение), а позитроны ( $\beta^+$ -излучение) из рассмотрения исключим. В этой связи обозначения  $\beta$  и  $\beta^-$  условимся считать эквивалентными.

Электроны, движущиеся в веществе, взаимодействуют с его атомами, в результате чего теряют свою энергию и отклоняются от первоначального направления, т. е. рассеиваются. Рассеяние называется упругим, если сохраняется сумма кинетических энергий взаимодействующих частиц. Всякое иное рассеяние называется неупругим. Следует различать взаимодействие электронов с атомными электронами и атомными ядрами.

Взаимодействие  $\beta$ -частиц с атомными электронами приводит к передаче атомному электрону некоторой энергии, следствием чего является либо ионизация, либо возбуждение атома. Оба вида передачи энергии имеют примерно равную вероятность и объединяются под общим названием “ионизационные потери энергии”. Процесс потери энергии электроном сопровождается изменением его направления движения и замедлением.

С достаточной для наших целей строгостью можно утверждать, что пробег электронов при прохождении слоя вещества зависит только от их начальной энергии  $E$  и плотности  $\rho$  вещества. Пробег электронов с равной начальной энергией  $E$  в различных веществах с одинаковой плотностью  $\rho$  приблизительно одинаков. Поэтому за меру толщины вещества, взаимодействующего с электронами, берут произведение линейной толщины и плотности вещества  $\rho$ , и выражают пробег в единицах г/см<sup>2</sup>.

При взаимодействии  $\beta$ -частиц с ядрами происходят процессы упругого и неупругого рассеяния электронов в кулоновском поле ядра.

Упругое рассеяние  $\beta$ -частиц приводит к изменению направления их движения вплоть до обратного. Средний угол их рассеяния в начале пропорционален толщине облучаемого слоя, но достигнув 33°, при дальнейшем увеличении толщины остается постоянным [356].

Неупругие процессы при взаимодействии электрона с ядром связаны с испусканием электромагнитного излучения, возникающего при ускорении электрона в кулоновском поле ядра. Рожденное в таком процессе  $\gamma$ -излучение является *тормозным* [357–360]. Потеря энергии электрона на тормозное излучение называется радиационной.



При больших энергиях падающих электронов преобладают потери на излучение. С уменьшением их энергии роль ионизации увеличивается.

С точки зрения нашего эксперимента именно тормозное излучение представляет интерес. Т.е. несмотря на то, что начальное  $\beta$ -излучение может быть полностью поглощено почвой, тормозное  $\gamma$ -излучение будет гарантировано проникать через нее и может быть зарегистрированным. Вероятность образования тормозного излучения пропорциональна квадрату заряда ядра-мишени. Для обозначенного выше эксперимента это скорее негативный фактор. Ведь в почве тяжелых элементов мало, а значит нет оснований ожидать интенсивное тормозное излучение. Последнее тем более справедливо и потому, что для электронов, испускаемых при радиоактивном распаде, радиационные потери в общем балансе потерь играют незначительную роль, так как значения энергии  $\beta$ -распада обычно не превышают 5 МэВ [357–360]. Компенсировать это обстоятельство можно за счет повышения концентрации  $\beta$ -источника в РЖ.

Ориентация на тормозное излучение в случае проведения эксперимента по изучению распределения вещества под слоем почвы не выгодна и потому, что точка зарождения тормозного  $\gamma$ -кванта не совпадает с точкой испускания породившего его электрона. Т.е. вначале исходящие из одной точки электроны разлетаются в некотором объеме, а уже потом в массе точек этого объема зарождаются тормозные  $\gamma$ -кванты, которые позже и будут зарегистрированы. Из этого следует, что применение  $\beta$ -источников неизбежно приведет к существенному сглаживанию картинки реального распределения вещества под слоем почвы. Тем не менее, с учетом претензий на точность и целей исследования, возможность применения в таком эксперименте  $\beta$ -источников отвергать не следует. Если такой эксперимент рассматривать как инструмент для измерения качества распределения вещества под слоем почвы с применением количественных оценок и к тому же выполненным в разное время и в разных условиях, то скорее всего точности будет не достаточно. Если же в результате исследований необходимо сделать выбор по типу “хуже – лучше” и применительно к экспериментам, выполняющимся в одно время в одних и тех же условиях, то все будет зависеть от того, на сколько разнятся сравниваемые распределения. Даже небольшая разница, повторяющаяся во всех повторностях опыта, будет указывать на объективность выводов. В любом случае на сегодняшний момент более точной альтернативы для проведения подобных экспериментов нет, если, конечно же, не считать альтернативой применение  $\gamma$ -источников.

- $\gamma$ -излучение испускается при переходах между возбужденными состояниями атомных ядер (энергии таких  $\gamma$ -квантов лежат в диапазоне от  $\sim 1$  кэВ до десятков МэВ), при ядерных реакциях (например, при аннигиляции электрона и позитрона, распаде нейтрального пиона и т.д.), а также при отклонении энергичных заряженных частиц в магнитных и электрических полях. Для нас важно, что  $\gamma$ -лучи в отличие от  $\alpha$ - и  $\beta$ -лучей не отклоняются электрическими и магнитными полями и характеризуются большей проникающей способностью при равных энергиях и прочих условиях.

Из последнего тезиса следует, что применение в нашем эксперименте  $\gamma$ -источников наряду с прочим позволяет не беспокоиться о неоднородностях покровного слоя почвы. В случае высокой эффективности регистрирующей аппаратуры точность эксперимента будет достаточной. Проблема в аппаратуре. Если излучение имеет высокую проникающую способность, то это означает, что высока вероятность, что оно будет проходить через детекторы не зарегистрировавшись. Выход один — применять тяжелые твердотельные сцинтилляционные детекторы. Последние, особенно в совокупности с применением спектрометрии вместо детектирования, способны самым радикальным образом улучшить качество экспериментов. В таком случае минус только один — большая, порой недостижимая для сельскохозяйственной науки, стоимость эксперимента.

- Сотрудничая с Отделом радиохимии и радиэкологии НИИ Химии при Харьковском национальном университете имени В.Н.Каразина, получена возможность использовать в экспериментах нуклид  $^{32}\text{P}$  в составе 85% водного раствора ортофосфорной кислоты ( $\text{H}_3\text{PO}_4$ ). Это бесцветная сиропообразная жидкость без запаха.

Недостаток такой препаративной формы состоит в том, что она способна вступать в химическую реакцию с корродирующими элементами конструкции исследовательской установки, если те выполнены из черных металлов. Так, ржавчина, которая состоит из смеси оксида железа  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  и гидроксидов железа  $\text{FeO}(\text{OH})$ , преобразуется в ортофосфат железа  $\text{FePO}_4$ . В результате радионуклид  $^{32}\text{P}$  закрепится на поверхности деталей в составе достаточно прочной пленки и не попадет по назначению. Этот фактор необходимо учитывать.

Как радионуклид  $^{32}\text{P}$  — чистый  $\beta^-$ -источник с непрерывным спектром. Максимальная энергия излучаемых электронов 1710,66 кэВ, а средняя — 694,9 кэВ. Период полураспада  $^{32}\text{P}$  составляет 14,262 суток [361]. Результаты исследований, проведенных с применением этого радионуклида, содержатся в работе [297].

- В сотрудничестве с НТК “Институт монокристаллов” НАН Украины (г. Харьков), реализована возможность проведения экспериментов с радионуклидом  $^{99m}\text{Tc}$  — это ядерный изомер технеция-99. Ядра этих изотопов идентичны по нуклонному составу, но различаются по радиоактивным свойствам. Ядро  $^{99m}\text{Tc}$  имеет более высокую энергию, и, теряя ее в виде кванта  $\gamma$ -излучения, переходит в ядро  $^{99}\text{Tc}$ .  $^{99m}\text{Tc}$  — короткоживущий  $\gamma$ -излучатель с периодом полураспада 6,02 часа. В спектре излучения доминируют  $\gamma$ -кванты с энергиями 140,466 КэВ. Вероятность выхода  $\gamma$ -квантов с энергиями 2,147 и 142,675 КэВ на 12 и 3 порядка ниже. Поэтому их присутствие в спектре можно не учитывать.  $^{99}\text{Tc}$  — чисто  $\beta^-$ -излучатель с энергией 0,293 МэВ и периодом полураспада  $2,12 \times 10^5$  лет [361–363].

Радионуклид технеций-99m в форме пертехнетата натрия  $\text{NaTcO}_4$  в составе водных растворов хлорида натрия  $\text{NaCl}$  нашел очень широкое применение в диагностической медицине. Разработаны относительно дешевые способы его получения “на месте”, т.е. непосредственно в медицинском диа-

гностическом центре или профильном научно-исследовательском учреждении. В связи с последним эта препаративная форма технеция-99m весьма доступна. Поскольку эксперименты проводили в течение суток и меньше, то с учетом доступности препарата, его основной недостаток, связанный с малым периодом полураспада, трудностей не создавал.

7.2.4. Совершенствование регистрирующей аппаратуры. Как уже отмечалось выше,  $\gamma$ -излучение имеет высокую проникающую способность. С точки зрения нивелирования неоднородностей покровного слоя почвы это фактор — положительный, а с точки зрения регистрации — отрицательный. Чем выше эффективность измерений (процент зарегистрированных  $\gamma$ -квантов), тем меньше  $\gamma$ -квантов, которые теряются впустую и, соответственно, требования на интенсивность излучения в эксперименте. Таким образом, повышение качества аппаратуры напрямую связано с безопасностью труда исследователя. Если в эксперименте вместо детектирования применять спектрометрию, то тогда можно работать с интенсивностью полезного излучения, которая ниже фона. Это связано с тем, что спектрометр может “выбирать”  $\gamma$ -кванты с конкретной энергией, а остальные игнорировать. Если используемый радионуклид испускает уникальные для данной местности  $\gamma$ -кванты, то интенсивность его излучения может быть весьма малой. При этом необходимо помнить, что чем ниже скорость счета  $\gamma$ -квантов, тем больше длительность эксперимента. Последнее необходимо соотносить с периодом полураспада и учитывать.

В настоящее время для подобных задач из области биологии, медицины и сельского хозяйства успешно применяют сцинтилляционные детекторы [354, 364–367], которые могут быть как твердыми (органические и неорганические монокристаллы и поликристаллы), так и жидкими (растворы сцинтиллирующих веществ в органических растворителях). Конструктивные реализации детектирующих устройств, даже предназначенных для одних и тех же целей, бывают весьма оригинальными.

Твердотельные сцинтилляторы, как правило, отличаются рядом конкретных преимуществ, хотя и сложнее в производстве. В настоящее время они часто являются единственным эффективным средством для регистрации и спектрометрии ионизирующего излучения.

В зависимости от назначения, сцинтилляторам придают форму пластин, стержней, цилиндров, пленок, гранул, нитей. Пластмассовые, а в последнее время и монокристаллические сцинтилляторы широко используются в виде детекторов большой площади и объемныхборок. В настоящее время серийно выпускаются детекторы и сцинтилблочки на основе щелочно-галлоидных сцинтилляторов  $NaJ(Tl)$ ,  $CsJ(Na)$ ,  $CsJ(Tl)$  диаметром 10–200 мм и высотой 0,5–200 мм [368]. Блочки детектирования на основе щелочно-галлоидных кристаллов типа  $NaJ(Tl)$ , используются наиболее широко.

Твердотельный детектор, на первый взгляд, достаточно простая оптическая система, состоящая из упакованного в герметический корпус в большинстве своем цилиндрического кристалла, который с одного торца имеет

оптически прозрачное сочленение с выходным окном из стекла, а со всех остальных поверхностей имеет тонкую светоотражающую оболочку (СО) из уплотненного белого порошка. Естественно, не все детекторы выглядят так [369], но именно такие детекторы используются чаще всего.

В своей конструкции такой детектор объединяет несколько разнородных оптических и конструктивных материалов. Совместное применение таких материалов в одном устройстве зачастую обнаруживает технические противоречия из-за конфликтующих различий их физико-механических свойств [179]. Прежде всего, это значительные (более чем в два раза) различия температурных коэффициентов линейного расширения сцинтилляторов (прежде всего  $NaJ(Tl)$  и  $CsJ(Na)$ ) и материалов, из которых изготавливают контейнер, например, коррозионностойкая сталь X18H10T или сплавы на основе алюминия: АМц или Д16. Это обстоятельство порождает проблему либо подбора материалов, либо создания специальных конструкций, позволяющих компенсировать такие температурные рассогласования. Применяющиеся в качестве материала диффузионной СО порошки, например,  $MgO$ ,  $Al_2O_3$ ,  $BaSO_4$  или  $TiO_2$  имеют “плохую” способность к уплотнению: малую связность, оцениваемую коэффициентом сцепления. Этот показатель определяет способность порошка сохранять форму после снятия уплотняющего воздействия. Последнее обстоятельство в конечном итоге определит качество СО: т.е. стабильность ее светоотражающих и механических свойств по всей отражающей поверхности и объему, соответственно.

Задача (рис. 7.12) по оценке равномерности распределения помеченной радионуклидом РЖ под слоем почвы  $h_{пс}$  сводится к измерению скорости счета  $\gamma$ -квантов определенной энергии, исходящих из каждой точки некоторой, по большей части горизонтальной, поверхности (излучающего слоя),

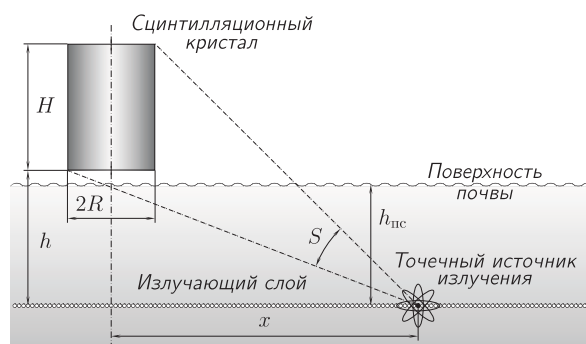


Рис. 7.12. Схема эксперимента

покрытой слоем почвы ( $h_{пс}$ ) в несколько сантиметров. В связи с этим, в идеале, детектор должен иметь осевую направленность. Т.е. его эффективность  $\eta_a$  должна быть максимальной по отношению к тем  $\gamma$ -квантам, которые вышли из точки  $x = 0$ , находящейся на продолжении оси симметрии сцинтиллятора. Все другие  $\gamma$ -кванты, т.е., исходящие из точек  $x \neq 0$  по возможности должны игнорироваться. В данном случае рассматривается сцинтиллятор без коллиматорных устройств.

Для создания специализированного сцинтилляционного детектора с направленными свойствами выполнили работу по оптимизации формы кри-

сталла. В связи с этим, в идеале, детектор должен иметь осевую направленность. Т.е. его эффективность  $\eta_a$  должна быть максимальной по отношению к тем  $\gamma$ -квантам, которые вышли из точки  $x = 0$ , находящейся на продолжении оси симметрии сцинтиллятора. Все другие  $\gamma$ -кванты, т.е., исходящие из точек

сталла [370–373]. Установлено, что эффективность регистрации  $\eta_a$  пропорциональна величине телесного угла  $S$ , под которым кристалл сцинтиллятора виден из точки расположения источника, а тот, в свою очередь, от расстояния  $x$  до этой точки, высоты положения детектора  $h$  и геометрических параметров кристалла. Для цилиндрической формы это радиус  $R$  и высота  $H$ . Наиболее высокую осевую направленность имеет кристалл биконической формы, представляющей собой два конуса сопряженных по основанию через цилиндрический участок [372]. Недостатком такой сложной формы детектора является проблема светособирания. Для него необходимо применять несколько ФЭУ, что сильно усложняет конструкцию и технологию производства, а также увеличивает конечную стоимость изделия и оборудования, в составе которого он может применяться.

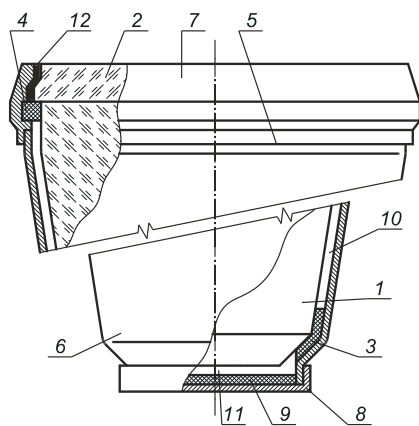


Рис. 7.13. Сцинтиляционный детектор одноконической формы: 1 — сцинтиллятор; 2 — выходное окно; 3, 4 — соответственно, нижнее и верхнее центрирующие кольца; 5 — контейнер; 6 — конус; 7 — фасонное кольцо; 8 — крышка; 9 — прокладка; 10 — конусная часть СО; 11 — часть СО в области входного окна; 12 — клеевое сопряжение

Имея ввиду указанные выше проблемы, разработана компромиссная одноконическая конструкция детектора (рис. 7.13) [179] и технология его сборки [172, 178, 179].

Другие авторские исследования показали, что осевой направленности одноконического детектора (рис. 7.13) [179] все равно недостаточно, и целесообразно применять коллимацию, как то показано на (рис. 7.7–7.10), а в таком случае существенно дешевле использовать цилиндрические кристаллы с большим отношением  $H/R > 2$ . Выяснилось, что такому требованию в наибольшей степени соответствуют каротажные детекторы [156]. В советский период их производство стимулировалось и финансировалось геологоразведкой. Многие годы автор принимал участие в совершенствовании их конструкций и технологии производства [173–179, 182, 374–381]. Высокие требования геологов на механическую и термическую прочность (вибротермопрочность) таких устройств весьма

положительно сказалось на улучшении общих параметров таких устройств. Наиболее высококачественным и одновременно наиболее подходящим для обозначенных выше экспериментов является детектор в соответствии рис. 7.14 [174]. Он изготовлен по технологии перепрессовки и поэтому его СО ужата до состояния упругости, что, собственно и обеспечило его высокие спектротметрические качества. Его применение в нашем эксперименте предполагает коллимацию в соответствии с рис. 7.7–7.10.

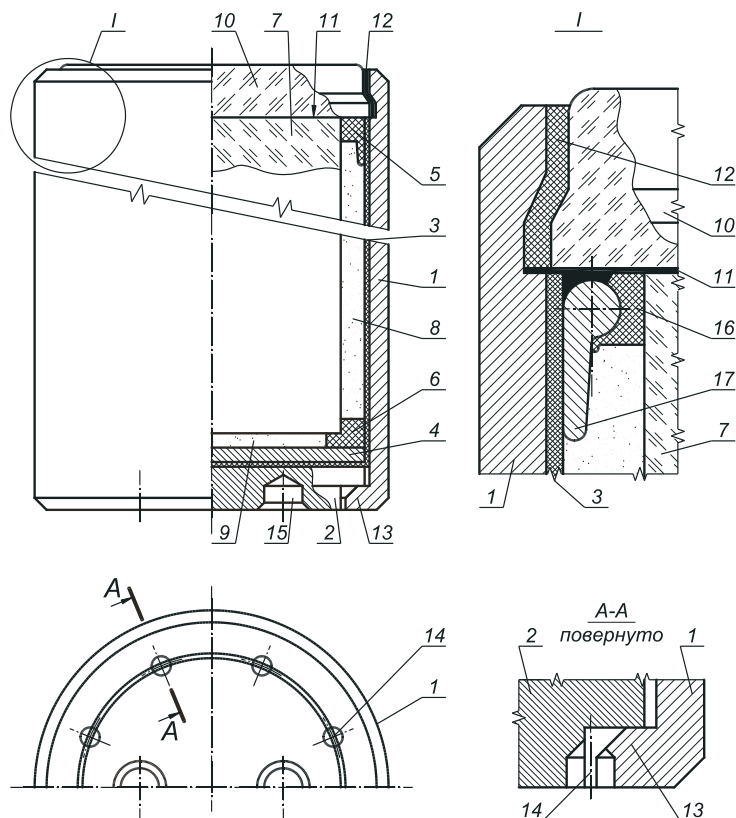


Рис. 7.14. Сцинтилляционный детектор: 1 — стакан контейнера; 2 — дно отъемное; 3 — стакан эластичный; 4 — диск; 5, 6 — кольца центрирующие (верхнее и нижнее); 7 — сцинтиллятор; 8, 9 — части светоотражающей оболочки (цилиндрическая и торцевая); 10 — стекло выходного окна; 11 — оптическая связь; 12 — прослойка клеевая; 13 — буртик кольцевой; 14, 15 — сверления; 16, 17 — кольца (фасонное и пружинное)

7.2.5. Программа и методика эксперимента. Работой предусматривалось выполнение лабораторных и полевых экспериментов с применением изотопных методов. В качестве радиоактивного препарата применяли водный раствор натрия пертехнетата  $^{99m}\text{Tc}$  экстракционного, расфасованного во флаконы по 10 мл. Максимальная активность препарата (одного флакона), который изначально предназначен для медицинских целей, в момент получения может составлять  $\leq 15$  ГБк (гигабеккерель<sup>1</sup>). Отсюда вопрос — какая начальная активность препарата необходима, для того, чтобы изготовленный в конце рабочего дня препарат мог быть эффектив-

<sup>1</sup>10<sup>9</sup> Бк. Беккерель определяется как активность такого количества вещества, в котором, в среднем, за одну секунду происходит один радиоактивный распад (Бк = с<sup>-1</sup>).

но применен в течение следующего светового дня, т.е., спустя до 24 часа с момента получения. При этом следует учесть малый периода полураспада  $^{99m}\text{Tc}$  в  $T_{1/2} = 6,02$  часа и обеспечить  $k_a$  кратный запас активности ( $k_a \in [2, 3]$ ), при условии, что скорость счета детектора в эксперименте должна в десятки ( $k_f$ ) раз превышать фоновые измерения.

- Методика расчета необходимой начальной активности препарата.

Предположим, что начальная активность некоторого, весьма малого количества препарата, сосредоточенного в материальной точке и ее ближайших окрестностях равна  $A_0 = A(t)|_{t=0}$ , где  $t$  — время (в ч), то через некоторое время  $t > 0$  его активность уменьшится до  $A_t = A(t)$ :

$$A_t = A(t) = A_0 2^{-t/T_{1/2}}, \quad (\text{Бк}). \quad (7.7)$$

Рассмотрим случай, когда точечный источник с активностью излучения  $A_t$  расположен под коллимированным детектором на его оси симметрии ( $x = 0$ ) и на удалении  $h$  (см) от нижнего обреза сцинтиллятора. Радиус коллиматора равен  $r$  (см). Тогда начальную интенсивность  $I_0 = I(0)$  пучка  $\gamma$ -квантов, с которой точечный источник облучает сцинтиллятор, учитывая, что  $r \ll h$ , можно посчитать через отношение площади поперечного сечения коллиматора к площади сферы, радиуса  $h$ , по формуле:

$$I_0 = I(0) = A_t \frac{r^2}{4h^2}, \quad (\text{Бк}). \quad (7.8)$$

Уменьшение интенсивности  $I = I(h_{\text{пс}})$  моноэнергетичного коллимированного пучка гамма-квантов не слишком толстым покровным слоем  $h_{\text{пс}}$  (см) однородного вещества происходит экспоненциально [354, 382]:

$$I = I(h_{\text{пс}}) = I_0 \exp(-\mu h_{\text{пс}}), \quad (\text{Бк}), \quad (7.9)$$

где  $\mu$  — зависящий от плотности покровного вещества (почвы) и энергии  $\gamma$ -квантов, линейный коэффициент поглощения (ослабления), в  $\text{см}^{-1}$ .

Ожидаемая плотность почвы  $\rho$  в эксперименте должна быть близкой к оптимальной  $1,1 - 1,25 \text{ г/см}^3$  [294], а, значит, гарантировано попадет в расширенный интервал  $\rho \in [1,0; 1,5] \text{ г/см}^3$ . В таком случае для испускаемых  $^{99m}\text{Tc}$   $\gamma$ -квантов с энергией  $140,466 \text{ КэВ}$  линейный коэффициент поглощения  $\mu$  принадлежит интервалу  $\mu \in [0,157; 0,215] \text{ см}^{-1}$  [361].

В конечном итоге скорость счета ( $\Omega$  событий в секунду) детектора (спектрометра) с учетом его эффективности  $\eta_a$  и составляющей фонового излучения  $\Omega_f$  (измеренной без покровного слоя) можно определить так:

$$\Omega = \eta_a I + \Omega_f, \quad (\text{имп./с}). \quad (7.10)$$

Потребуем, чтобы общая скорость счета  $\Omega$  превосходила составляющую фона  $\Omega_f$  в  $k_f \geq 5$  раз, т.е.:

$$\Omega \geq k_f \Omega_f, \quad (\text{имп./с}). \quad (7.11)$$

Теперь, учитывая все изложенное выше, определим, какой должна быть текущая активность  $A_t$  препарата под коллиматором (точечного источника), чтобы через  $t$  часов выполнялось требование на скорость счета (7.11). Для этого выполним подстановку  $\Omega$  из (7.10) в (7.11), затем  $I$  из (7.9) — в предыдущий результат и, наконец,  $I_0$  из (7.8) — в последнее полученное выражение. Далее итоговое неравенство решаем относительно  $A_t$  и введя коэффициент запаса активности  $k_a$ , а также используя максимальное  $\mu_{\max} = \max(\mu)$  значение  $\mu$  из интервала возможных величин  $\mu \in [0,157; 0,215]$  см<sup>-1</sup> получаем:

$$A_t \geq \frac{4k_a h^2}{\eta_a r^2} \Omega_f (k_f - 1) \exp(\mu_{\max} h_{\text{пс}}), \quad (\text{Бк}). \quad (7.12)$$

До этого оперировали понятием точечный источник. Приближаясь к реальности ассоциируем его с площадкой

$$s = \pi r^2, \quad (\text{см}^2), \quad (7.13)$$

на поверхности излучения, которая равна площади нормального сечения коллиматора. В таком случае текущая удельная (по площади) активность  $A_{ts}$  излучающего слоя равна:

$$A_{ts} = \frac{A_t}{\pi r^2} \geq \frac{4k_a h^2}{\eta_a \pi r^4} \Omega_f (k_f - 1) \exp(\mu_{\max} h_{\text{пс}}), \quad (\text{Бк/см}^2). \quad (7.14)$$

Ранее отмечалось, что в норме расход РЖ через экспериментальные распылители (табл. 7.1) составляет  $V \in [0,62; 0,99]$  л/мин., при этом РЖ распределяется в пределах полосы шириной  $b = 24$  см, а рабочая скорость  $v$  РО (табл. 6.1) ограничивается интервалом  $v \in [1,4; 2,5]$  м/с. Тогда обрабатываемая в каждом эксперименте площадь с учетом количества РО на исследовательском агрегате ( $n_{\text{ро}}$ ) и количества повторностей в каждом опыте ( $n_{\text{по}}$ ) определяется так:

$$S = n_{\text{ро}} n_{\text{по}} b L 10^2, \quad (\text{см}^2), \quad (7.15)$$

где  $L$  — длина помеченного радионуклидом участка пути движения РО (предполагается равной для каждой повторности каждого опыта), в м.

При этом средний объем РЖ, который попадает на единицу обработанной площади равен следующему:

$$\bar{q}_s = \frac{V}{6 b v}, \quad (\text{мл/см}^2), \quad (7.16)$$

а общий максимально возможный расход РЖ на каждый опыт можно считать по формуле:

$$Q = \frac{LV n_{\text{ро}} n_{\text{по}}}{0,06 v}, \quad (\text{мл}). \quad (7.17)$$



Поскольку на единицу площади приходится  $\bar{q}_s$  РЖ и ее текущая активность должна составлять  $A_{ts}$ , то

$$\rho_{at} = \frac{A_{ts}}{\bar{q}_s}, \quad (\text{Бк/мл}). \quad (7.18)$$

— требуемая текущая плотность активности радиоактивной РЖ.

Два последних выражения дают возможность определить минимальную общую (суммарную) текущую активность препарата, необходимого для проведения  $i$ -того эксперимента:

$$A_{t\Sigma}^i = Q \frac{A_{ts}}{\bar{q}_s} = \frac{4LVk_a h^2 n_{\text{по}} n_{\text{по}}}{0,06 v \eta_a \pi r^4} \Omega_f (k_f - 1) \exp(\mu_{\text{max}} h_{\text{пс}}), \quad (\text{Бк}). \quad (7.19)$$

Величину  $A_{t\Sigma}^i$  можно также определить, воспользовавшись выражениями (7.14) и (7.15) по формуле:

$$A_{t\Sigma}^i = S A_{ts} = \frac{L b k_a h^2 n_{\text{по}} n_{\text{по}}}{0,25 \times 10^{-2} \eta_a \pi r^4} \Omega_f (k_f - 1) \exp(\mu_{\text{max}} h_{\text{пс}}), \quad (\text{Бк}). \quad (7.20)$$

Теперь, учитывая (7.20) и (7.7), определим, какой должна быть минимальная суммарная начальная активность  $A_{0\Sigma}^i$  препарата, чтобы в  $i$ -том эксперименте через  $t$  часов выполнялось требование (7.11):

$$A_{0\Sigma}^i = \frac{k_a L b h^2 n_{\text{по}} n_{\text{по}}}{0,25 \times 10^{-2} \eta_a \pi r^4} \Omega_f (k_f - 1) \exp(\mu_{\text{max}} h_{\text{пс}}) 2^{t/T_{1/2}}, \quad (\text{Бк}), \quad (7.21)$$

при

$$t = t_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.22)$$

где  $t_i$  — промежуток времени в часах, от момента получения препарата до момента завершения  $i$ -того опыта;  $n$  — общее количество опытов. Интервалы времени  $t_i$  и длительность каждого опыта  $\Delta_{t_i}$  определяли в процессе планирования эксперимента.

Используя формулы (7.21) и (7.22) необходимо вычислить начальную активность препарата  $A_0^i$ , которая необходима для каждого из опытов

$$A_0^i \in \{A_{0\Sigma}^1, A_{0\Sigma}^2, \dots, A_{0\Sigma}^n\}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.23)$$

Просуммировав находим общую активность препарата, в количестве, необходимом для проведения всех  $n$  опытов:

$$A_0^\Sigma = \sum_{i=1}^n A_{0\Sigma}^i, \quad (\text{Бк}). \quad (7.24)$$

Необходимо помнить, что в каждом  $i$ -том опыте расходуется одинаковое количество РЖ равное  $Q$  (7.22), в то время, как сам препарат необходимо разделить и использовать в объемах, пропорциональных  $A_{0\Sigma}^i$ . При этом

Таблица 7.2

Расчет необходимой для проведения экспериментов активности препарата на основе натрия пертехнетата  $^{99m}\text{Tc}$  экстракционного

Наименование параметра	Обозначение	Числовое значение	Единица измерения
Исходные данные:			
1. Скорость движения РО	$v$	2,01	м/с
2. Длина пути внесения препарата	$L$	5,0	м
3. Расход РЖ одним распылителем	$V$	0,99	л/мин
4. Ширина полосы внесения	$b$	24,0	см
5. Глубина заделки препарата	$h_{\text{пс}}$	4,0	см
6. Количество РО	$n_{\text{ро}}$	2	шт.
7. Количество повторностей опыта	$n_{\text{по}}$	1	
8. Высота расположения детектора	$h$	7,5	см
9. Радиус коллиматора	$r$	0,5	см
10. Интенсивность фонового излучения	$\Omega_f$	1,2	имп./с
11. Коэффициент превышения полезного сигнала над фоновым	$k_f$	7,0	
12. Линейный коэффициент поглощения	$\mu$	0,215	см $^{-1}$
13. Коэффициент запаса активности	$k_a$	2,0	
14. Эффективность измерений	$\eta_a$	0,9	
15. Период полураспада $^{99m}\text{Tc}$	$T_{1/2}$	6,02	ч
16. Интервал времени, между моментами получения препарата и завершения $i$ -того ( $i = 1, 2, 3$ ) опыта:	$t_1; t_2; t_3$	15,0; 18,0; 21,0	ч
17. Длительность каждого опыта	$\Delta t_i$	3,0	ч
Расчетные величины:			
18. Расход РЖ на каждый опыт	$Q$	82,09	мл
19. Общая обрабатываемая в опыте площадь	$S$	$2,4 \times 10^4$	см $^2$
20. Количество РЖ, приходящееся на единицу обработанной площади	$\bar{q}_s$	$3,42 \times 10^{-3}$	мл/см $^2$
21. Начальная активность препарата, необходимая для проведения $i$ -того ( $i = 1, 2, 3$ ) опыта:	$A_{0\Sigma}^1; A_{0\Sigma}^2; A_{0\Sigma}^3$	5,85; 8,26; 11,67	ГБк
22. Суммарная активность препарата в конце $i$ -того ( $i = 1, 2, 3$ ) опыта	$A_{t\Sigma}^i$	1,469	ГБк
23. Активность препарата под коллиматором перед началом опыта	$A_t$	34,03	КБк
24. Удельная активность излучающего слоя $A_{ts}$ перед началом опыта	$A_{ts}$	43,33	КБк/см $^2$

$A_{0\Sigma}^i < A_{0\Sigma}^{i+1}$  (табл. 7.2). То же относится и к объемным порциям препарата. В данном случае, учитывая стандартную поставку препарата флаконами по 10 мл, а также расход РЖ в каждом эксперименте, равный  $Q = 82,09$  мл, в препарат следует добавить 72,09 мл воды. Из таблицы также видно, что необходимая начальная активность препарата меньше технических возможностей генератора для получения  $^{99m}\text{Tc}$ . В случае, если начальная активность препарата  $A_0^i$  окажется больше необходимой, то, во-первых, опыту это не вредит, а, во-вторых, можно пропорционально увеличить количество воды ( $Q$ ). Если же  $A_{0\Sigma}^i$  меньше необходимой, то следует увеличить темпы проведения эксперимента, например, снести начало полевых работ на ранние утренние часы.

- Лабораторный эксперимент.

*Задачи эксперимента* — установить пригодность для полевых экспериментов исследовательских технических средств и мерительной аппаратуры (рис. 7.7–7.10), а также убедиться в правильности исходных данных из табл. 7.2.

*Методика:* а) в эксперименте применяется лабораторная мерительная установка рис. 7.10; б) в качестве точечного источника радиоактивности используется равный поперечному сечению коллиматора пропитанный препаратом круг фильтровальной бумаги; в) радиус коллиматора ( $r$ ) и расстояние от излучающего слоя до сцинтиллятора ( $h$ ) в лабораторном и полевом опыте удовлетворяют условию:

$$r^4 h^{-2} = \text{const}; \quad (7.25)$$

г) удельная активность излучающего слоя  $A_{ts}$  перед началом опыта ( $A_{ts}$ ) соответствует табл. 7.2.

Соблюдение перечисленных выше условий, в случае отсутствия покровного слоя почвы ( $h_{\text{пс}} = 0$ ), обеспечивают равенство интенсивности облучения сцинтиллятора в лабораторных и полевых опытах, несмотря на разное расстояние ( $h$ ) от излучающего слоя до сцинтиллятора.

- Полевой эксперимент по изучению распределения препарата под слоем почвы в случае его ленточного внутрпочвенного внесения.

*Задачи эксперимента:* 1) подтвердить правильность предположения о том, что наклонная установка распылителя предпочтительнее горизонтальной; 2) оценить, как влияет на конечное распределение препарата под слоем почвы операция посева, выполняющаяся после ленточного ВВГ, причем на большую глубину; 3) оценить соответствие фактической глубины заделки препарата заданной величине 4 см.

*Методика:* а) поскольку характеристики применяемых распылителей (рис. 7.2, рис. А.1–А.8) сильно разнятся, то несмотря на то, что НИМ (рис. 7.5) имеет два РО, для выполнения первой задачи исследований необходимо использовать один и тот же, выполнив последовательно два прохода агрегата. Для этого перед первым проходом на обоих РО распылители необходимо установить горизонтально, а перед вторым — под углом.

Для регулировки наклона распылителей необходимо применить устройство (рис. 7.11). Все замеры необходимо выполнять на последовательных проходах одного и того же РО. Второй РО используется в качестве резерва. Место установки мерительной рамки (рис. 7.8, С) определяется с помощью прибора СРП-68-01 (рис. 7.6) по максимуму интенсивности излучения; б) для выполнения второй задачи исследований необходимо использовать также только одну полосу внесения препарата. Для этого на сеялке, имитирующей посев, соответствующую посевную секцию следует выставить на глубину посева 6–8 см, что на 2–4 см больше чем глубина допосевного ленточного ВВГ; Чтобы вторая полоса внесения препарата осталась нетронутой в процессе имитации посева, приходящуюся на него секцию сеялки необходимо выставить на нулевую глубину посева; в) нетронутую полосу внесения РЖ использовать для оценки глубины внесения препарата. Для выемки проб из почвы использовать соответствующее устройства (рис. 7.9); г) для измерения глубины заделки меченной РЖ использовать стрелочный индикатор прибора (рис. 7.7), который показывает скорость счета (величина обратно пропорциональная интервалу времени между соседними импульсами) и позволяет отыскать ее максимум; г) поскольку в эксперименте применяется короткоживущий радионуклид  $^{99m}\text{Tc}$  и, к тому же, длительность периода проведения экспериментов соизмерима с периодом полураспада  $^{99m}\text{Tc}$ , то в показания приборов следует внести временную поправку:

$$C_i = \tilde{C}_i 2^{(t_i - t_1)/T_{1/2}}, \quad (7.26)$$

где  $t_i$  и  $t_1$  — время начала  $i$ -того ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) и первого измерений (длительность каждого измерения предполагается одинаковой, например, в течение минуты);  $\tilde{C}_i$  — фактическое количество зарегистрированных прибором импульсов (в имп./мин.);  $C_i$  — скорректированное количество импульсов, которое идет в зачет (в имп./мин.).

Приведенные выше особенности методики позволяют выполнить всю программу экспериментов за один проход исследовательского агрегата, что в три раза (табл. 7.2) сокращает необходимое количество меченного нуклидом препарата (водный раствор натрия пертехнетата  $^{99m}\text{Tc}$ ).

#### 7.2.6. Результаты радиоизотопного эксперимента.

- Лабораторный эксперимент. Суммарная активность препарата  $A_{t\Sigma}$  из расчета на 10 мл перед началом эксперимента составляла 1,0 ГБк. Радиус калиматора  $r$  (табл. 7.3) выбирали исходя из условия (7.25) и текущей величины  $h$ . Его площадь поперечного сечения  $s$  (7.13) составила 1,539 см<sup>2</sup>. Поскольку в соответствии с методикой проведения эксперимента текущая удельная (по площади) активность  $A_{ts}$  излучающего слоя должна быть такой же (или, по возможности, ближе к тому), как и в полевом эксперименте, т.е. 43,33 КБк/см<sup>2</sup> (табл. 7.2), то от общего количества (10 мл) препарата, необходимо было отобрать примерно 1/15000 его долю, или 1/60 от его капли. Поэтому одна капля препарата была предварительно разведена в 60 каплях воды (примерно 2,4 мл) и уже капля нового раствора была нанесена

на пакет из нескольких кругов фильтровальной бумаги диаметром 1,4 см. Таким образом приготовленный препарат использовали в дальнейшем в качестве точечного источника  $\gamma$ -излучения.

Таблица 7.3

**Начальные величины и результаты лабораторного опыта по определению линейного коэффициента поглощения  $\mu$**

Наименование параметра	Обозначение	Числовое значение	Единица измерения
1. Вес навески почвы для создания покровного слоя толщиной 1 см		24,54	г
2. Внутренний объем надставного кольца (7.15В)		19,63	см <sup>3</sup>
3. Плотность почвы		1,25	г/см <sup>3</sup>
4. Радиус коллиматора	$r$	0,7	см
5. Расстояние до сцинтиллятора	$h$	14,0	см
6. Линейный коэффициент поглощения: в трех повторностях опыта	$\mu$	0,182; 0,182; 0,180	см <sup>-1</sup>
среднее значение	$\mu$	0,181	см <sup>-1</sup>
7. Фоновое излучение	$\Omega_f$	69	имп./мин.

На один замер отводили 6 мин., из которых 5 мин. — на установку надставного кольца, засыпку уплотнение и выравнивание предварительно приготовленной навески почвы и 1 мин. — на подсчет количества импульсов. На перерыв между тремя повторностями опытов отводили по 30 мин.. При этом препарат не заменяли и не пополняли. В процессе замеров регулярно учитывали поправки на полураспад (7.26).

По результатам экспериментов построен рис. 7.15. Величина линейного коэффициента поглощения  $\mu$  найдена методом наименьших квадратов. Полученные значения  $\mu$  соответствуют ожиданиям [361]. Используя среднее значение  $\mu$ , построен график. Большие разбежности экспериментальных данных (значений  $C$ ) в случае малой толщины покровного слоя  $h_{\text{пс}}$  поясняются неравномерностью плотности последнего. По мере возрастания  $h_{\text{пс}}$ , указанный фактор сглаживается и сказывается в меньшей степени. Это обстоятельство, в случае, когда активность препарата не лимитирует, можно использовать в полевом эксперименте. Перед измерениями, засыпав углубления перетертой почвой, необходимо тщательно выровнять ее поверхность. Таким образом можно уменьшить влияние неоднородностей покровного слоя на результат.

В общем лабораторный эксперимент подтвердил возможность успешного применения изложенной выше методики в полевых исследованиях.

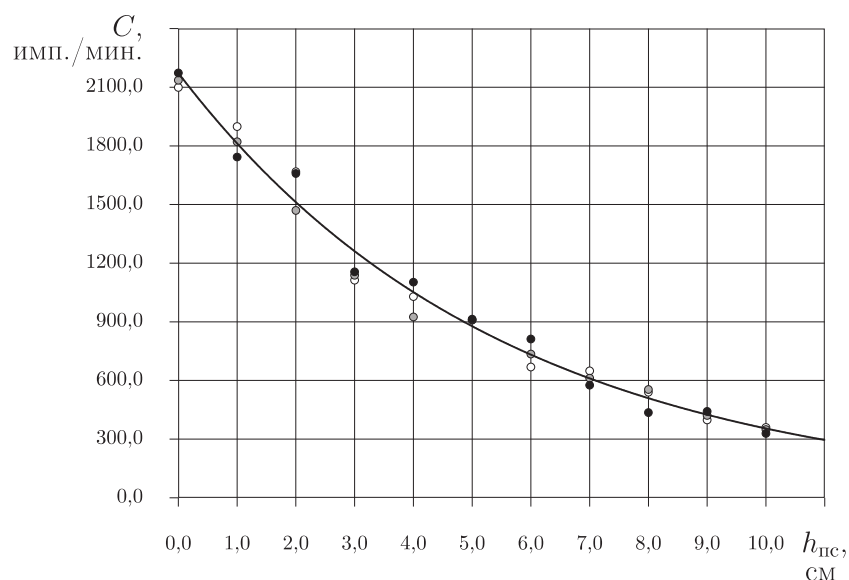


Рис. 7.15. Количество зарегистрированных детектором импульсов ( $C$ ) в зависимости от толщины покровного слоя почвы ( $h_{пс}$ ) для трех повторностей опыта (отмечены точками разного цвета)

• Полевой эксперимент. Рассмотрим рис. 7.16, 7.17 и 7.18. Первый из них относится к испытаниям, когда распылитель РО имел наклонную ориентацию. Второй касается случая с горизонтальной ориентацией распылителя, а третий — случая, когда распылитель РО установлен с наклоном, но после внесения меченой РЖ выполняли посев, причем глубина (60 мм) хода сошника превышала глубину (40 мм) заделки РЖ на 20 мм. Рисунки с индексом “А” иллюстрируют распределение препарата по ширине полосы внесения, а рисунки с индексом “В” — по площади внесения. На всех рисунках количество РЖ, которое попадает на единицу площади в данном месте отождествляется с прямопропорциональным количеством зарегистрированных прибором импульсов ( $\gamma$ -квантов).

Как видим, по сравнению с горизонтальной ориентацией распылителя (рис. 7.17), его наклонная ориентация (рис. 7.16) позволяет получить более равномерное распределения РЖ под слоем почвы. На этот же вывод указывают и данные приложения Б (табл. Б.1, Б.2). В случае наклонной ориентации распылителя для групп измерений, выполнявшихся в точках с шагом 20 мм параллельно оси рядка ( $x = \text{const}$ ), среднеквадратическое отклонение  $\sigma_c$  количества импульсов  $C$  лежит в интервале  $\sigma_c \in [38,04; 92,88]$ , а коэффициент вариации  $v_c$  — в интервале  $v_c \in [0,03; 0,4]$ . Те же интервалы для случая с горизонтальной ориентацией распылителя такие:  $\sigma_c \in [99,39; 284,6]$ ;  $v_c \in [0,11; 1,05]$ . Таким образом, получается, что во втором случае коэффициенты вариации больше в 2,63–3,67 раза, а, значит, наклонная ориентация

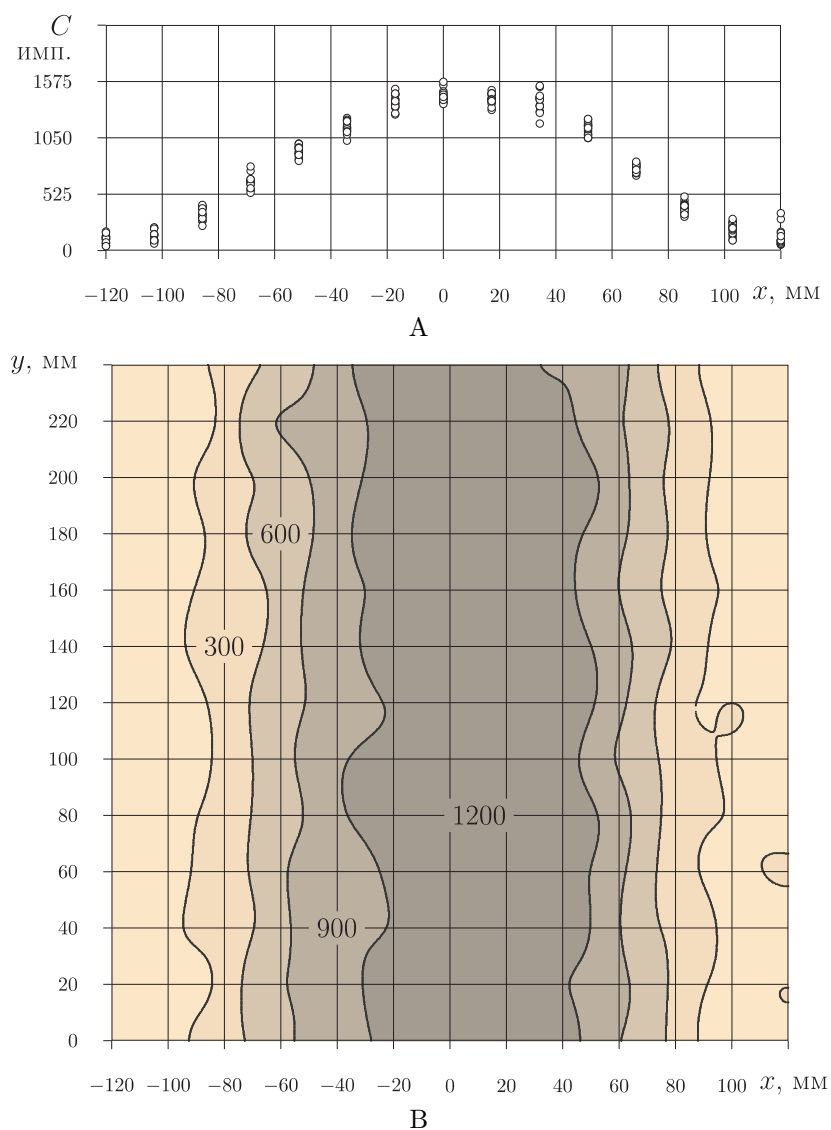


Рис. 7.16. Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) распределения препарата по ширине обрабатываемой полосы (А) и по поверхности обработки под слоем почвы (В) разработанным рабочим органом при наклонной ориентации распылителя:  $x$  и  $y$  — координаты (в мм), которые измеряются по ширине полосы внесения, начиная от ее оси симметрии и вдоль полосы внесения, соответственно; 300, 600, 900 и 1200 — интенсивность излучения (обозначена полями одного оттенка), пропорциональная количеству препарата на единице площади, находящегося в данном месте

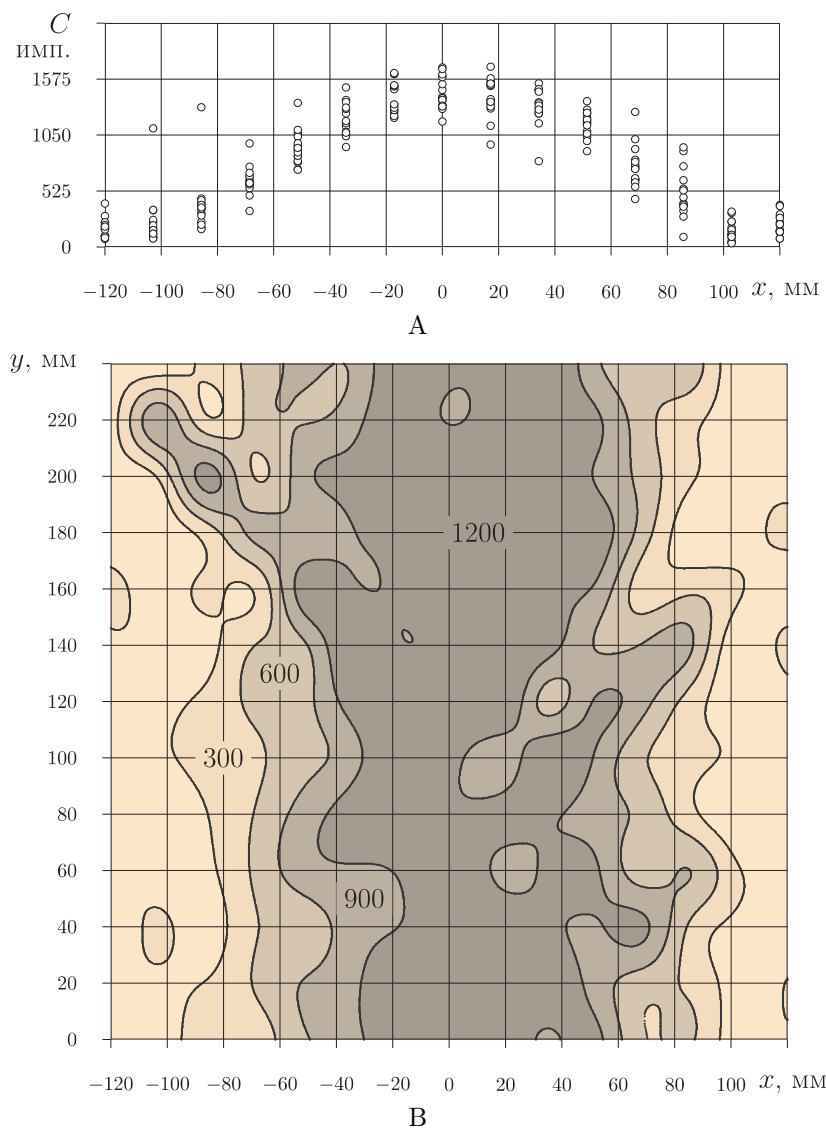


Рис. 7.17. Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) распределения препарата по ширине обрабатываемой полосы (А) и по поверхности обработки под слоем почвы (В) разработанным рабочим органом при горизонтальной ориентации распылителя:  $x$  и  $y$  — координаты (в мм), которые измеряются по ширине полосы внесения, начиная от ее оси симметрии и вдоль полосы внесения, соответственно; 300, 600, 900 и 1200 — интенсивность излучения (обозначена полями одного оттенка), пропорциональная количеству препарата на единице площади, находящегося в данном месте



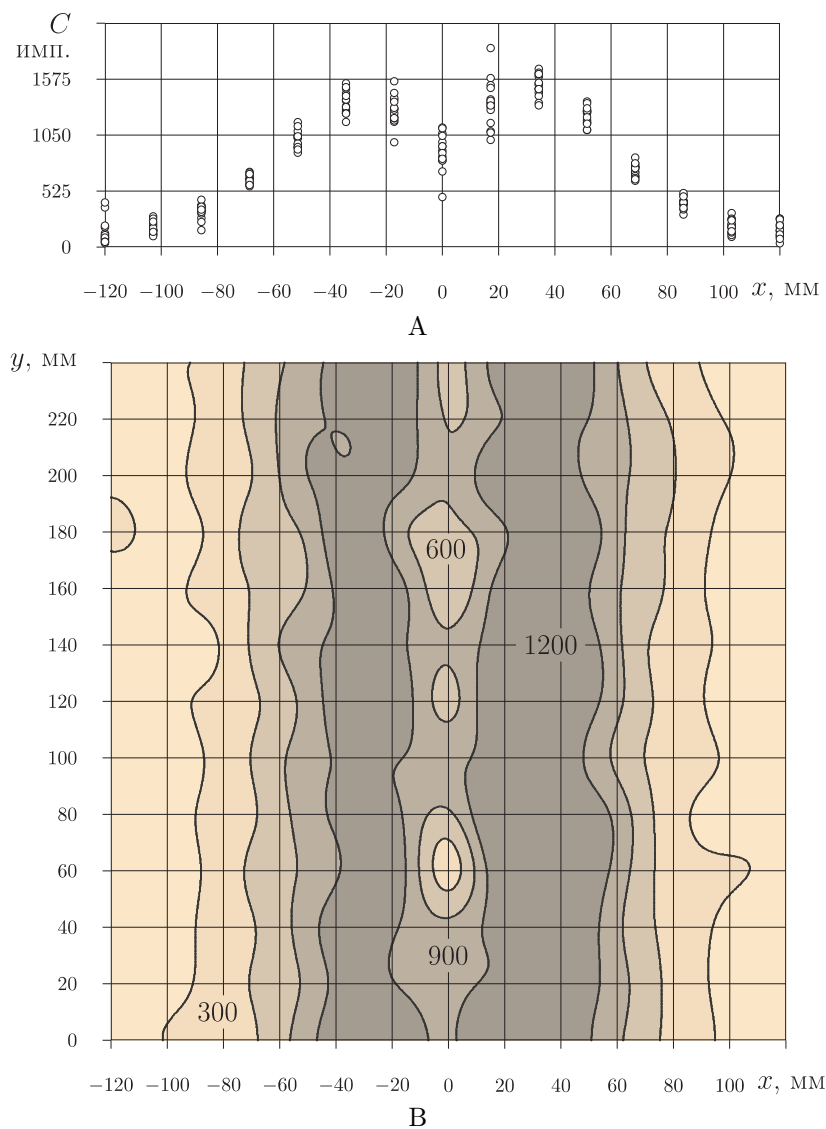


Рис. 7.18. Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) распределения препарата по ширине обрабатываемой полосы (А) и по поверхности обработки под слоем почвы (В) разработанным рабочим органом при наклонной ориентации распылителя, после прохода (на 20 мм глубже) сошника посевной секции:  $x$  и  $y$  — координаты (в мм), которые измеряются по ширине полосы внесения, начиная от ее оси симметрии и вдоль полосы внесения, соответственно; 300, 600, 900 и 1200 — интенсивность излучения (обозначена полями одного оттенка), пропорциональная количеству препарата на единице площади

распылителя предпочтительнее, т.к. позволяет получать более равномерное распределение препарата вдоль обрабатываемой полосы.

Из рис. 7.18 и табл. Б.3 следует, что в случае, когда посев выполняется после внутрипочвенного внесения РЖ и к тому же на большую глубину, то при этом происходит перераспределение ранее внесенного препарата и нет оснований говорить о программируемом его распределении под слоем почвы. После имитации посева  $\sigma_c \in [45,84; 195,83]$ ;  $v_c \in [0,07; 0,32]$ . В наибольшей степени изменяется распределение РЖ в окрестностях оси обработанной полосы, или, что то же, траектории прохода сошника. Из этого следует вывод, что ВВГ лучше осуществлять после посева (табл. 6.2), так гарантированно достигается программированное распределение рабочего вещества по обрабатываемой поверхности.

Оценку глубины  $H$  заделки препарата выполняли также для всех трех вариантов осуществления технологии ВВГ. В табл. 7.4 представлены результаты измерения глубины заделки  $H$  препарата (изотопным методом) при внесении его разработанным РО в случае наклонной (опыт 1) и горизонтальной (опыт 2) ориентации распылителя без имитации посева (последующего прохода сошника). Как видим, в первом случае заданное значение глубины заделки препарата (40 мм) достигается более точно. Коэффициент вариации в 3 раза меньше.

В случае горизонтальной ориентации распылителя (опыт 2) рабочее вещество попадает в щели сводообразующего потока почвы и смачивает комки, падающие отдельно, и поэтому средняя глубина заделки препарата по факту оказалась меньше заданного значения на 3,4 мм. Таким образом, снова получаем подтверждение того, что наклонная ориентация распылителя предпочтительнее.

Таблица 7.4

**Результаты измерения глубины заделки  $H$  препарата (изотопным методом) при внесении его разработанным рабочим органом в случае наклонной (опыт 1) и горизонтальной (опыт 2) ориентации распылителя без имитации посева (последующего прохода сошника):  $\bar{H}$  — среднее значение, в мм;  $\sigma_H$  — дисперсия, в мм;  $v_H$  — коэффициент вариации**

Опыт	Глубина заделки препарата $H$ , в мм										$\bar{H}$	$\sigma_H$	$v_H$
1	40	39	37	38	39	36	38	38	38	41	38,4	1,4	0,04
2	45	38	36	39	31	33	41	34	33	36	36,6	4,2	0,12

Рис. 7.19 и табл. Б.4 являют собою результаты эксперимента по оценке распределения препарата по глубине на оси обработанной полосы при внесении его разработанным РО в случае наклонной ориентации распылителя с имитацией посева (последующим проходом сошника), который выполнялся на 20 мм глубже, чем внутрипочвенное внесение РЖ.

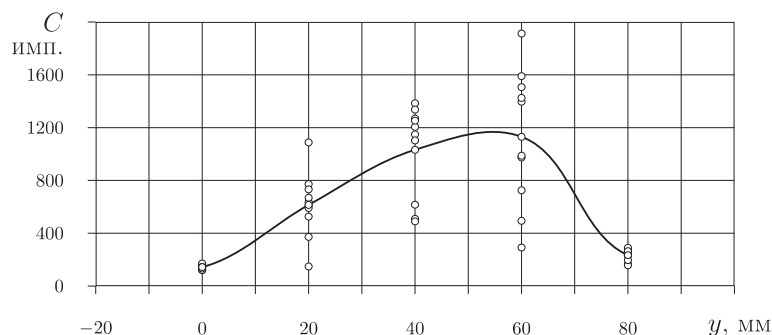


Рис. 7.19. Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) распределения препарата по глубине на оси обработанной полосы при внесении его разработанным рабочим органом в случае наклонной ориентации распылителя с имитацией посева (последующим проходом сошника)

Как видим, в результате прохода сошника происходит перераспределение ранее внесенного препарата, а, значит, нет оснований говорить о его программируемом распределении. Из этого снова следует вывод, что из обозначенных позиций послепосевное ВВГ предпочтительнее.

### 7.3. Эксперимент по оценке перераспределения семян полезных растений вследствие выполнения самостоятельной операции послепосевного внутрипочвенного внесения гербицидов

**7.3.1. Программа и методика эксперимента.** Основные сложности в реализации идеи послепосевного ВВГ заключены в необходимости обрабатывать почву после посева. При этом очевидно, что после прохода орудий для внесения гербицидов возможны нарушения в расположении ранее высеванных семян. Для того, чтобы определить эти миграции семян можно использовать оценки качества рядков посевов, на которых гербицид не вносили вовсе, и сравнить их с соответствующими оценками, касающимися рядков, на которых применялось послепосевное ВВГ.

Отраслевым стандартом на испытания посевных машин [383] предусмотрено определение ряда показателей качества рядков посевов:

- равномерность распределения семян вдоль оси рядка;
- глубина заделки семян;
- ширина ленты посева семян.

Первые два показателя в стандарте [383] детально освещены и были приняты без изменений. Что касается ширины ленты посева, то стандартом [383] не предусмотрена проверка этого показателя для кукурузы, подсолнечника и некоторых пропашных культур. В отношении свеклы в нем оговорено следующее: “ширину ленты посева определяют по каждому сошнику измерением расстояния между крайними растениями по ширине полосы. Повторность по каждому следу сошника четырехкратная. Качество измерений по каждой повторности не менее десяти” [383].

Из цитаты видно, что стандарт [383] допускает значительный субъективизм в оценке данного показателя. Для измерения расстояния между крайними растениями необходимо сначала правильно выбрать направление рядка, что полностью зависит от исследователя, выполняющего измерения и ничем не оговорено. Кроме этого стандарт не поясняет понятие “крайние растения”. Крайними можно считать каждую пару соседних растений, или, например, каждое первое и третье, или четвертое растение. Можно выбрать крайние растения на какой-то длине рядка, например 0,5 м и т.д.. Исходя из приведенного, потребовалось уточнение и доработка методики, первый вариант которой изложен в [319], где перечислены ее основные положения:

- параметры распределения семян по ширине ленты посева определяли косвенно по взошедшим растениям и невзошедшие семена в расчет не принимали;
- длину учетного участка принимали равной 10 м;
- учетный участок располагали на середине двухсотметрового контрольного участка;
- измерения проводили на прямом и обратном проходах агрегата по всем шести сошникам сеялки;
- повторность измерений четырехкратная;
- количество измерений с учетом прямого и обратного прохода агрегата всегда превышало 300 измерений;
- в процессе измерений отклонений растений от оси рядка сначала вдоль каждого учетного участка рядка натягивали струну, располагая ее сбоку рядка так, чтобы она не пересекала последнего, а расстояние между струной и двумя крайними растениями учетного участка были равными;
- после закрепления струны, начиная с первого растения учетного участка, по порядку, масштабной линейкой измеряли удаление каждого растения от струны и соблюдая очередность записывали результаты в ведомость;
- выборку, в которой размах значений отклонений растений от струны превышал 150 мм, выбраковывали;
- отклонение растений от оси рядка определяли как полуразность между удалениями двух соседних растений от струны;
- полученную совокупность значений отклонений растений от оси рядка обрабатывали согласно стандарту [384];
- в процессе математической обработки выборок разных повторностей производили проверку выборок на принадлежность одной генеральной совокупности, используя ранговый критерий Вилькоксона [385].

Из изложенного видно, что и этот вариант методики также оставляет открытыми некоторые вопросы. Так, например, нет обоснования, почему отклонение растений от оси рядка определяется по двум соседним измерениям, а не, например, методом скользящего среднего [386] по трем или более измерениям. Открытым остался вопрос точности определения искомым оценкам параметров распределения. Такие исследования были проведены. Для этой цели использовали метод имитационного моделирования реальных процессов на ЭВМ (метод Монте-Карло [387]).

7.3.2. Метод Монте-Карло. Математическая модель посева. Имеющиеся в литературе вероятностные модели расположения семян и растений в рядке [388], как правило, позволяют получить лишь обобщенные показатели качества посева и не дают возможности смоделировать сам процесс высева с тем, чтобы получить координаты высеянных семян.

Сущность предлагаемой математической модели посева кукурузы пунктирной сеялкой состоит в следующем [389]. Из материалов исследований других авторов [390] известно, что траектория рядка сахарной свеклы представляет собой кривую линию, состоящую из наложенных друг на друга трех гармоник (например синусоид). Основная гармоническая кривая имеет большой период, длина которого колеблется в пределах 100–250 м, амплитуда гармоники достигает 0,5 м и более. Эта гармоника обусловлена непрямолинейностью движения трактора посевного агрегата. На длине каждого большого периода имеется несколько средних гармоник с длиной периода в пределах 17–30 м и амплитудой до 100 мм. Появление средних гармоник объясняется колебанием сеялки относительно линии тяги. Эти колебания появляются вследствие несимметричности тягового сопротивления сеялки. Внутри каждой средней гармоники наблюдается несколько малых гармоник с длиной периода 4–12 м и амплитудой 10–60 мм. Эти искривления траектории рядков являются в основном следствием поперечных колебаний сошников сеялки.

Агрегаты для посева свеклы и кукурузы, как правило, состоят из трактора одной модели, имеет те же габариты, вес и тяговое сопротивление, поэтому нет оснований предполагать, что при их использовании будут наблюдаться несопоставимые закономерности. Основываясь на этом предположении, воспользовавшись декартовой системой координат  $Oxy$ , представим траекторию рядка кукурузы, как сумму трех гармоник:

$$y(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 A_k \sin \left( \frac{2\pi}{L_k} x + \phi_k \right) + C, \quad (7.27)$$

где  $A_k$ ,  $L_k$  и  $\phi_k$  — амплитуда, длина волны и начальная фаза  $k$ -той ( $k = 1, 2, 3$ ) гармоники;  $x$  — текущее значение абсциссы;  $C$  — константа, которая необходима для смещения кривой  $y(x)$  оси рядка в положительную область.

Если назвать “метками идеального высева” (МИВ) точки траектории рядка, в которые должны попасть семена при идеальном высеве, и предположить, что такой высев состоялся, то измеренное вдоль кривой  $y(x)$  (7.27) расстояние от какой-либо метки, которая принята за начало отсчета ( $i = 0$ ), до любого  $i$ -того по порядку семени можно определить так:

$$l_i = ai, \quad (7.28)$$

где  $a$  — заданное расстояние между МИВ.

В реальных условиях часть меток идеального высева с вероятностью  $P_1$  могут быть пропущены ( $0 \ll P_1 < 1$ ), а другая часть с вероятностью  $P_2$  —

продублированы ( $0 < P_2 \ll 1$ ). Кроме того семена имеют не абсолютную всхожесть, а, значит, если высев состоялся, то появление растения регламентируется вероятностью  $P_3$ . Последнее очень важно, поскольку оценку параметров посева мы планируем производить по взошедшим растениям.

Смоделировать на ЭВМ события, которые определяются вероятностями  $P_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ), можно, если воспользоваться генератором псевдослучайных чисел (ПСЧ), равномерно распределенных в интервале  $[0, 1]$  [391, 392]. Если при текущем обращении к генератору ПСЧ получено число  $p_k$  которое удовлетворяет условию

$$p_k \leq P_k, \quad (7.29)$$

то следует считать, что  $k$ -тое событие состоялось. Чтобы при циклическом переборе  $k$ -тых событий, обеспечивалась принадлежность каждого  $p_k$  своей  $k$ -той генеральной совокупности необходимо соблюдать правила инициализации генератора ПСЧ. Т.е. для генерации последующего ПСЧ из  $k$ -той генеральной совокупности необходимо использовать предварительно сохраненное число-инициализатор, которое получилось при генерации предыдущего ПСЧ из той же  $k$ -той генеральной совокупности. Ситуацию, когда число-инициализатор полученное при генерации ПСЧ из одной генеральной совокупности используется для генерации ПСЧ из другой генеральной совокупности допускать нельзя. В последнем случае полученные последовательности ПСЧ перестанут быть независимыми.

В процессе программной реализации изложенного выше, нереализованные МИВ исключались из рассмотрения и нумеровались только состоявшиеся растения. Каждому  $i$ -тому растению соответствуют координаты  $x_i$ ,  $y_i$ . Таким образом, в общем случае, для  $i > 0$  с учетом вероятностей  $P_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) справедливо следующее

$$a_i = l_i - l_{i-1} \neq a, \quad (7.30)$$

где  $a_i$  — фактический интервал между  $i$ -тым и предыдущим растением, измеренный вдоль кривой  $y(x)$  (7.27) оси рядка.

В реальных условиях сеялки не обеспечивают размещение семян точно в МИВ. Фактически каждое из семян при попадании в борозду, а также при последующей заделке отклоняется от МИВ вдоль и поперек оси рядка на некоторые расстояния — осевую и поперечную девианты  $\tau_i$  и  $r_i$ , где  $i$  — номер текущей реализованной МИВ (растения). Разумеется, все девианты  $\tau_i$  или  $r_i$  одноименного осевого ( $l$ ) или поперечного ( $r$ ) семейства статистически независимы. Со значительной долей вероятности можно утверждать, что  $\tau_i$  и  $r_i$  подчинены нормальным законам распределения с нулевым средним и некоторым среднеквадратическим отклонением  $\sigma_l$  и  $\sigma_r$ . Поскольку  $\tau_i$  может быть как положительным, так и отрицательным, а также с учетом того, что при пунктирном посеве норма посева кукурузы колеблется от 2 до 6 шт. на погонный метр (25–80 шт./га [24]), то в конечном итоге возможны инверсии растений, когда  $l_{i+1} < l_i$ . Что бы избавиться от инверсий, растения следует снова перенумеровать в порядке возрастания  $l_i$ . Для этих целей применим, например, алгоритм “пузырька” [393].

Чтобы вычислить каждое значение  $\tau_i$  и  $r_i$ , следует воспользоваться генераторами нормально распределенных ПСЧ [391, 392]. Большинство известных алгоритмов дают ПСЧ с нулевым средним и единичной дисперсией. В некоторых сначала генерируются псевдослучайные числа, равномерно распределенные в интервале  $[0, 1]$ , а затем, с помощью обратной функции [394, 395] нормированного (стандартного) нормального распределения [396], которая в свою очередь рассчитывается, например, методом минимаксных аппроксимаций [397], они преобразуются в нормально распределенные [391]. Чтобы получить  $\tau_i$ , соответствующее заданному отличному от единицы среднеквадратическому отклонению  $\sigma_l$  следует воспользоваться формулой [288]

$$\tau_i = \sigma_l \Delta_i, \quad (7.31)$$

где  $\Delta_i$  — нормально распределенное ПСЧ, рассчитанное для нулевого математического ожидания и единичной дисперсии. Если нужно получить математическое ожидание, отличное от нуля, то его плюсуется к полученному значению  $\tau_i$ . Аналогичным образом рассчитывается текущее значение девианты  $r_i$ . Правила инициализации генераторов нормально распределенных ПСЧ совпадают с упоминавшимися выше.

Для определения конечных координат  $x_i, y_i$   $i$ -того растения вначале вычисляют координаты  $x_i^*, y_i^*$  точки на оси рядка, которой соответствует расстояние  $l_i + \tau_i$ , а, затем, воспользовавшись параметрическим уравнением нормали к оси рядка  $y(x)$  (7.27) в точке  $(x = x_i^*, y = y_i^*)$  вида

$$x_i = \frac{r_i \frac{d}{dx} y(x_i^*)}{-\sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} y(x_i^*)\right]^2}} + x_i^*, \quad y_i = \frac{r_i}{\sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx} y(x_i^*)\right]^2}} + y_i^*, \quad (7.32)$$

где в роли параметра выступает девианта  $r_i$ , а  $\frac{d}{dx} y(x_i^*)$  обозначает первую производную от  $y(x)$  (7.27) по  $x$  в точке  $x = x_i^*$ , вычисляют  $x_i, y_i$ .

В отношении величины  $r_i$  с вероятностью близкой к единице можно утверждать, что  $r_i$  меньше половины ширины нижней части бороздообразователя посевной секции, а, значит, в большинстве случаев  $\sigma_r$  не должно превышать  $1/6$  того же размера. С позиции качества посева, распределение семян по ширине ленты посева, представляет большой интерес, поскольку оно определяет сложность и качество выполнения последующих операций по уходу за посевами и уборке.

Поскольку  $A_k, L_k$  и  $\phi_k$ , т.е. амплитуда, длина волны и начальная фаза  $k$ -той ( $k = 1, 2, 3$ ) гармоники в действительности являются случайными величинами, которые попадают в указанные выше интервалы, то выбор их значений также осуществлялся псевдослучайным образом, на основе закона равномерного распределения. При этом учитывалось, что первая и вторая гармоники являются общими для всех сошников сеялки, а третья — индивидуальна для каждого из рядков посевов. Движение сеялки в прямом и обратном направлении также моделировалось путем псевдослучайного переназначения величин  $A_k, L_k$  и  $\phi_k$ .

Последовательная реализация описанного подхода на ЭВМ, именуемая в дальнейшем математической моделью посева (ММП) на основе метода Монте-Карло, позволяет смоделировать распределение растений вдоль оси рядка с учетом криволинейности хода трактора, горизонтальных независимых колебаний сеялки и сошников, сбоев высева, появления пар одновременно высеянных семян, их всхожести и хаотичного перемещения относительно МИВ в процессе попадания в борозду и ее заделки. Возможность в нарушении расположения МИВ, в следствие нестабильности величины проскальзывания приводных колес сеялки не учитывается, основываясь на предположении, что при достаточно короткой учетной длине рядка, равной 10 м (так требует ОСТ 70.5.1-82 [383]), величину коэффициента проскальзывания можно считать постоянной.

На рис. 7.20 и 7.21 представлены распределения интервалов между растениями, полученные путем применения предлагаемой ММП при различных исходных данных. Первый рис. 7.20,А соответствует практически идеальной работе высевающего аппарата и всхожести семян. Вероятность высева равна единице, а вероятность появления дублей — нулю. Как видим, в результате получается нормальное распределение интервалов между растениями с величиной среднего значения ( $\bar{a} = 248,36$  мм), близкого к заданному ( $a = 250$  мм). Теоретическая кривая нормального распределения, наложенная на гистограмму подтверждает такой вывод. Проверку согласия проводили путем применения статистики  $\omega^2$  (Андерсона-Дарлинга) критерия Мизеса [398]. Расчеты по проверке согласия выполнялись программой собственной разработки *CrSogLMIZES*, алгоритм которой основан на результатах исследований других авторов [399–409]. Фактические параметры полученного распределения интервалов равны следующему: математическое ожидание — 248,36 мм; дисперсия — 2573,48 мм<sup>2</sup>; среднеквадратическое отклонение — 50,73 мм; коэффициент вариации — 0,204258; коэффициент асимметрии — -0,027637; коэффициент эксцесса -0,0454801. Получены они с помощью авторской подпрограммы *MainSRDAE*, реализующей расчеты в соответствии с ГОСТ 11.004-74 [384] и работами [394, 410].

Рис. 7.20,В соответствует случаю, когда посев осуществляется с пропусками ( $P_1 = 0,8$ ) и всхожесть семян не является идеальной ( $P_3 = 0,9$ ). Появление двойников при высевае по прежнему исключено ( $P_2 = 0$ ). Как видим, результирующее распределение фактически состоит из суммы нормальных распределений со смещенным средним, которое кратно  $a = 250$  мм, т.е. заданной величине интервалов между растениями.

Рис. 7.20,С отличается от предыдущего в четыре раза большим заданным значением  $\sigma_l = 200$  мм осевого среднеквадратического отклонения от МИВ. В этом случае наблюдаются инверсии семян и результирующее распределение не является простой суммой нормальных законов. Особенно сильно этот фактор проявляется в области малых значений  $a_i$ .

Влияние двойников на конечное распределение растений иллюстрирует рис. 7.21, который отличается от рис. 7.20 только тем, что вероятность появления дублей при высевае  $P_2 = 0,3$  больше нуля. Как видим высев семян



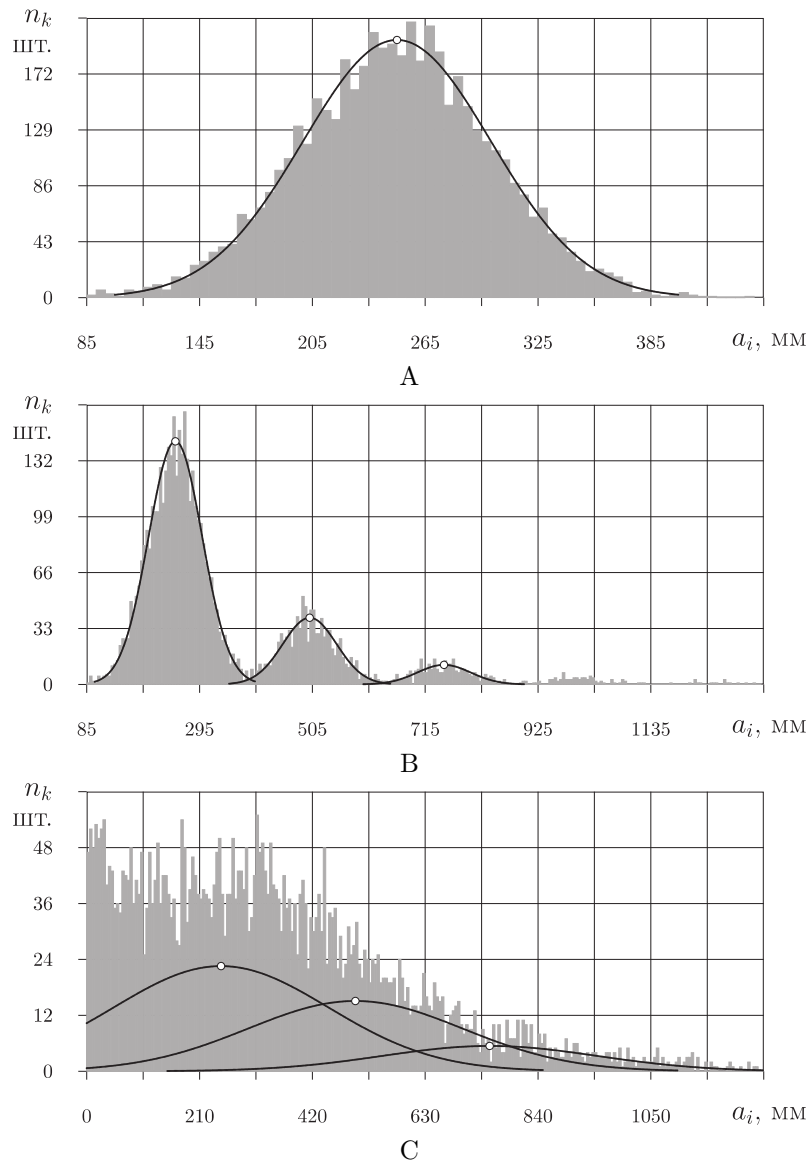


Рис. 7.20. Гистограммы распределения интервалов между растениями в ряду ( $a_i$  — измеренное вдоль оси ряда расстояние между  $i$ -тым и  $i-1$ -вым растениями;  $n_k$  — частота попадания  $a_i$  в  $k$ -тый шириною 5 мм интервал на гистограмме;  $a = 250$  мм;  $P_2 = 0$ ): А)  $P_1 = 1$ ;  $P_3 = 1$ ;  $\sigma_l = 50$  мм; В)  $P_1 = 0,8$ ;  $P_3 = 0,9$ ;  $\sigma_l = 50$  мм; С)  $P_1 = 0,8$ ;  $P_3 = 0,9$ ;  $\sigma_l = 200$  мм. Сплошными жирными линиями с круговой точкой на максимуме показаны теоретические кривые нормальных распределений, которые соответствуют посеву без пропусков, пропуску одной и двух МИВ к ряду

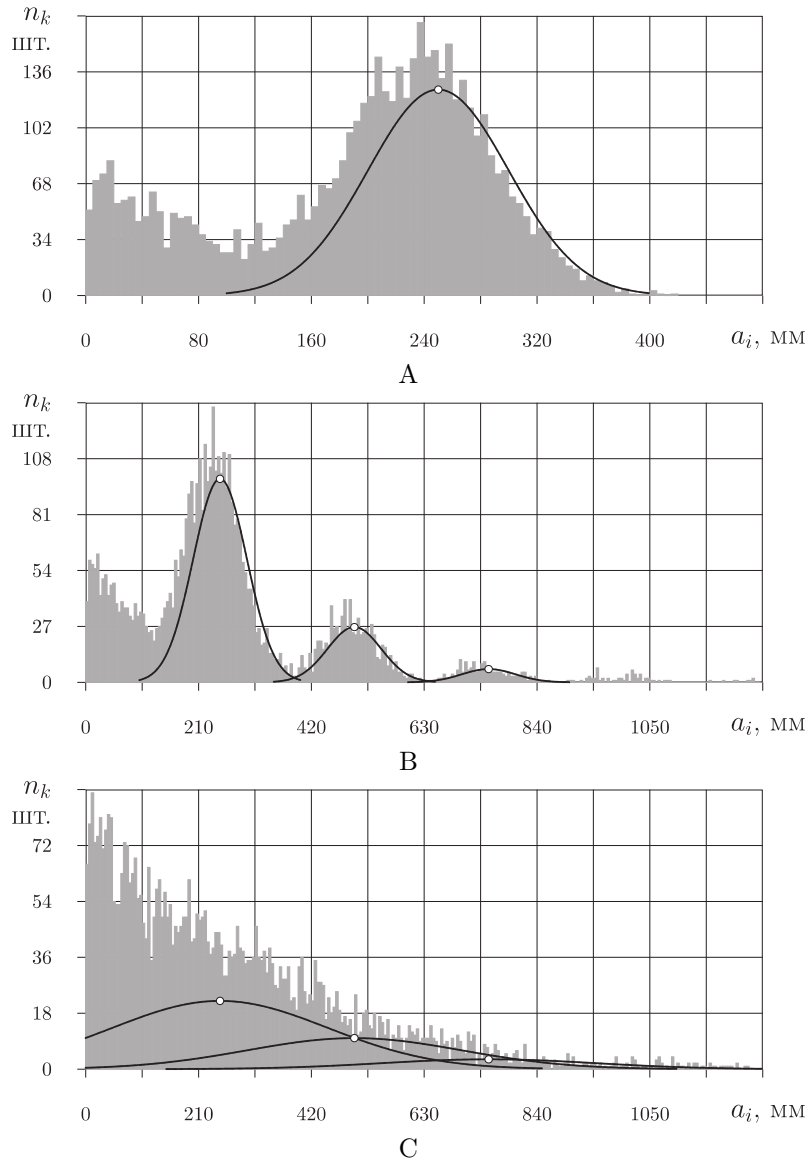


Рис. 7.21. Гистограммы распределения интервалов между растениями в рядке. Рисунок аналогичен предыдущему, с той лишь разницей, что  $P_2 = 0,3$ . Сплошными жирными линиями с круговой точкой на максимуме показаны теоретические кривые нормальных распределений, которые соответствуют нулевой вероятности высева дублей ( $P_2 = 0$ ), посеву без пропусков, пропуску одной и двух МИВ к ряду

парами приводят к появлению пика в положительной полуокрестности нуля и к смещению фактического распределения относительно теоретических составляющих в сторону меньших значений.

На рис. 7.22 и в табл. 7.5 представлены данные, относящиеся к реальным посевам кукурузы. Их сравнение с рис. 7.20 и 7.21, которые получены расчетным путем с применением ММП, позволяет заключить, что в случае посева кукурузы на зерно в качестве посевного материала в хозяйстве использовалось хорошо откалиброванное зерно с повышенной всхожестью.

Таблица 7.5

**Результаты изучения распределения интервалов между растениями кукурузы в рядке, полученные на основе обработки полевых экспериментальных данных по исследованию посевов кукурузы на силос и зерно в колхозе Украина, Кременчугского р-на, Полтавской обл., 1985 г.**

Наименование величин	Единицы измерения	Номер поля		
		1	2	3
1. Назначение посева	шт.	силос	силос	зерно
2. Количество растений на опытном участке	шт.	742	703	636
3. Минимальный интервал	мм	0	0	45
4. Максимальный интервал	мм	455	380	530
5. Математическое ожидание	мм	164,11	173,73	190,94
6. Дисперсия	мм <sup>2</sup>	10511	6392	7937,57
7. Среднеквадратическое отклонение	мм	102,52	79,95	89,09
8. Коэффициент вариации		0,62	0,46	0,47
9. Номер соответствующего рисунка		7.22А	7.22В	7.22С

Первое позволило исключить дубли и, в связи с этим, наименьший интервал между растениями составил 45 мм. Пропусков при высева также практически не было по этой же причине. Незначительное количество удвоенных и утроенных интервалов скорее всего связано с полевой всхожестью семян, которая всегда меньше 100%. В общем, на основании приведенного выше анализа можно судить об адекватности изложенной выше разработанной автором ММП на основе метода Монте-Карло. Это обстоятельство позволяет нам использовать описанную ММП для совершенствования методики оценки параметров распределения растений по ширине ленты рассева.

7.3.3. Метод скользящего среднего. Совершенствование методики оценки параметров распределения растений по ширине ленты рассева. На математической модели процесса изменения координат растений относительно предварительно натянутой струны

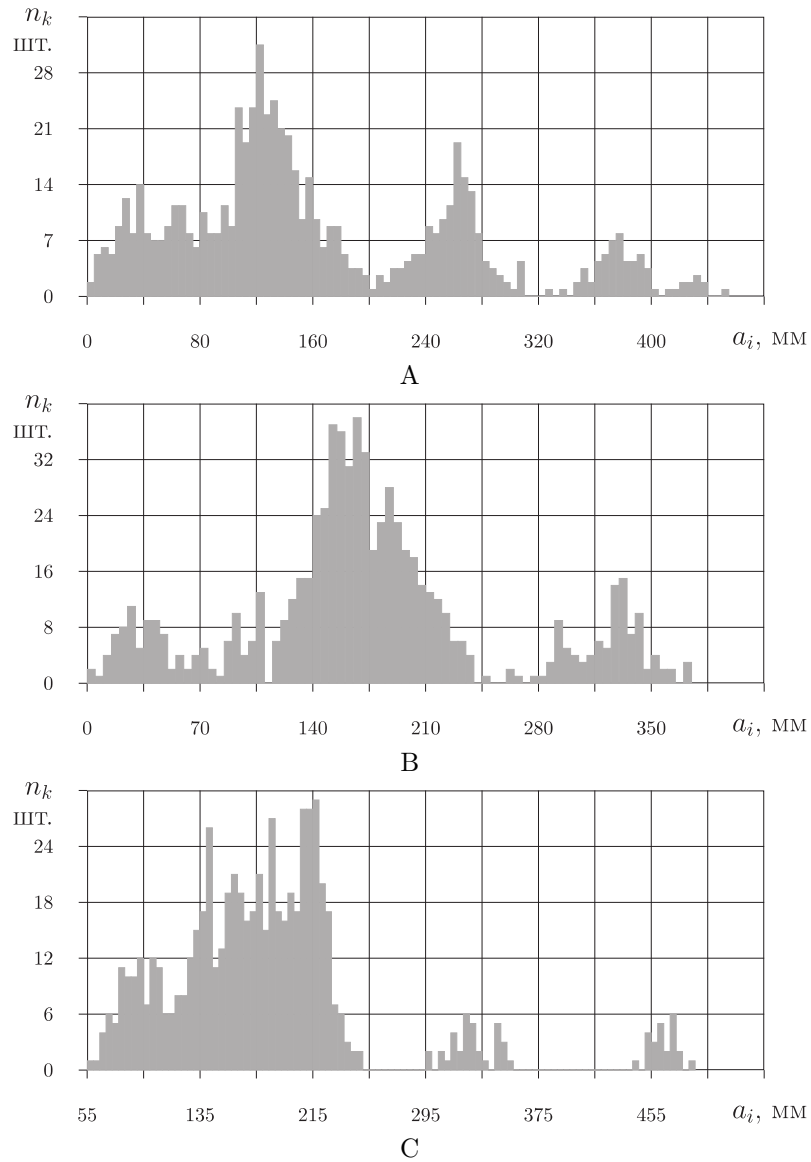


Рис. 7.22. Гистограммы распределения интервалов между растениями в рядке. Построены на основе полевых экспериментальных данных по исследованию реальных посевов кукурузы силос (А, В) и зерно (С) в колхозе Украина, Кременчугского р-на, Полтавской обл., 1985 г.

мы останавливаться не будем, поскольку по своей сути такая модель представляет собой перерасчет координат растений относительно новой также декартовой системы координат, ось абсцисс которой совмещена со струной. В общем случае новая система координат смещена и повернута относительно прежней. Новые координаты растений обозначим традиционно —  $x_i, y_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , а  $n$  — количество растений в опыте. Далее, выполним обоснование методики расчета смещения растений в стороны от оси рядка. Целью такого исследования является выбор наиболее подходящего варианта сглаживания (табл. 7.6), который давал бы наименьшее среднеквадратическое отклонение

Таблица 7.6

**Формулы для вычисления отклонения растений от оси рядка**

Вариант	Математическое выражение	Диапазон изменения индекса	Номер выражения
I.	$r_i = \frac{y_i - y_{i+1}}{2}$	$i = 1, 2, \dots, n - 1$	(7.33)
II.	$r_i = y_i - \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3}$	$i = 2, 3, \dots, n - 1$	(7.34)
III.	$r_i = y_i - \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{4}$	$i = 2, 3, \dots, n - 2$	(7.35)
IV.	$r_i = y_i - \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{5}$	$i = 3, 4, \dots, n - 2$	(7.36)

тическое отклонение  $S_{\sigma_r}$  и смещение  $\Delta\sigma_r$  оценки  $\sigma_r$  фактического среднего квадратического отклонения  $\sigma_r^0$  растений от оси рядка

$$\Delta\sigma_r = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\sigma_{rj}^0 - \sigma_{rj}), \quad (7.37)$$

где  $j$  — номер конкретного опыта;  $m$  — общее количество повторностей опыта;  $\sigma_{rj}^0$  и  $\sigma_{rj}$  — параметры  $\sigma_r^0$  и  $\sigma_r$ , относящиеся к опыту с номером  $j$ .

На рис. 7.23 представлены графики, где смещение  $\Delta\sigma_r$  и среднеквадратическое отклонение  $S_{\sigma_r}$  рассматриваются в зависимости от  $\sigma_r^0$ . Как видим, в пределах изученного интервала  $\sigma_r^0 \in [1, 18]$  наименьшее смещение  $\Delta\sigma_r$  достигается при расчете скользящего среднего по 5-ти точкам.

Далее, аналогичным образом изучим влияние метода сглаживания на среднеквадратическое отклонение  $S_{\bar{r}}$  и смещение  $\Delta\bar{r}$  оценки  $\bar{r}$  фактического среднего арифметического отклонения  $\bar{r}^0$  растений от оси рядка

$$\Delta\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\bar{r}_j^0 - \bar{r}_j), \quad (7.38)$$

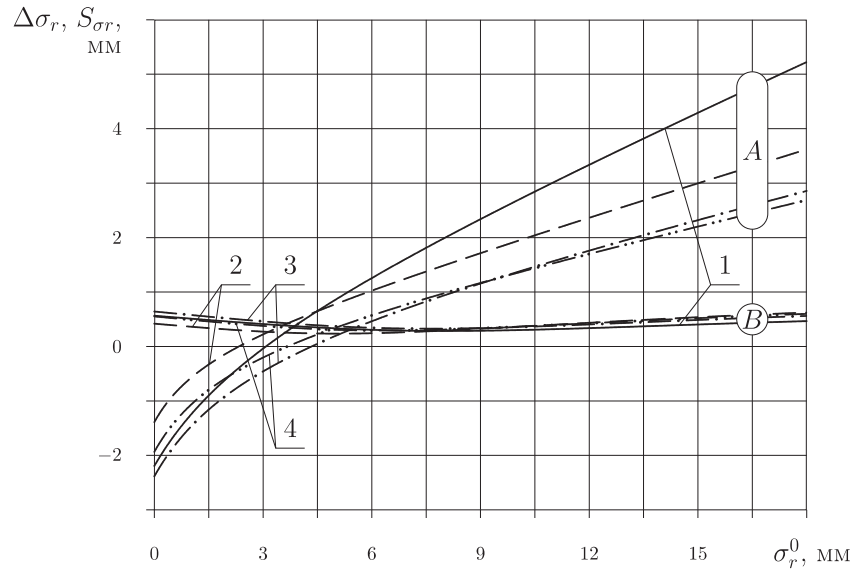


Рис. 7.23. Смещение  $\Delta\sigma_r$  (A) и среднеквадратическое отклонение  $S_{\sigma_r}$  (B) оценки  $\sigma_r$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка в зависимости от фактического значения  $\sigma_r^0$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка для четырех вариантов сглаживания методом скользящего среднего по двум (1), трем (2), четырем (3) и пяти (4) растениям для 100 повторностей вычислительного эксперимента при:  $A_1 \in [0, 800]$  мм;  $L_1 \in [100, 250]$  м;  $\phi_1 \in [0, 2\pi]$ ;  $A_2 \in [0, 100]$  мм;  $L_2 \in [17, 30]$  м;  $\phi_2 \in [0, 2\pi]$ ;  $A_3 \in [10, 60]$  мм;  $L_3 \in [4, 12]$  м;  $\phi_3 \in [0, 2\pi]$ ;  $a = 250$  мм;  $\sigma_l = 50$  мм;  $P_1 = 0,8$ ;  $P_2 = 0,3$ ;  $P_3 = 0,9$ ;

где  $\bar{r}_j^0$  и  $\bar{r}_j$  — параметры  $\bar{r}^0$  и  $\bar{r}$ , относящиеся к опыту с номером  $j$ . Как и в предыдущем случае, по рис. 7.24 мы видим, что наиболее высокая точность расчета  $\Delta\bar{r}$  достигается, если применять сглаживание по 5-ти точкам. Точность расчета  $S_{\bar{r}}$  выше во втором случае, но превосходство над вариантом № 5 незначительное. Таким образом, в дальнейшем предпочтение отдаем опять сглаживанию по 5-ти точкам.

Кроме того из обоих рисунков рис. 7.23 и 7.24 видно, что среднеквадратические отклонения  $S_{\sigma_r}$  и  $S_{\bar{r}}$  оценок  $\sigma_r$  и  $\bar{r}$  фактических, среднеквадратического  $\sigma_r^0$  и среднего арифметического  $\bar{r}^0$  отклонения растений от оси рядка ничтожно малы. В дальнейшем ими будем пренебрегать. Тот же вывод применим и в отношении смещения  $\Delta\bar{r}$ . По другому дела обстоят со смещением  $\Delta\sigma_r$ , которое соизмеримо с оцениваемой величиной  $\sigma_r^0$ . Таким образом, если необходима несмещенная оценка  $\sigma_r$ , то смещение  $\Delta\sigma_r$  следует учитывать. В связи с этим, в дальнейшем изучим, какие параметры посева и каким образом могут влиять на смещение  $\Delta\sigma_r$ . Для этого опять используем ММП, основанную на методе Монте-Карло.

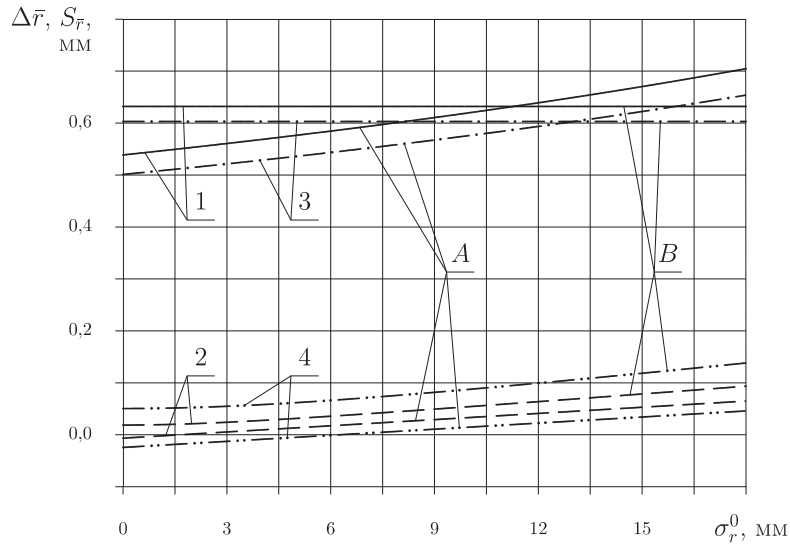


Рис. 7.24. Смещение  $\Delta\sigma_r$  (A) и среднеквадратическое отклонение  $S_{\sigma_r}$  (B) оценки  $\sigma_r$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка в зависимости от фактического значения  $\sigma_r^0$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка для четырех вариантов сглаживания методом скользящего среднего по двум (1), трем (2), четырем (3) и пяти (4) растениям для 100 повторностей вычислительного эксперимента при:  $A_1 \in [0, 800]$  мм;  $L_1 \in [100, 250]$  м;  $\phi_1 \in [0, 2\pi]$ ;  $A_2 \in [0, 100]$  мм;  $L_2 \in [17, 30]$  м;  $\phi_2 \in [0, 2\pi]$ ;  $A_3 \in [10, 60]$  мм;  $L_3 \in [4, 12]$  м;  $\phi_3 \in [0, 2\pi]$ ;  $a = 250$  мм;  $\sigma_l = 50$  мм;  $P_1 = 0,8$ ;  $P_2 = 0,3$ ;  $P_3 = 0,9$ ;

На рис. 7.25, 7.26 и 7.27 представлены серии из 5-ти кривых, иллюстрирующих зависимость смещения  $\Delta\sigma_r$  (A) и среднеквадратического отклонения  $S_{\sigma_r}$  (B) от фактического значения  $\sigma_r^0$  для различных исходных данных. Их общая часть приведена в табл. 7.7.

Введем обозначения:  $\bar{a}_j$  и  $\sigma_{aj}$  — математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение интервалов между растениями в  $j$ -том вычислительном эксперименте,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Тогда

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{a}_j \quad (7.39)$$

средний интервал, а

$$\sigma_a = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_{aj} \quad (7.40)$$

среднеквадратическое отклонение интервалов между растениями в рядке для  $m$  повторностей опыта. В табл. 7.8 приведены числовые значения  $\bar{a}$  и  $\sigma_a$ , относящихся к рис. 7.25, 7.26 и 7.27.

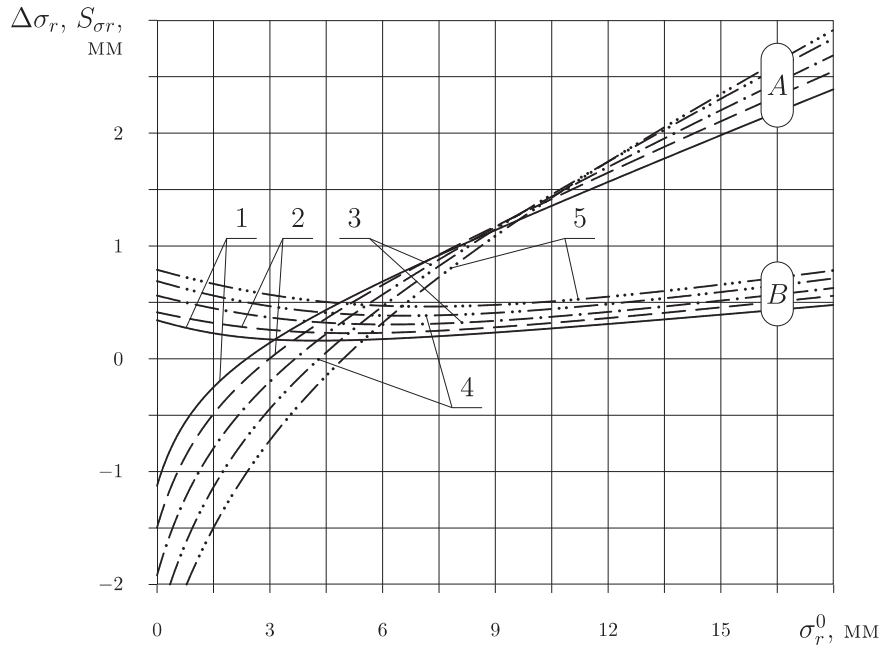


Рис. 7.25. Смещение  $\Delta\sigma_r$  (A) и среднеквадратическое отклонение  $S_{\sigma_r}$  (B) оценки  $\sigma_r$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка в зависимости от фактического значения  $\sigma_r^0$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка для пяти значений  $a$  интервала между метками идеального высева 150 мм (1), 200 мм (2), 250 мм (3), 300 мм (4) и 350 мм (5) при общих входных данных, в соответствии с табл. 7.7 и когда  $\sigma_l = 50$  мм, а  $P_1 = 0,8$

После математической обработки относящегося к рис. 7.25, 7.26 и 7.27 цифрового материала, было установлено что

$$\Delta\sigma_r = \frac{A_\delta + \sigma_r^0}{B_\delta + C_\delta \sigma_r^0} + D_\delta \sigma_r^0, \quad (7.41)$$

$$S_{\sigma_r} = \sqrt{A_s - B_s (\sigma_r^0 - C_s)^2} + D_s \sigma_r^0, \quad (7.42)$$

$$\sigma_r^* = A_\sigma (\sigma_r) B_\sigma + C_\sigma \exp\left(\frac{D_\sigma}{\sigma_r}\right), \quad (7.43)$$

где  $\sigma_r^*$  — несмещенная оценка  $\sigma_r^0$ , а значения коэффициентов  $A_i, B_i, C_i, D_i$ , когда  $i = \delta, s, \sigma$  — приведены в таблице табл. 7.9 и 7.10.

Из таблицы табл. 7.10 видно, что величина коэффициентов  $A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma$  и  $D_\sigma$  зависит от значения среднего интервала между растениями в рядке  $\bar{a}$  и от среднеквадратического отклонения этих интервалов  $\sigma_a$ . Таким образом,



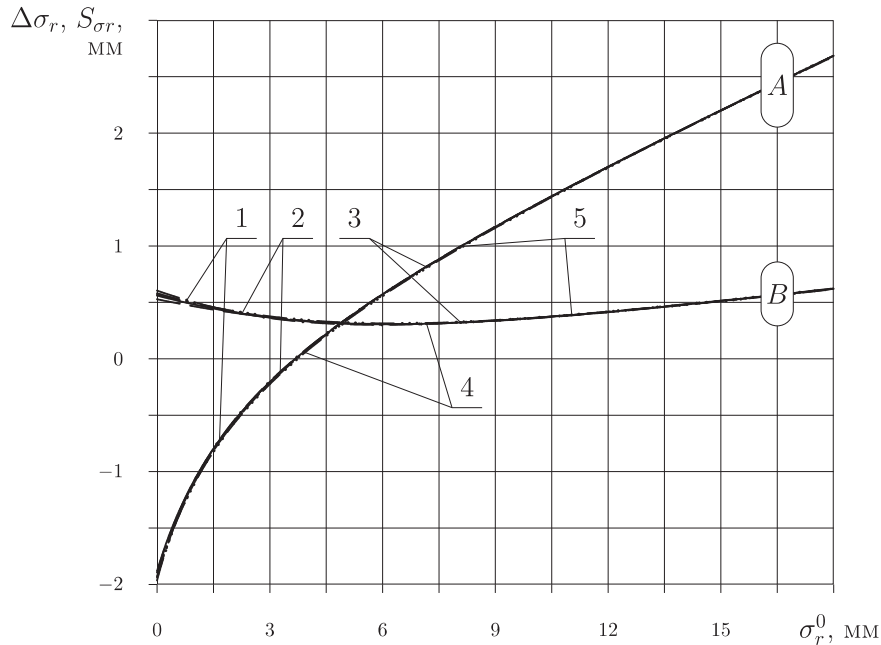


Рис. 7.26. Смещение  $\Delta\sigma_r$  (A) и среднеквадратическое отклонение  $S_{\sigma_r}$  (B) оценки  $\sigma_r$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка в зависимости от фактического значения  $\sigma_r^0$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка для пяти значений  $\sigma_l$  среднеквадратического отклонения растений от метки идеального высева 30 мм (1), 40 мм (2), 50 мм (3), 60 мм (4) и 70 мм (5) при общих входных данных, в соответствии с табл. 7.7 и когда  $a = 250$  мм, а  $P_1 = 0,8$

понимая  $A_\sigma$ ,  $B_\sigma$ ,  $C_\sigma$  и  $D_\sigma$  как функции  $\bar{a}$  и  $\sigma_a$ , аппроксимируем имеющиеся табличные данные. В итоге получаем:

$$A_\sigma = A_{1\sigma}(\sigma_a) \left( B_{1\sigma} + \frac{C_{1\sigma}}{\ln \bar{a}} \right) + \frac{D_{1\sigma}}{\bar{a}}, \quad (7.44)$$

$$B_\sigma = A_{2\sigma}(\sigma_a) \frac{B_{2\sigma} + C_{2\sigma}}{\bar{a}} + \frac{D_{2\sigma}}{\bar{a}}, \quad (7.45)$$

$$C_\sigma = \frac{\sigma_a}{A_{3\sigma} + B_{3\sigma}\bar{a} + C_{3\sigma}\sqrt{\bar{a}}}, \quad (7.46)$$

$$D_\sigma = \frac{A_{4\sigma}}{\bar{a}} + B_{4\sigma} \exp(C_{4\sigma}\sigma_a) + \frac{D_{4\sigma}}{(\bar{a})^2}, \quad (7.47)$$

где коэффициенты  $A_{i\sigma}$ ,  $B_{i\sigma}$ ,  $C_{i\sigma}$ ,  $D_{i\sigma}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) приведены в табл. 7.11.

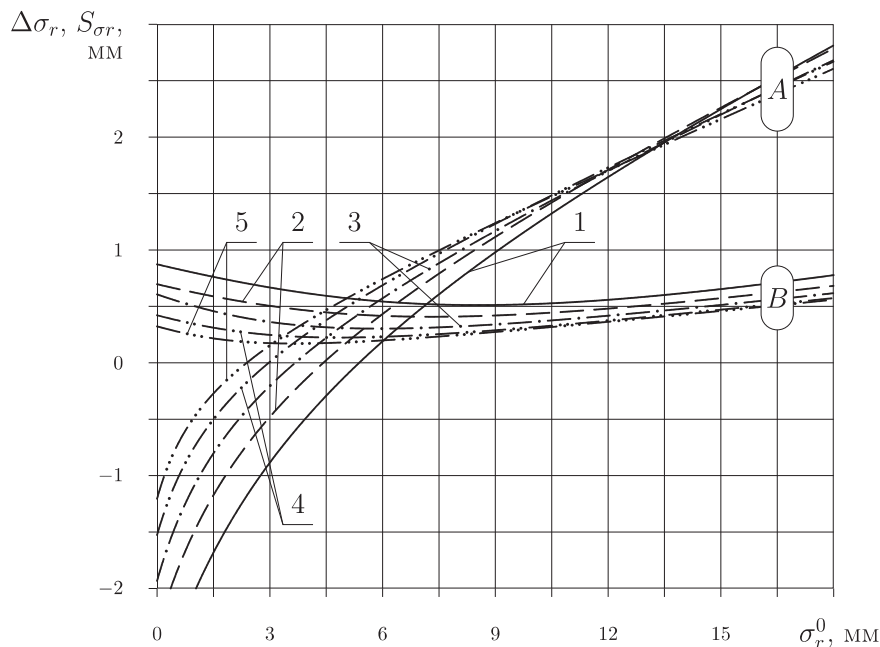


Рис. 7.27. Смещение  $\Delta\sigma_r$  (A) и среднеквадратическое отклонение  $S_{\sigma_r}$  (B) оценки  $\sigma_r$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка в зависимости от фактического значения  $\sigma_r^0$  среднего квадратического отклонения растений от оси рядка для пяти значений  $P_l$  надежности высева 0,6 (1), 0,7 (2), 0,8 (3), 0,9 (4) и 1,0 (5) при общих входных данных, в соответствии с табл. 7.7 и когда  $a = 250$  мм, а  $\sigma_l = 50$  мм

Таким же способом, воспользовавшись данными табл. 7.9, можно получить формулы для вычисления коэффициентов  $A_\delta, B_\delta, C_\delta, D_\delta$  из выражения (7.41) и коэффициентов  $A_s, B_s, C_s, D_s$  из выражения (7.42). Мы этого делать не будем, поскольку повышение точности получения оценок  $\Delta\sigma_r$  и  $S_{\sigma_r}$ , которое при этом будет достигнуто, не адекватно увеличению сложности методик их получения. Важным для нас остается несмещенная оценка  $\sigma_r^*$  среднеквадратического отклонения растений от оси рядка  $\sigma_r^0$ , которую теперь можно получить воспользовавшись выражениями (7.43)–(7.47). Для этого необходимо по экспериментальным данным посчитать параметры распределения интервалов между растениями  $\bar{a}$  и  $\sigma_a$ , а также смещенную оценку  $\sigma_r$  того же  $\sigma_r^0$ .

С учетом результатов исследования точности определения оценок параметров распределения семян кукурузы по ширине ленты рассева ниже приводим необходимое дополнение к упомянутой выше методике [325]:

- после закрепления струны, начиная с первого растения учетного участка, по порядку, масштабной линейкой следует измерять не только удаление

Таблица 7.7

Входные данные, общие для серии вычислительных экспериментов, относящихся к рис. 7.25, 7.26 и 7.27

Наименования величин	Обозначения	Единицы измерения	Числовые значения
1. Интервалы изменения параметров трех гармоник: амплитуд —  периода —  начальной фазы —	$A_1$	мм	[0, 800]
	$A_2$	—”—	[0, 100]
	$A_3$	—”—	[10, 60]
	$L_1$	м	[100, 250]
	$L_2$	—”—	[17, 30]
	$L_3$	—”—	[4, 12]
	$\phi_1$	рад.	[0, $2\pi$ ]
	$\phi_2$	—”—	—”—
	$\phi_3$	—”—	—”—
2. Вероятность высева двойников	$P_2$		0,3
3. Всхожесть семян	$P_3$		0,9
4. Количество повторностей опыта	$m$		100
5. Количество растений, задействованных при сглаживании методом скользящего среднего		шт.	5

Таблица 7.8

Значения  $\bar{a}$  (мм) средних интервалов и  $\sigma_a$  (мм) среднеквадратических отклонений интервалов между растениями в рядке для  $m$  повторностей опыта, относящихся к рис. 7.25, 7.26 и 7.27

Номер рисунка	Обозначения	Номера линий на рисунке				
		1	2	3	4	5
Рис. 7.25	$\bar{a}$	158,42	209,97	261,13	312,02	361,99
	$\sigma_a$	122,28	158,30	194,81	232,93	271,13
Рис. 7.26	$\bar{a}$	260,91	261,04	261,11	261,18	261,28
	$\sigma_a$	194,98	194,43	194,84	196,25	198,41
Рис. 7.27	$\bar{a}$	342,91	296,94	261,13	233,34	211,23
	$\sigma_a$	307,33	245,11	194,84	155,19	121,72

Таблица 7.9

**Значения коэффициентов из выражений (7.41) и (7.42)**

Обо- зна- че- ния	Параметры распределения интервалов между растениями									
	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$
	158,42	122,28	209,97	158,30	261,13	194,81	312,02	232,93	361,99	271,13
$A_\delta$	-12,53781487		-13,73637660		-18,21762974		-19,99933568		-16,73061353	
$B_\delta$	11,14793477		9,19212821		9,49788997		8,41581333		6,11655699	
$C_\delta$	8,96903743		5,55821280		4,62622216		3,34557217		1,76495885	
$D_\delta$	0,13098198		0,13941497		0,14958581		0,15934063		0,16003512	
$A_s$	1,04145326		1,35489415		2,49371197		3,86551984		4,97953796	
$B_s$	-0,00928342		-0,00578710		-0,00779406		-0,01021925		-0,01011584	
$C_s$	1,16329908		2,44098827		2,87493888		2,92644245		3,50588721	
$D_s$	-0,06536798		-0,03784579		-0,04436025		-0,05187451		-0,04645336	
	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$
	260,91	194,98	261,04	194,43	261,11	194,84	261,18	196,25	261,28	198,41
$A_\delta$	-15,31712908		-14,28351303		-18,42105781		-15,05024349		-16,64704381	
$B_\delta$	8,15077483		7,54044281		9,38086683		7,81215329		8,59353616	
$C_\delta$	3,62134385		3,33323825		4,79653383		3,51060535		3,93350317	
$D_\delta$	1,47220163		1,45833566		1,49526704		1,46708303		1,48230470	
$A_s$	2,58843811		2,08116050		3,22191175		2,78380492		2,63938668	
$B_s$	-0,00827055		-0,00559313		-0,00134330		-0,00924225		-0,00781023	
$C_s$	2,58656717		3,54946886		1,78315367		2,51963953		2,73400434	
$D_s$	-0,04837398		-0,03055222		-0,07457706		-0,05307568		-0,04594517	
	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$
	342,91	307,33	296,94	245,11	261,13	194,84	233,34	155,19	211,23	121,72
$A_\delta$	-17,33414666		-18,09881819		-15,79309163		-13,73174795		-14,49730837	
$B_\delta$	5,92397890		7,62320629		8,17336654		9,00050483		12,03524083	
$C_\delta$	1,56360776		2,79017186		3,86158978		5,32925053		9,76087529	
$D_\delta$	1,55183571		1,54883542		1,47433291		1,46046181		1,43752414	
$A_s$	0,50910107		0,38215203		0,32767994		0,15166374		0,09413041	
$B_s$	-0,00767275		-0,00748094		-0,01378593		-0,00820852		-0,00957232	
$C_s$	5,74038737		3,70998608		1,70325680		1,76881219		1,03140433	
$D_s$	-0,02847183		-0,03886264		-0,07668042		-0,05264837		-0,06272059	

Таблица 7.10

**Значения коэффициентов из выражения (7.43)**

Обо- значе- ния	Параметры распределения интервалов между растениями									
	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$
	158,42	122,28	209,97	158,30	261,13	194,81	312,02	232,93	361,99	271,13
$A_\sigma$	1,17149578		1,18563753		1,16698115		1,13152648		1,10459009	
$B_\sigma$	0,99746530		0,99812378		1,00810013		1,02327534		1,03503168	
$C_\sigma$	-0,12366784		-0,16652337		-0,17305548		-0,14860154		-0,15370448	
$D_\sigma$	2,58445231		3,34869611		4,62194701		6,48769010		7,88728766	
	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$
	260,91	194,98	261,04	194,43	261,11	194,84	261,18	196,25	261,28	198,41
$A_\sigma$	1,16831952		1,16062170		1,16558366		1,15596371		1,16797617	
$B_\sigma$	1,00777062		1,00961974		1,00820580		1,01110201		1,00785040	
$C_\sigma$	-0,17672496		-0,15616033		-0,16268703		-0,15232017		-0,17809154	
$D_\sigma$	4,54787472		4,82992648		4,81780569		4,95419991		4,67218257	
	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$	$\bar{a}$	$\sigma_a$
	342,91	307,33	296,94	245,11	261,13	194,84	233,34	155,19	211,23	121,72
$A_\sigma$	1,10048779		1,13158294		1,16215738		1,17709247		1,18786882	
$B_\sigma$	1,03486715		1,02235956		1,00913745		1,00317755		0,99768595	
$C_\sigma$	-0,18504082		-0,16209584		-0,15714912		-0,13717911		-0,13133359	
$D_\sigma$	8,07670575		6,36667999		4,86874185		3,75689346		2,72508993	

Таблица 7.11

**Значения коэффициентов из выражений (7.44) – (7.47)**

Обо- значе- ния	Значение $i$ – первого индекса в обозначениях коэффициентов			
	1	2	3	4
$A_{i\sigma}$	2,24564854	0,74538452	-5305,88623270	-4461,20112720
$B_{i\sigma}$	-0,49916749	0,07369380	-25,68941305	13,58605064
$C_{i\sigma}$	2,63114642	-14,78296193	669,79817216	0,00087707
$D_{i\sigma}$	-206,48421061	50,53228544	—	392263,96006

каждого растения от струны, а и интервалы между соседними растениями. В качестве последних следует понимать расстояние между нормальными, опущенными на струну с точек произрастания растений;

- математическую обработку совокупности отклонений растений относительно оси рядка следует проводить после определения оценки среднего арифметического интервала между растениями, и среднеквадратического отклонения этих интервалов;

- отклонение текущего растения относительно оси рядка следует выполнять методом скользящего среднего по пяти растениям;

- после выполнения математических расчетов по определению оценки среднего квадратического отклонения растений относительно оси рядка следует воспользовавшись формулами (7.43) – (7.47), использовав предварительно найденное значение среднего арифметического интервала, и среднеквадратического отклонения интервалов между растениями, определить несмещенную оценку искомого параметра.

Все другие пункты ранее изложенной методики (п. 7.3.1, стр. 333 – 334) остаются прежними.

7.3.4. Результаты эксперимента. Основной задачей полевых исследований была проверка осуществимости идеи послепосевого ленточного ВВГ, выполняемого как самостоятельная операция.

Агрегат для испытания экспериментальной технологии и технических средств для ее осуществления (рис. 6.15) состоял из трактора ЮМЗ-6, навесного культиватора-растениепитателя КРН-4,2, монтируемого подкормщика-опрыскивателя ПОМ-630 и двух ЩН конструкции ВНИИОБ [37, 39]. Нарезку щелей осуществляли с помощью агрегата (рис. 6.18), состоящего из трактора Т-74 и навесного щелевателя ЩП-00-000, дооборудованного гидрофицированным маркером. Посев производили сеялкой СПЧ-6ФС, навешенной на трактор МТЗ-80 (рис. 6.19). На всех агрегатах щелеватели были установлены на расстоянии 1,4 м друг от друга, симметрично их продольной оси симметрии. Для улучшения всхожести семян кукурузы, а, также повышения точности оценки их глубины заделки во всех опытах применяли послепосевное прикатывание кольчато-шпоровыми катками.

Фактическая глубина заделки ( $\bar{h}$  – среднее значение) семян кукурузы при посеве составила 77–85 мм (табл. 7.12). Операцию по внесению гербицидов выполняли с глубиной хода РО 50, 60 и 70 мм (исходя из настроек), т.е. разница между глубиной заделки семян и глубиной ВВГ  $\Delta_h$  составляла 10, 20 и 30 мм. Скорость движения агрегатов при посеве и при внесении гербицидов составляла 2,3 м/с, что соответствует техническому заданию. На контрольном участке гербицид не вносили. Оценка параметров ширины ленты посева семян (отклонения семян от оси рядка) производили по методике, изложенной выше.

Из табл. 7.12 видно, что среднее для четырех повторностей опыта значение среднеквадратического отклонения  $\sigma_r$  оставалось стабильным (7,92, 7,87 и 8,00 мм) на контроле и в опытах, когда  $\Delta_h$  было равно 20 и 30 мм.

Таблица 7.12

Параметры распределения семян кукурузы после выполнения операции послепосевного ВВГ для контроля, где гербицид не вносили и трех значений разности  $\Delta_h$  между глубинами заделки семян и внесения гербицидов (все величины в мм)

$\Delta_h$	Параметры	Номер повторности опыта				Среднее значение	Интервал изменения величины
		1	2	3	4		
КОНТ-роль	$\bar{r}$	-0,01	0,08	-0,06	0,06	0,02	0,13
	$\sigma_r$	7,40	8,39	7,37	8,50	7,92	1,13
	$\bar{h}$	81,95	84,41	84,14	85,37	83,97	3,42
	$\sigma_h$	5,57	5,72	5,66	5,54	5,62	0,18
	$\bar{a}$	212,96	212,86	217,33	208,92	213,02	8,41
	$\sigma_a$	83,86	84,29	85,82	86,35	85,08	2,48
	$\sigma_r^*$	8,68	9,84	8,64	9,94	9,27	1,31
30	$\bar{r}$	0,06	0,01	0,13	0,12	0,08	0,12
	$\sigma_r$	7,45	7,99	7,83	8,20	7,87	0,75
	$\bar{h}$	79,73	82,06	82,94	81,15	81,47	3,20
	$\sigma_h$	5,46	5,41	5,54	5,70	5,52	0,29
	$\bar{a}$	213,50	220,07	212,20	221,56	216,83	9,36
	$\sigma_a$	86,02	84,58	86,75	85,33	85,67	2,17
	$\sigma_r^*$	8,73	9,39	9,16	9,66	9,24	0,93
20	$\bar{r}$	-0,07	0,17	0,01	0,01	0,03	0,24
	$\sigma_r$	7,65	8,51	7,68	8,17	8,00	0,85
	$\bar{h}$	82,01	84,50	82,28	82,46	82,81	2,48
	$\sigma_h$	5,50	5,84	5,35	6,10	5,70	0,75
	$\bar{a}$	211,00	225,18	210,56	215,24	215,50	14,62
	$\sigma_a$	84,19	82,59	84,65	82,92	83,59	2,06
	$\sigma_r^*$	8,97	10,02	8,99	9,59	9,39	1,05
10	$\bar{r}$	0,06	0,12	0,05	-0,07	0,04	0,20
	$\sigma_r$	9,83	11,22	10,05	11,84	10,74	2,01
	$\bar{h}$	78,07	80,80	76,63	78,44	78,48	4,17
	$\sigma_h$	11,04	13,24	14,38	13,96	13,16	3,34
	$\bar{a}$	214,30	219,08	221,10	222,39	219,21	8,09
	$\sigma_a$	84,99	78,16	84,64	82,39	82,54	6,83
	$\sigma_r^*$	11,55	13,24	11,85	13,98	12,66	2,42

В случае уменьшения  $\Delta_h$  до 10 мм обнаружилось задевание ранее высеянных семян кукурузы РО вносящими гербицид. В результате величина  $\sigma_r$  подскочила до 10,74 мм. Средний интервал варьирования величины  $\sigma_r$  при  $\Delta_h = 10$  мм увеличился почти в двое, т.е. до 2,01 мм, в то время как в предыдущих опытах он составлял 1,13, 0,75 и 0,85 мм. Все это позволяет заключить, что в случае, если глубина посева выполняется глубже чем последующее ВВГ на 20 и более миллиметров, то перераспределения семян под слоем почвы не происходит.

Такой же вывод следует из оценок распределений семян по глубине их заделки (табл. 7.12). Измеряли ее по светлой части стеблей, извлеченных из почвы растений (рис. 7.28). Учитывали также семена, которые были обнаружены на дневной поверхности поля, хотя и не прорасли. Другая часть семян, которые остались в основном в верхнем сухом слое почвы и всходов не дали, в расчет не попали.

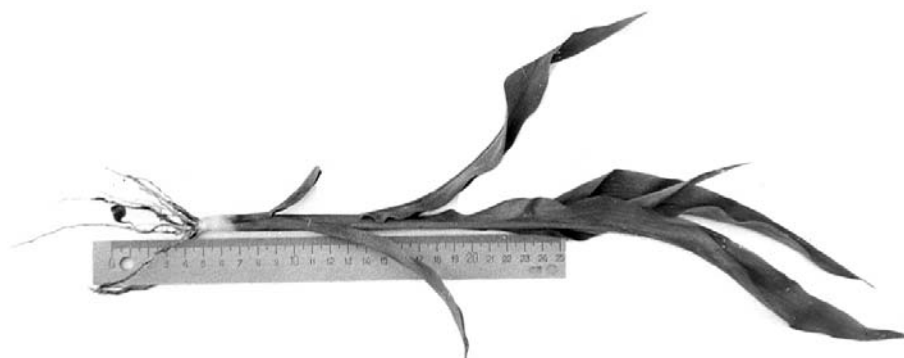


Рис. 7.28. Измерение глубины прорастания растений кукурузы

Распределение интервалов  $a_i$  между растениями (параметры  $\bar{a}$  и  $\sigma_a$ , табл. 7.12) в смысле оценки степени перераспределения ранее высеянных семян кукурузы по причине выполнения операции послевосевого ВВГ было не информативным. Во всех опытах значения параметров  $\bar{a}$  и  $\sigma_a$  различались на несколько миллиметров и носили случайный характер.

На последующих рис. 7.29–7.32 представлены гистограммы распределений  $r_i$  — отклонений растений от оси рядка (А),  $a_i$  — интервалов между растениями (В) и  $h_i$  — глубины заделки семян (С) первой повторности каждого опыта, т.е. когда гербицид не вносили (контроль) и, когда разница  $\Delta_h$  в глубине заделки семян и гербицида составила 30, 20 и 10 мм. Из рис. 7.29,С видно, что в случае, когда разница между глубиной хода сошника и РО для ВВГ  $\Delta_h$  составила 10 мм, часть ранее высеянных семян была задета лапами для ВВГ и перераспределена в верхнем слое почвы вплоть до выноса наружу. Такого не происходило, когда  $\Delta_h$  было равным 20 и более миллиметров. Отсюда следует вывод, что в процессе осуществ-



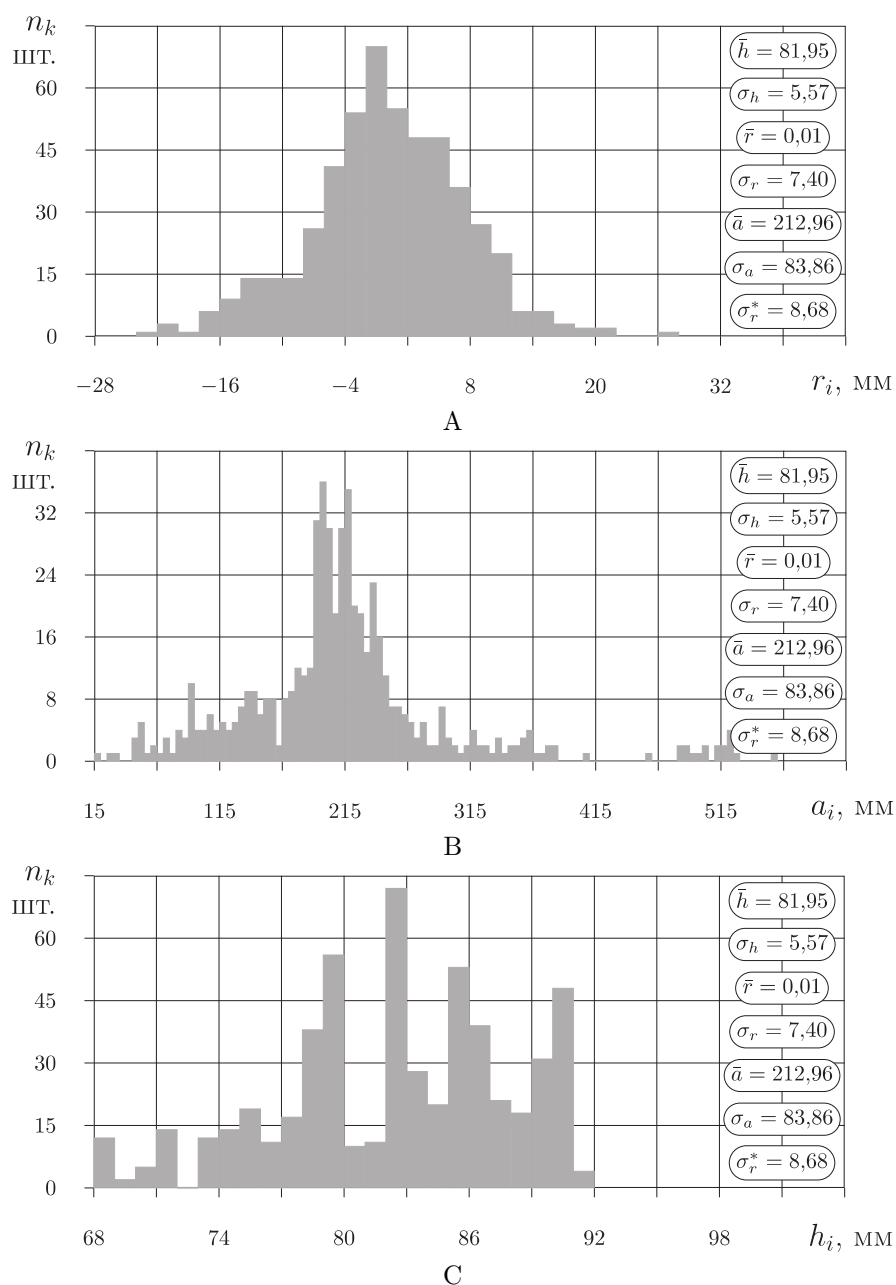


Рис. 7.29. Гистограммы распределения отклонений растений от оси рядка (А), интервалов между растениями (В) и глубины заделки семян (С) (контроль, первая повторность опыта)

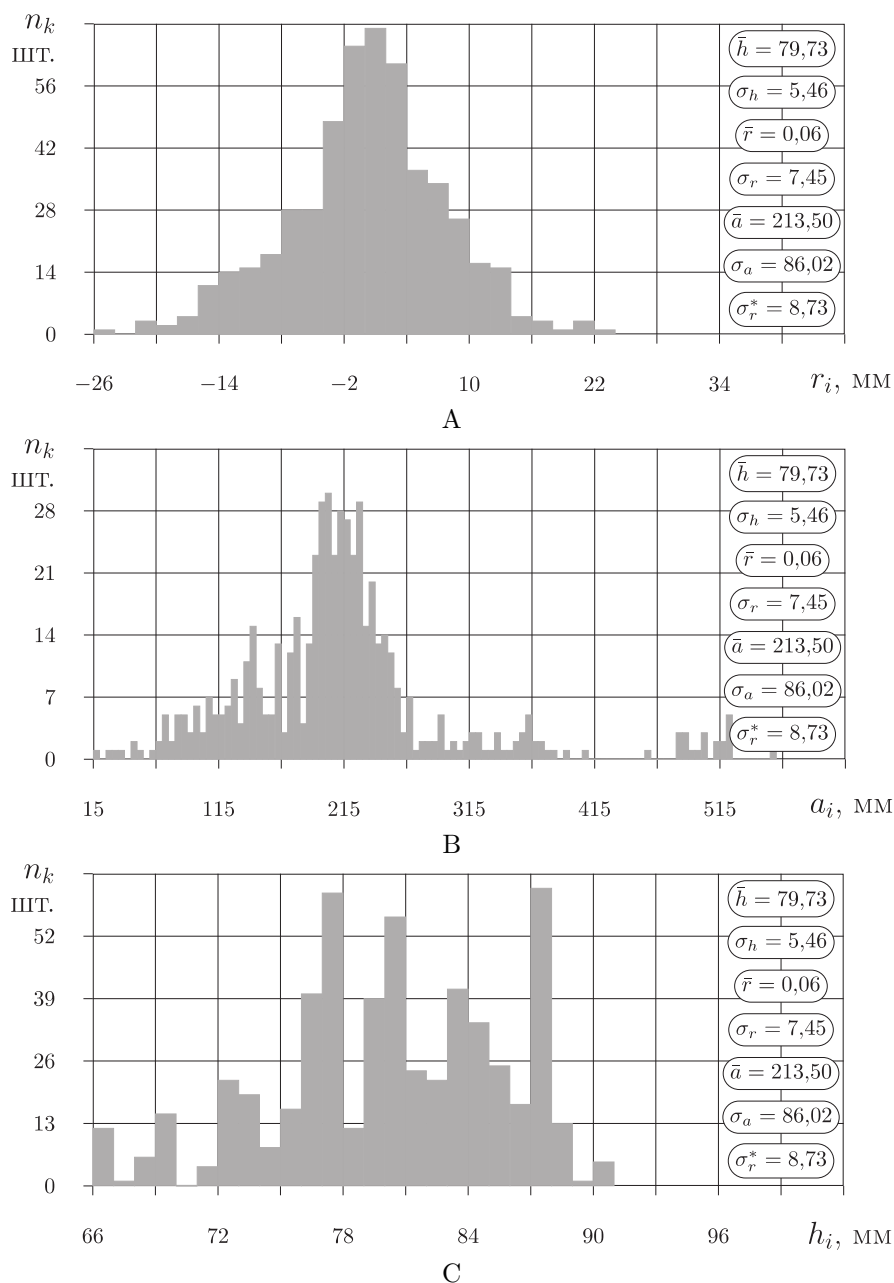


Рис. 7.30. Гистограммы распределения отклонений растений от оси рядка (А), интервалов между растениями (В) и глубины заделки семян (С) при  $\Delta_h = 30,0$  мм (первая повторность опыта).

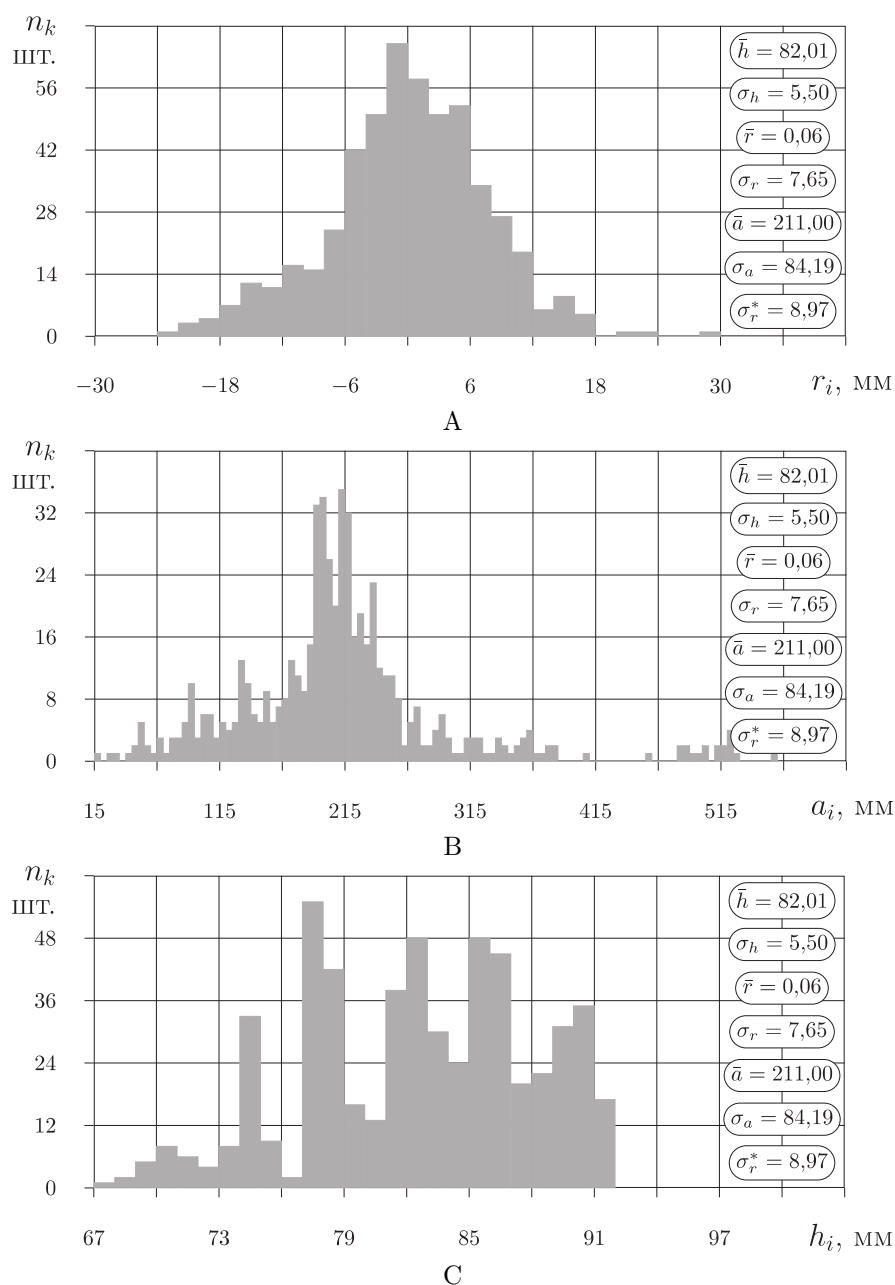


Рис. 7.31. Гистограммы распределения отклонений растений от оси рядка (А), интервалов между растениями (В) и глубины заделки семян (С) при  $\Delta_h = 20,0$  мм (первая повторность опыта).

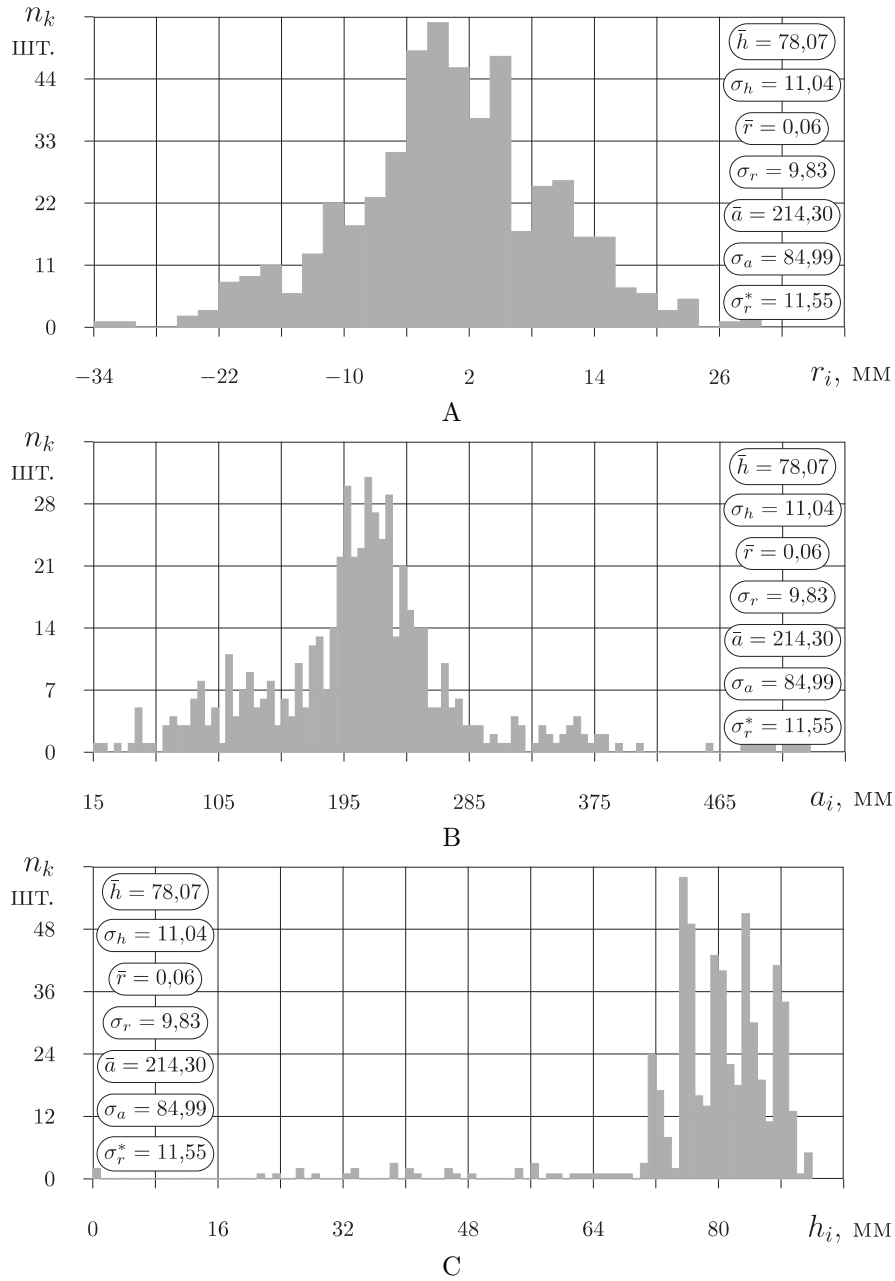


Рис. 7.32. Гистограммы распределения отклонений растений от оси рядка (А), интервалов между растениями (В) и глубины заделки семян (С) при  $\Delta_h = 10,0$  мм (первая повторность опыта).

ления операции послепосевого ВВГ нельзя допускать, чтобы разница в глубине хода сошников и РО для внесения гербицидов была меньше, чем 20 мм. Такой же вывод справедлив и для послепосевого внесения гербицидов путем применения комбинированного агрегата, построенного на базе трактора интегрального типа (вариант 2 табл. 6.2) или комбинированной машины (варианты 3а и 3б, табл. 6.2), когда сошники и РО для ВВГ имеют индивидуальную подвеску. Исключить ограничение на величину  $\Delta_h$  можно только в случае, когда сошник и РО для ВВГ объединены в одну жесткую конструкцию (варианты 3в и 3г, табл. 6.2).

#### 7.4. Эксперимент по оценке закономерностей уплотнения почвы вследствие выполнения самостоятельной операции послепосевого внутривспашечного внесения гербицидов

Твердость почвы измеряли, используя полевой твердомер конструкции Ю.Ю.Ревякина.

Снятие диаграмм твердости почвы проводили на почвенном фоне соответствующем выполнению каждой из трех операций: предпосевная культивация, посев кукурузы, послепосевное ВВГ.

Для того, чтобы обеспечить проведение всех трех замеров на проходе одного и того же РО культиватора, выполнявшего предпосевную культивацию, т.е. обеспечить сравнимость полученных диаграмм, первые два замера проводили сразу после прохода сеялки. Первый выполняли на расстоянии 10 см от оси рядка, а второй — непосредственно на оси рядка, причем места обоих замеров располагались на одной прямой, параллельной направлению предпосевной культивации, которое определялось по бороздкам, оставшимся после прохода РО культиватора. Третий замер производили в ближайших окрестностях того второго испытания после выполнения операции ВВГ. Перед выполнением всех трех замеров почву в месте замера выравнивали. Глубина снятия диаграмм составила 16 см. При снятии диаграмм твердости почвы и их обработке пользовались руководством по эксплуатации к прибору [411] и материалами ГОСТ 20915-75 “Сельскохозяйственная техника. Методы определения условий испытаний” [412].

В процессе испытаний интересовали не столько числовые значения твердости почвы, сколько общие закономерности, которые обуславливались выполнением послепосевого ВВР. Эксперименты проводились в колхозе Украина, Кременчугского р-на, Полтавской обл. в 1985 г. в условиях безотвальной системы земледелия.

Из рис. 7.33 видно, что операция ВВГ, которая выполнялась после посева, приводила к доуплотнению почвы в области заделки семян. Учитывая, что Полтавская область располагается в зоне недостаточного увлажнения, в которой 7 из 10 лет являются засушливыми, можно заключить, что выявленная закономерность является положительной, т.к. может способствовать подтягиванию влаги в область заделки семян. Поверхностный слой почвы при этом остается рыхлым, а, значит, повышенных потерь влаги через испарение не будет. Т.е. послепосевное ВВГ позволяет отказаться

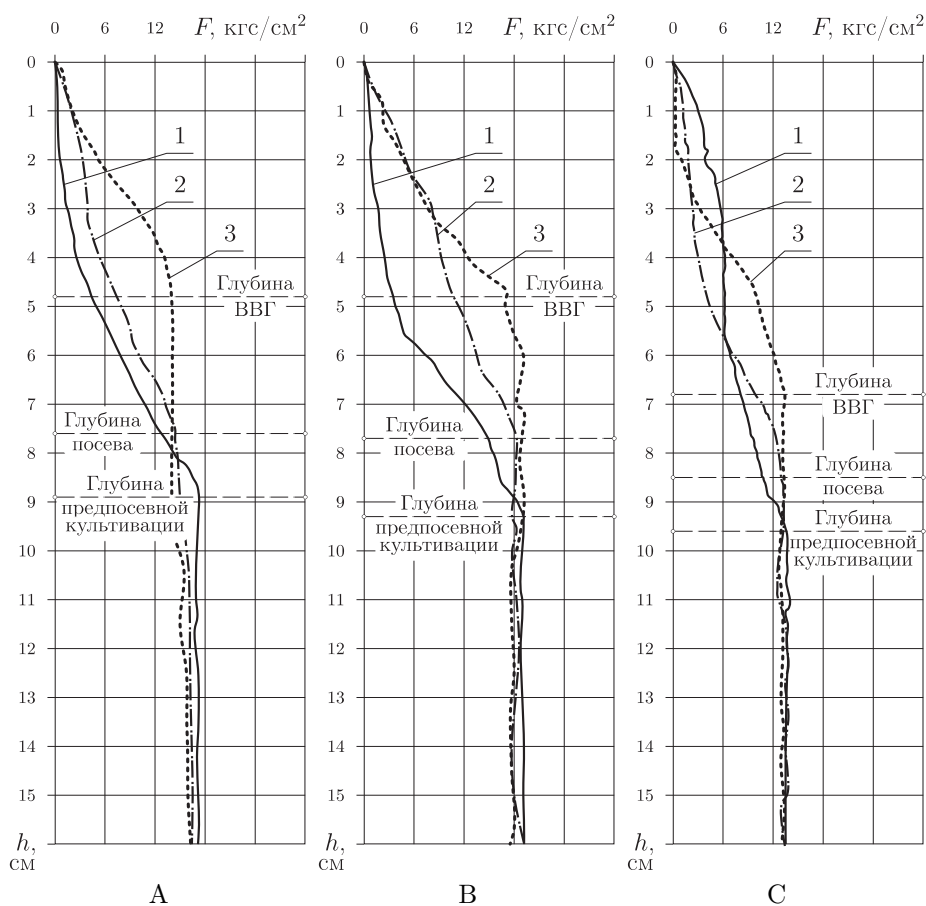


Рис. 7.33. Типичные графики твердости почвы ( $F$ ,  $\text{кгс/см}^2$ ) в зависимости от глубины ( $h$ ,  $\text{см}$ ) для трех полей (А, В, С) после выполнения трех операций: 1 – предпосевной культивации; 2 – посева кукурузы; 3 – послепосевного внутрипочвенного внесения гербицидов

от последующего прикатывания посевов кольчато-шпоровыми катками. С другой стороны засушливые условия требуют увеличения глубины заделки семян высеваемых культур, и тем существенно упрощают выполнение послепосевного ВВГ. В других условиях того же эффекта можно добиться, если применить комбинированные машины или агрегаты, перечисленные в пунктах 2, 3а и 3б табл. 6.2, у которых сошники и РО для ВВГ имеют индивидуальную подвеску. Можно ожидать, что в случае, когда сошник и РО для ВВГ объединены в одну жесткую конструкцию (варианты 3в и 3г, табл. 6.2), упоминавшегося выше эффекта доуплотнения почвы в области заделки семян высеянной культуры наблюдаться не будет.

## ВЫВОДЫ

1. Разработанные проточные щелевые распылители с прямоугольным щлицом (диаметр канала 1,6 мм, ширина щели 0,3 мм) при давлении  $P \in [0,2; 0,4]$  МПа дают расход рабочей жидкости  $V \in [0,62; 0,99]$  л/мин. и факел распыла  $\theta \in [92,35; 110,49]$  градусов. По сравнению с распылителями, у которых щлиц треугольной формы, они обеспечивают более равномерное распределение жидкости в пределах пятна распыла и поэтому в большей степени применимы для ленточного внесения гербицидов.

2. Манипулируя внешней формой корпуса разработанного распылителя в окрестностях его прямоугольной щели можно радикально менять параметры распределения жидкости по пятну распыла и так добиваться максимального соответствия техническому заданию. В известных конструкциях подобный результат можно получить, если на одном распылителе использовать две особо сориентированные треугольные щели. Такой распылитель вместо одного отверстия будет иметь два меньших по площади, а, значит, будет более склонным к засорению.

3. Большая зависимость между минутным расходом рабочей жидкости и давлением указывает на то, что в конструкциях машин для ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов нежелательно применять дозирование по давлению. Наиболее эффективно — применение индивидуального объемного дозирования по каждому из распылителей. В разработанных щелевых распылителях (диаметр канала 1,6 мм, щель 0,3 мм) при изменении рабочего давления в 2 раза от 0,2 МПа до 0,4 МПа средний минутный расход рабочей жидкости увеличивался в 1,4 раза, а максимальная разница между минимальным расходом жидкости при 0,2 МПа и максимальным при 0,4 МПа составила 1,61 раза.

4. Для исследования параметров распределения жидких средств химизации под слоем почвы без нарушения свойств покровного слоя наиболее подходящим является изотопный метод, в частности, с применением радионуклида технеция-99m (период полураспада 6,02 ч., энергия  $\gamma$ -излучения 140,466 КэВ.) в форме пертехнетата натрия  $NaTcO_4$  в составе водных растворов хлорида натрия  $NaCl$ . При этом лучше использовать твердотельные сцинтилляционные детекторы на основе щелочно-галлоидных  $NaJ(Tl)$  моно- или поликристаллов. По форме кристалла наиболее эффективными являются биконические сцинтилляторы.

5. Из результатов изотопных экспериментов следует, что для повышения равномерности распределения препарата под слоем почвы в разработанной конструкции соответствующего рабочего органа предпочтительнее применять наклонную ориентацию распылителя. В экспериментах угол наклона распылителя составил  $5,7-7^\circ$ , что позволило в 2,63–3,67 раза уменьшить

коэффициент вариации для плотности распределения препарата вдоль оси полосы внесения и в 3 раза — для средней глубины заделки препарата. Внутрипочвенное внесение гербицидов лучше осуществлять после посева, так гарантированно достигается программированное распределение рабочего вещества по обрабатываемой поверхности.

6. Несмещенные оценки параметров распределения отклонений растений от оси рядка нельзя получить без предварительной оценки параметров распределения тех же растений вдоль оси рядка. Для получения таких несмещенных оценок необходимо воспользоваться разработанной методикой. В частности, отклонение текущего растения относительно оси рядка следует выполнять методом скользящего среднего по пяти растениям.

7. Из результатов исследований параметров распределения семян кукурузы по ширине ленты рассева следует вывод, что в процессе осуществления операции послепосевого внутрипочвенного внесения гербицидов нельзя допускать, чтобы разница в глубине хода сошников и рабочего органа для внесения гербицидов была меньше, чем 20 мм.

8. Исходя из экспериментов по оценке закономерностей уплотнения почвы следует вывод, что послепосевное внутрипочвенное внесение гербицидов разработанными рабочими органами, выполняемое как самостоятельная операция, приводит к уплотнению почвы в зоне заделки семян кукурузы в 1,6–1,8 раза, чем способствует подтягиванию к ним влаги. Поверхностный слой почвы при этом остается рыхлым. Повышенных потерь влаги через испарение не происходит. Следовательно, нет необходимости в последующем прикатывании посевов кольчато-шпоровыми катками. Того же эффекта можно добиться, если применить комбинированные машины или агрегаты, у которых сошники и рабочие органы для внутрипочвенного внесения гербицидов имеют индивидуальную подвеску.



ГЛАВА 8  
ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗРАБОТАННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ДЛЯ ЛЕНТОЧНОГО ВНУТРИПОЧВЕННОГО  
ВНЕСЕНИЯ ГЕРБИЦИДОВ

8.1. Агротехнические преимущества

Для оценки хозяйственной эффективности разработанной технологии ВВГ использовался агрегат на основе трактора МТЗ-80 в соответствии со схемой на рис. 6.16. Будучи укомплектованным по одному РО (рис. 6.3) для ВВГ на рядок, такой агрегат обеспечивал внесение гербицида в зону рядков культурных растений ленточным способом с шириной обработанных лент 18 см (может достигать 24 см (табл. 5.1), в зависимости от конструкции и параметров распылителя).

Нарезку направляющих щелей в почве выполняли как самостоятельную операцию, используя трактор ДТ-75М с культиватором-плоскорезом-глубококорыхлителем КПГ-250, заменив плоскорезные РО ножами-щелевыми, установленными на расстоянии 140 см друг от друга и дополнительно оборудовав его двумя гидрофицированными маркерами. Посев выполняли сеялкой СПЧ-6ФС, доукомплектованной также двумя ЩЦ.

Технология возделывания кукурузы на контрольном участке (базовая технология) отличалась от предлагаемой сплошным поверхностным внесением гербицидов с последующей немедленной заделкой. Для этого использовали комбинированный агрегат состоящий из трактора ЮМЗ-6АЛ, подкормщика-опрыскивателя ПОМ-630 и дискового луцильника ЛДГ-5. Междурядные обработки на контрольном и опытных участках, проводились одинаково, но на контроле технологических щелей в почве не нарезали и все операции выполняли традиционным образом. Во всех опытах использовали почвенный гербицид эрадикан (80%-ный). Глубина заделки гербицида в опытах составила 4–5, 6–7 и 8–9 см, а на контроле — 8–9 см.

Результаты сравнения эффективности гербицидного действия препарата эрадикан (80%-ный) при внесении его традиционным способом (базовый вариант) и предлагаемым, ленточным, внутрипочвенным, показывают преимущества предлагаемого варианта (табл. 8.1, 8.2) [300]. Максимальная гербицидная активность препарата (в сравнении с контролем в 2,0–6,0 раза) была в случае применения предложенного способа его внутрипочвенного внесения на глубину 4–5 см.

Урожайность кукурузы на опытных участках не всегда превышала контроль. Так 1986 году, который отличался значительной засухой, на контроле урожай был выше на 3,2 ц/га. Детальный анализ динамики роста и степени развития растений на опытных участках показал, что в условиях засухи направляющие щели в почве способствовали дополнительным потерям влаги и в результате соседние с щелями рядки растений сказывались менее развитыми. Исходя из выше приведенного можно предположить об ограниченной пригодности метода вождения “направляющая щель” в условиях зоны недостаточного увлажнения и богарного земледелия. В этом смысле

Таблица 8.1

**Динамика роста сорняков в посевах кукурузы в зависимости от способа внесения гербицида эрадикан (80%-ный)**

Фаза развития растений кукурузы	Количество сорняков на опытных участках по годам					
	1986 г.		1987 г.		1988 г.	
	шт. на 1 м <sup>2</sup>	масса, в г	шт. на 1 м <sup>2</sup>	масса, в г	шт. на 1 м <sup>2</sup>	масса, в г
Базовый вариант						
2–3 листьев	16,2	—	23,7	—	14,1	—
8–9 листьев	26,4	67,1	31,2	75,4	18,7	83,0
молочной спелости зерна	24,7	59,8	26,5	76,1	23,4	98,8
Предлагаемый вариант при глубине внесения препарата 4–5 см						
2–3 листьев	5,3	—	4,9	—	7,1	—
8–9 листьев	6,1	11,2	7,5	14,2	9,4	22,1
молочной спелости зерна	6,7	14,8	9,1	15,1	9,9	36,0

Таблица 8.2

**Влияние глубины заделки препарата эрадикан (80%-ный) на его гербицидную активность при возделывании кукурузы на зерно**

Глубина заделки гербицида, в см	Масса сорняков в период молочной спелости зерна, в г/м <sup>2</sup>		
	1986 г.	1987 г.	1988 г.
4–5	14,8	15,1	36,0
6–7	17,2	16,7	36,4
8–9	29,3	18,5	41,9

эффективнее предложенный вариант вождения агрегатов по одной направляющей щели. Конструкция авторских технических средств для этой цели показана на рис. 6.20, 6.21 и 6.22.

На рис. 8.1 представлено поле совхоза Кременчугский, Кременчугского района Полтавской области (1987 г.). На этом поле применялось послепосевное ленточное ВВГ. После появления всходов отчетливо видно, что вдоль рядков посевов подсолнечника почва остается чистой от сорняков. Кроме того, слева на переднем плане видны следы от направляющих щелей. Путем



Рис. 8.1. Поле подсолнечника, на котором применялось предложенная технология послепосевного ленточного ВВГ

использования шлейфов из тяжелых цепей, закрепленных за ШЦН, они полностью засыпаны рыхлой почвой, и благодаря этому существенно уменьшено испарение влаги из них. В качестве направляющих они полностью сохраняют свою функциональность.

#### 8.2. Оценка предложенных инженерно-технологических решений на экологичность и эргономичность

8.2.1. Уменьшение отрицательного воздействия на окружающую среду. Предлагаемые технические средства и технологические решения предназначены для осуществления ленточного ВВГ, которое в сравнении с другими известными методами применения гербицидов, обладает рядом экологических преимуществ [301]:

во-первых, в силу того, что в ряде случаев, отдавая предпочтение почвенным препаратам, удается сократить общее количество химобработок;

во-вторых, ленточный метод внесения позволяет в значительной мере (до 70%) сократить расход препаратов, а, значит, и поступления их в окружающую среду;

в-третьих, путем ВВГ удастся сократить несколько путей их бесполезных, но не безвредных для экологии потерь (выветривание, фотохимический распад и, частично, смыв препарата).

Следует также заметить, что сокращение потребности в гербицидах, в случае широкого внедрения предлагаемых технологий, влечет за собой уменьшение их производства, а, значит, уже на химических заводах обуславливает снижение вредных воздействий на окружающую среду.

8.2.2. Улучшение условий и повышение производительности труда обслуживающего персонала и механизаторов. В общем, внутрпочвенное внесение — операция малопродуктивная. В этом смысле ее нельзя сравнить не только с поверхностным внесением с помощью штанговых орудий, а даже просто с культивацией. А это значит, что на ее выполнении должно быть задействовано больше техники и людей и более продолжительное время. Контролировать качество внесения весьма трудно. А в процессе движения, до сегодняшнего дня, так и вовсе не возможно. Отсюда, более частые остановки и, следовательно, значительный объем проходов в неустановившихся режимах. Опять таки, в силу низкой рабочей скорости агрегата, вносящего гербицид внутрпочвенно, расходы рабочей жидкости, как правило, выше, чем при открытом сплошном внесении штанговыми орудиями, а значит больше и объем работ по их приготовлению и заправке емкостей. Засоряемость внутрпочвенных распылителей также выше. Монтаж и демонтаж — сложнее. В конечном итоге все это требует дополнительных затрат рабочего времени людей, имеющих дело чаще всего с небезопасными для здоровья препаратами.

Решить указанные выше проблемы все вместе и окончательно пока нельзя. Но для большинства из них, рассмотренных выше, перспективные технологические решения были предложены.

Так, производительность труда можно повысить, если использовать разработанные комбинированные орудия или агрегаты, например, на базе тракторов интегрального типа, у которых имеется передняя и задняя навесные системы (табл. 6.2).

Расходы РЖ можно уменьшить, если в гидравлических системах орудий для ВВГ использовать предлагаемые конструкции насосов-дозаторов перистальтического типа [333–336], позволяющих реализовать индивидуальное объемное дозирование для каждого распылителя отдельно (п. 6.2.2) и предлагаемые малорасходные щелевые распылители с прямоугольным сечением щели шириной менее 0,3 мм (рис. 6.4, 6.9, 6.11, 6.12).

Применение предлагаемых одноразовых или оборотных, заполняемых в фабрично-заводских условиях емкостей для РЖ, эффективно с многих точек зрения (пункт 6.2.2). Главная из них — безопасность труда человека. Таким образом, полностью исключаются обычно выполняемые в поле в непригодных или частично приспособленных условиях операции по приготовлению и переливу РЖ. В силу существенного снижения вероятности попадания сора в систему, применение такого инженерного решения благоприятно сказывается на надежности работы таких орудий, а, значит, позволяет улучшить качественные показатели выполнения операции и уменьшить количество работ по очистке и приведению гидросистемы машины в работоспособное состояние.

Минимизировать трудоемкость и время, необходимое для обслуживания распылителей (подбор, замену, очистку, осмотр и пр.), удастся, используя предлагаемые технические решения, заложенные в конструкцию самого рабочего органа для внутрпочвенного внесения гербицидов [301, 320].

Предложенные в работе технические решения направлены на снижение расхода РЖ, а, значит, затрат труда и времени на ее приготовление и заправку агрегата, на сокращение трудоемкости обслуживания агрегата в целом и РО в частности, а также на улучшение условий труда человека.

### 8.3. Разработка метода для экспресс-оценки безопасности и эффективности гербицидного действия

Химические методы защиты растений, в частности, применение почвенных гербицидов, всегда имели множество оппонентов и часто в лице государства. В основном, это происходит по экологическим, эргономическим и медицинским соображениям и в большинстве своем вполне обосновано. Но обозначенные методы все-таки применяются. Оправдание тут одно — они позволяют в значительной мере повысить эффективность сельскохозяйственного производства и пока еще конкурируют с альтернативными (биологическими, механическими и пр.). В настоящее время применение почвенных гербицидов стало к тому же еще и очень дорогим. В связи с этим падает рентабельность метода. Отсюда логично появление экологически щадящих и экономически более обоснованных приемов, в частности, ленточного внутрпочвенного их внесения с помощью предлагаемых технических средств и технологий.

Собственный опыт показывает, что применительно к возделыванию кукурузы возможная экономия препаратов достигает 70%. Тем не менее, на сегодняшний день нет четкой методики расчета норм расхода препарата при ленточном ВВГ. Очевидно — экономия препарата должна отставать от доли необрабатываемой площади. Со временем, благодаря поступлениям влаги в почву, гербицидные ленты размываются. Как следствие — снижается концентрация рабочего вещества на основной обработанной территории почвы. Последний тезис достоверно доказан, в частности, автором, путем применения радиологических методов при изучении распределения препаратов под слоем почвы (п.г. 7.2) [413, 414]. Понятно, что это явление не однозначно, поскольку напрямую зависит от погодных условий, но всегда в той или иной мере проявляется и с ним нельзя не считаться.

Нет и полноценной методики (экспресс-методов и соответствующих устройств) для оценки текущей эффективности препарата, безвредности воздействия его на полезное растение и на человека, работающего или работающего с ним. Существование таких приборов и методик позволило бы в значительной мере обосновать новые и существующие технологии внесения гербицидов, разработать оптимизированные конструкции технических средств для их применения и в должной мере подобрать режимные параметры использования упомянутых технических средств.

Полезным в решении такой задачи стал многолетний опыт работы ученых кафедры генетики и цитологии КНУ им. В.Н.Каразина, разработавших метод внутриклеточного микроэлектрофореза (МЭФ) [415] клеток живых организмов. Этот метод позволяет оценивать их функциональное состояние [416–418], т.е. степень воздействия химических веществ на орга-

низм [419], биологический возраст [420, 421], заболевания [422] и т.д. Фактически задача экспресс-оценки эффективности и безвредности применения гербицидов [423] совпадает с задачами, которые могут быть решены посредством применения метода электрофореза. В том и другом случае речь идет об измерении тонуса живого организма. Если сорное растение гербицидом угнетается, то это значит, что жизненный тонус его клеток со временем должен падать и всегда быть меньше тонуса клеток сорного растения, не подвергающегося химобработке. То же, но в противоположном смысле относится и к полезным растениям, и к состоянию организма человека [419], занятого, например, на внесении гербицида и долгое время контактирующего с ним или пребывающего под воздействием его паров или частиц.

Рассмотрим суть метода внутриклеточного МЭФ. Ядра клеток тканей живого организма имеют отрицательный электрический заряд [424]. Если живую клетку поместить во внешнее электрическое поле, не приводящее к разрушению ее структуры, то в силу существования заряда на ее ядре, некоторое время под микроскопом удастся фиксировать факт его перемещения. В переменном электрическом поле, колебания ядра клетки можно видеть достаточно продолжительное время. До полного или частичного разрушения клетки. Организовав наблюдение за должным из статистических соображений количеством клеток живого организма, одновременно подвергающихся воздействию одного и того же переменного электрического поля, нетрудно подсчитать количество электроотрицательных, т.е. проявляющих отрицательный заряд ядер. Доказано, что величина этого заряда ядер клеток и количество электроотрицательных ядер в процентах (ЭО%) коррелируют с функциональным состоянием организма [416–422, 424]. Если живой организм угнетается, то ЭО% падает.

Основными компонентами комплекта технических средств для проведения МЭФ являются: оптический микроскоп, камера для электрофореза и источник внешнего напряжения переменной полярности (с прямоугольным характером изменения напряжения).

Камера (рис. 8.2) представляет собой предметное стекло 1, по краям которого на всю ширину на расстоянии 20 мм друг от друга наклеены пленочные электроды 2. Прозрачной остается средняя часть стекла, не занятая электродами и имеющая прямоугольную форму. Материал электродов коррозионно-стойкий. Установлено стекло на рамке 3. От перемещений стекло фиксируется зажимами 4, которые имеют разъемы 5 для подключения к источнику тока переменной полярности.

Объект для исследований, это проба клеток, например, буккального эпителия человека в электролитической среде (нейтральной с точки зрения сохранения жизнеспособности клетки: 2,89 мМ хлористого калия на 3,30 мМ фосфатном буфере;  $pH = 7,0$ ; удельная электропроводность —  $0,139 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$  [421]), помещают между двух покровных стекол 6 и 7. Сам пакет покровных стекол укладывают на электроды 2 камеры в центре ее прозрачной части. Чтобы обеспечить надежный контакт между электродами камеры и слоем электролита 8 между покровными стеклами используют

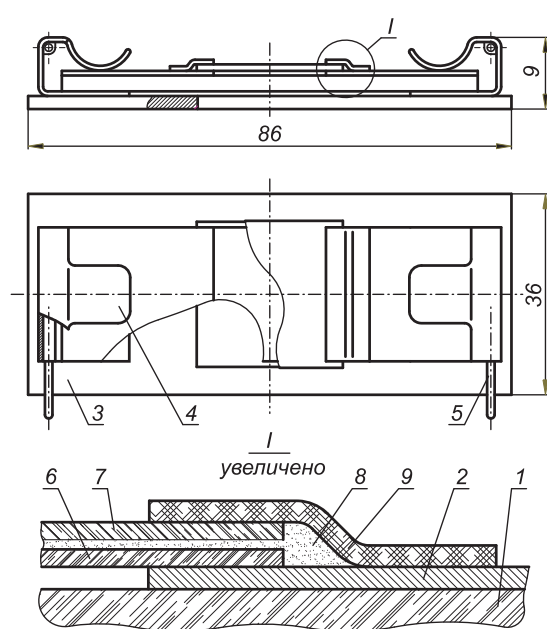


Рис. 8.2. Двухэлектродная камера для микроэлектрофореза

мостики 9 из пропитанной электролитом фильтровальной бумаги. Мостики укладываются частично на электроды 2 и частично на покровные стекла. Центральная часть пакета покровных стекол остается прозрачной. Камеру вместе с пакетом покровных стекол укладывают на предметный столик микроскопа и закрепляют на нем. После подключения электропитания визуальным способом подсчитывают количество подвижных ядер и определяют ЭО%. Среда электролита, в зависимости от объекта и целей исследований, может в некоторой степени изменяться [418, 421, 425, 426].

Подвижность отдельных элементов клеточной струк-

туры генеративных клеток различных живых организмов неодинакова. При изучении клеток некоторых растений, в частности, проростков кукурузы, проще удается фиксировать подвижность ядрышек и хроматина. ЭО% в таких случаях подсчитывают обычным способом [426].

В процессе применения метода МЭФ в исследованиях, связанных с внесением гербицидов, сам метод и технические средства для его осуществления автором были модифицированы. Несмотря на значительные преимущества двухэлектродной камеры (рис. 8.2), заключающиеся в простоте конструкции и использования, в случаях незначительной корреляции исследуемого фактора с электрокинетическими свойствами объектов клеточной структуры эффективнее использовать предложенную автором шестнадцатиэлектродную кольцевую камеру (рис. 8.3). Последняя является рациональной, если есть особенности строения клеток живых организмов, например, ядро фиксировано на клеточной мембране. Тогда подвижность ядра клетки зависит от направления электрического воздействия.

Принципиальной особенностью новой камеры является наличие шестнадцати также плоских радиально ориентированных электродов 1, выполненных в прямоугольной пластине 2 фольгированного гетинакса путем сверления ее в центральной части и последующего разрезания в радиальном направлении. Фольгированное покрытие 3 гетинакса в пределах между соседними разрезами, вместе со сверлением, образующими электроды, остав-

лено нетронутым, а далее, к местам пайки 4 проводников электропитания камеры, травлением образованы изолированные дорожки 5. Как и ранее, объект для исследований помещают в тонком слое электролита 6, заключенного между двумя покровными стеклами 7 и 8. Последние теперь выполнены круглыми и центрируются на электродах 1, концентрично упомянутому

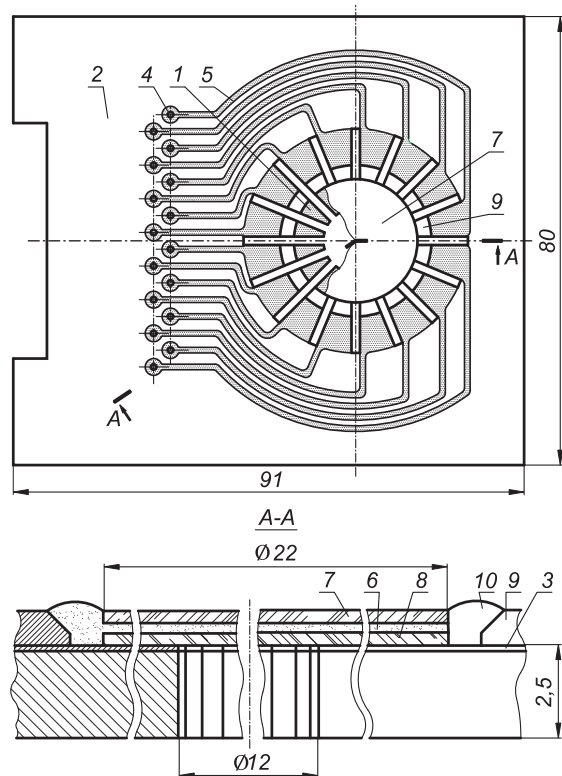


Рис. 8.3. Камера для циклического микроэлектрофореза

отверстию, за счет напаяк 9, также концентрично ориентированных относительно того же отверстия. В зазор между пакетом стекол 7, 8 и напайками 9 пипеткой на каждый электрод отдельно помещают по капле 10 электролита, обеспечивающего надежный контакт электродов 1 с токопроводящим слоем между стеклами 7, 8.

Подключение электрического потенциала к электродам камеры осуществляется от специального устройства следующим образом. Одновременно в любой момент времени под напряжением находятся шесть электродов. Три соседних электрода по одну сторону камеры, имеют положительный потенциал, а еще три, по другую сторону — отрицательный. Переключение осуществляется путем добавления в группу с

одинаковым потенциалом четвертого электрода с одной стороны и одновременного выключения первого электрода с другой стороны. То же самое выполняется и с группой электродов противоположного потенциала. Таким образом, достигается эффект непрерывного вращения не пропадающего электрического поля, воздействующего на пробу клеток в слое электролита между покровными стеклами.

Устройство электропитания камеры позволяет осуществлять автоматическое вращение электрического поля с заданной скоростью в обоих направлениях. Величина напряжения на электродах регулируется в пределах интервала 10–85 В. Скорость вращения, или, иначе, скорость переключения потенциала на следующий электрод камеры, лежит в пределах 1/16–



3 с. Имеется возможность ручной смены полярности, остановки и смены направления вращения. Стрелочными приборами контролируются напряжение и сила тока. Устройство для циклического внутриклеточного МЭФ, в силу особенностей принципа работы, позволяет автоматически контролировать качество подготовки пробы к исследованиям. Если пакет покровных стекол установлен с перекосом, или имеется плохой контакт между отдельными электродами камеры и токопроводящим слоем пробы, то при обходе по кругу фиксируется переменное по модулю падение напряжения на камере и нестабильный потребляемый ток. Последнее есть основанием для устранения причин или смены пробы. По величине стабильного тока и напряжения можно судить о толщине токопроводящего слоя между покровными стеклами пробы. В случае, если по причине анизотропности структуры клетки, ядро клетки имеет ограниченную подвижность в ряде направлений, то при обходе по кругу всегда найдется оптимальное воздействие на ядро, вызывающее хотя бы кратковременное его перемещение и, тем самым, обнаруживающее наличие на нем электрического потенциала.

Для проверки работоспособности камеры и возможности идентификации факта отрицательного влияния на человека некоторых из гербицидов, были проведены поисковые эксперименты. В табл. 8.3 приведены результаты подсчетов ЭО% в опытах, отношений их к контролю, а также выборочные средние  $\bar{x}$  с доверительными полуинтервалами  $m$  и среднеквадратическими отклонениями  $s$ . Расчет полуинтервалов выполнен в соответствии с доверительной вероятностью 0,95. Различия в контроле связаны с разным возрастом доноров. Опыты №1–5 соответствуют донорам в возрасте 18 лет, а опыты №6–10 — 41 год.

Полученные данные дают основания утверждать, что во всех опытах (исключение — опыт с зенкором) зафиксировано достоверное отрицательное влияние гербицидов на человека, поэтому метод может найти применение для экспресс-оценки степени этого влияния. В дальнейшем планируется расширять применение метода. В частности, для оценки допустимой продолжительности работы конкретных людей с определенными видами гербицидов. В будущем возможна также оценка эргономичности технологий и механизмов для применения гербицидов, а также их хозяйственной эффективности. Последнее, в частности, зависит от возможности и точности оценки угнетающего воздействия препаратов на сорные растения и безвредности их для полезных растений. Есть основания полагать, что применение в конструкции камеры для внутриклеточного МЭФ современных инженерно-технологических решений, например, интегральной оптоэлектроники (для регистрации карты электрического потенциала клетки) может существенно повысить точность и возможности предлагаемого метода.

#### 8.4. Экономическая эффективность применения послепосевого ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов

Проведем экономическое сравнение предлагаемой и базовой (известной) индустриальной технологией возделывания кукурузы на зерно, применяе-

мой в хозяйствах с площадью пахотной земли до 1000 га и предусматривающей внесение гербицидов комбинированным агрегатом, состоящим из трактора МТЗ-80, подкормщика-опрыскивателя ПОМ-630 и дискового лущильника ЛДГ-5. Такая технология, предполагает сплошное внесение гербицидов и полное отсутствие механизированных междурядных обработок.

Таблица 8.3

**Влияние гербицидов на электрокинетическую подвижность  
клеточных ядер букального эпителия человека  
(А — ЭО%, В — отношение к контролю)**

Номер опыта	Контроль, ЭО%	2,4D		ТХАН		Зенкор	
		А	В	А	В	А	В
Концентрация 0,005%							
1	70	64	0,914	68	0,971	64	0,914
2	72	64	0,889	68	0,944	76	1,056
3	75	66	0,880	64	0,853	68	0,907
4	74	60	0,811	71	0,959	66	0,892
5	75	65	0,867	66	0,880	70	0,933
<i>x</i>	73,20	63,80	0,872	67,40	0,922	68,80	0,940
$\pm m$	$\pm 1,900$	$\pm 1,999$	$\pm 0,034$	$\pm 2,286$	$\pm 0,046$	$\pm 4,036$	$\pm 0,058$
<i>s</i>	1,939	2,040	0,034	2,332	0,047	4,118	0,059
Концентрация 0,05%							
6	48	15	0,313	44	0,917	21	0,438
7	45	12	0,267	26	0,578	26	0,578
8	47	14	0,298	31	0,660	27	0,574
9	50	11	0,220	28	0,560	18	0,360
10	52	13	0,250	30	0,577	29	0,558
<i>x</i>	48,40	13,00	0,269	31,80	0,658	24,20	0,501
$\pm m$	$\pm 2,368$	$\pm 1,386$	$\pm 0,032$	$\pm 6,210$	$\pm 0,131$	$\pm 3,988$	$\pm 0,086$
<i>s</i>	2,417	1,414	0,033	6,337	0,134	4,069	0,088

При сравнении рассмотрим самый неблагоприятный вариант реализации технологий в пользу существующей и поэтому предположим, что, во-первых, потенциальная засоренность выделенных под посев площадей оказалась незначительной и в течение всего вегетационного периода при базовой технологии возделывания кукурузы на зерно повторных обработок посевов страховыми гербицидами не понадобилось и, во-вторых, в случае предлагаемого варианта технологии сложившийся температурно-влажностный режим почвы не позволил совместить операции по предпосевной об-

работке почвы и ВВГ. Так может произойти, если из агрономических соображений глубина заделки семян кукурузы, а, следовательно, и глубина предпосевной культивации, должна быть больше чем оптимальная глубина заделки гербицида (например 8–10 и 4–5 см).

Определение годового экономического эффекта, получаемого за счет уменьшения расходов на химические средства защиты растений и исключения операции послепосевного прикатывания, производим по формуле:

$$\Theta = (Z_1 - Z_2) A, \quad (8.1)$$

где  $\Theta$  — годовой экономический эффект, грн;  $Z_1$  и  $Z_2$  — приведенные затраты единицы продукции (работы), производимой с помощью базовой и новой техники, грн;  $A$  — годовой объем производства продукции (работы) с помощью новой техники в расчетном году (объем внедрения).

Перечень операций, по которым технико-экономические показатели работы агрегатов имеют отличия, а также состав агрегатов для их выполнения, приведены в табл. 8.4.

Опять-таки, создавая благоприятные условия сравнения для базовой технологии, в табл. 8.4 не приведены операции посева, хотя в случае предлагаемой технологии, основанной на использовании направляющих щелей в почве, скорость движения посевного агрегата существенно выше, а его техникоэкономические показатели лучше.

Таблица 8.4

**Наименование операций и состав агрегатов, являющих собою отличия сравниваемых технологий возделывания кукурузы**

Наименование операции	Состав агрегата			
	Марка		Дополнительное оборудование	
	трактора	с.х. машины	наименование	штук
Базовый вариант:				
1. Внесение и заделка гербицидов	МТЗ-80	ПОМ-630 ЛДГ-5		
2. Послепосевное прикатывание	Т-70	С-11У ЗККШ-6		
Предлагаемый вариант:				
1. Щелевание	Т-70	ЩП-00-000		
2. Внесение и заделка гербицидов	МТЗ-80	ПОМ-630 КРН-4,2	щелеватель разработанный РО	2 6
3. Первая междурядная обработка	МТЗ-80	КРН-4,2	щелеватель	2

Стоимость комбинированного (предлагаемого) рабочего органа культиватора составляет 280,0 грн. Стоимость щелевателя — 2600,0 грн.

Технико-экономические показатели работы агрегатов ( $W_{см}$  — сменная выработка, в га/см.;  $W_{ч}$  — часовая производительность, в га/час.;  $G$  — погектарный расход топлива, в га/га;  $N$  — количество обслуживающего персонала, чел.;  $Ч_c$  — часовая ставка оплаты с надбавками и начислениями, IV тарифный розряд, грн), выполняющих выше упомянутые операции, представлены в табл. 8.5.

Некоторые необходимые для расчетов технико-экономические данные, относящиеся к технике, используемой в базовом и предлагаемом вариантах технологии возделывания кукурузы, приведены в табл. 8.6.

Годовые приведенные затраты определены по формуле:

$$З = C_{тз} + E_n K, \quad (8.2)$$

где  $C_{тз}$  — изменяемая часть текущих затрат, грн/га;  $E_n$  — нормативный коэффициент эффективности капиталовложений (далее принят равным 0,15);  $K$  — удельные капиталовложения, грн/га.

Расчет изменяемой части текущих затрат произведен по формуле:

$$C_{тз} = З_n + C_t + A + C_{хр} + C_{то} + C_{хим}, \quad (8.3)$$

где  $З_n$  — заработная плата, грн/га;  $C_t$  — стоимость израсходованного топлива и смазочных материалов, грн/га;  $A$  — амортизационные отчисления, грн/га;  $C_{хр}$  — затраты на хранение, грн/га;  $C_{то}$  — затраты на текущий ремонт и техническое обслуживание, грн/га;  $C_{хим}$  — затраты на химические средства защиты растений, грн/га.

Таблица 8.5

## Технико-экономические показатели работы агрегатов

Наименование операции	Показатели				
	$W_{см}$ , га/см.	$W_{ч}$ , га/час	$G$ , кг/га	$N$ , чел.	$Ч_c$ , грн.
Базовый вариант:					
1. Внесение и заделка гербицидов	10,9	1,56	3,2	1	10,05
2. Послепосевное прикатывание	46,0	6,57	1,3	1	10,05
Предлагаемый вариант:					
1. Щелевание	21,0	3,0	3,5	1	10,05
2. Внесение и заделка гербицидов	8,4	1,2	5,0	1	10,05
3. Первая междурядная обработка	14,1	2,01	3,2	1	10,05

Таблица 8.6

**Технико-экономические показатели задействованной техники**

Марки машин	Показатели					
	С, грн.	Т, час.	$\alpha$ , %	$\beta$ , %	Х, грн.	Ц, грн.
МТЗ-80	122500	1600	10,0	8,0	715,0	7,15
Т-70	120000	1000	12,5	7,7	715,0	7,15
ПОМ-630	29600	500	20,0	13,0	450,0	—
ЛДГ-5	29300	120	14,2	7,0	225,0	—
СУ-11У	27540	220	14,2	7,0	225,0	—
ЗККШ-6	22800	120	12,5	5,0	225,0	—
ЩП-00-000	28500	120	14,2	16,0	225,0	—
КРН-4,2	22600	350	14,2	9,0	225,0	—

На посевах кукурузы применяли почвенный гербицид эрадикан. Его норма внесения, стоимость одного килограмма и некоторые другие данные приведены в табл. 8.7.

Таблица 8.7

**Некоторые данные по расходу эрадикана (80%-ного) и денежных средств на его приобретение при возделывании кукурузы**

Гербицид	Норма внесения препарата по вариантах, в кг/га		Стоимость		
			1 кг препарата, грн/кг	препарата, расходуемого на 1 га посевов по вариантах, в грн/га	
	Базовый	Предлагаемый			Базовый
Эрадикан	8	2,06	48,00	384,00	98,88

При усовершенствованной технологии возделывания кукурузы гербицид вносили лентами шириной 18 см, т.е. только в защитные зоны рядков, поэтому расходы денежных средств на его приобретение составили только 26% от расходов при базовом варианте возделывания.

Формулы для расчет составляющих текущих затрат и удельных капиталовложений, а также их числовые значения для базового и предлагаемого вариантов технологии возделывания кукурузы приведены в табл. 8.8.

Таблица 8.8

**Формулы для расчета удельных капиталовложений и составляющих текущих затрат, а также их числовые значения**

Наименования составляющих текущих затрат и удельные капиталовложения	Формула и ее порядковый номер: $m, j$ — количество и порядковый номер операций; $n, i$ — количество и порядковый номер машин в агрегате.	Величина текущих затрат и удельных капиталовложений по вариантам, грн/га	
		Базовый	Предлагаемый
Удельные капиталовложения	$K = \sum_{j=1}^m \frac{1}{W_{чj}} \sum_{i=1}^n \frac{C_{ij}}{T_{ij}}, \quad (8.4)$	338,70	535,30
Заработная плата	$З_n = \sum_{j=1}^m \frac{Ч_{cj}}{W_{чj}} N_j, \quad (8.5)$	2,40	26,73
Стоимость израсходованных топлива и смазочных материалов	$C_{т} = \sum_{j=1}^m G_j Ц, \quad (8.6)$	32,18	129,4
Амортизационные отчисления	$A = \sum_{j=1}^m \frac{0,01}{W_{чj}} \sum_{i=1}^n \frac{C_{ij} \alpha_{ij}}{T_{ij}}, \quad (8.7)$	43,33	70,72
Затраты на текущий ремонт и техническое обслуживание	$C_{то} = \sum_{j=1}^m \frac{0,01}{W_{чj}} \sum_{i=1}^n \frac{C_{ij} \beta_{ij}}{T_{ij}}, \quad (8.8)$	24,00	53,39
Затраты на хранение	$C_{хр} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{W_{чj}} \sum_{i=1}^n \frac{X_{ij}}{T_{ij}}, \quad (8.9)$	2,62	4,15
Всего текущих затрат, включая расходы на гербицид		488,50	383,10

Годовой экономический эффект от внедрения предлагаемой технологии возделывания кукурузы на зерно на площади 1000 га при приведенных затратах в расчете на 1 га посевов для базового варианта 539,30 грн/га и для предлагаемого варианта 463,4 грн/га составит 76 тыс грн.

В расчете на 1 га экономический эффект от внедрения предлагаемой технологии составляет 75,89 грн. Разница удельных капиталовложений составляет 196,6 грн/га, а срок окупаемости — 2,6 года.

Уместно напомнить, что такую эффективность предлагаемого метода мы получили при самых неблагоприятных условиях его сравнения. На прак-

тике, при индустриальной технологии возделывания, не всегда удастся отказаться от применения страховых повторных обработок гербицидами и от междурядных культиваций. Да и не всегда разумно, с точки зрения агротехники, отказываться от механизированных междурядных рыхлений, даже если нет сорняков.

Кроме этого, при возделывании кукурузы по предлагаемому методу, используя мощный трактор ДТ-75М вполне возможно выполнять операцию по нарезке направляющих щелей в почве совместно с ленточным внесением гербицидов, а в ряде случаев, когда внесение гербицидов выполняется на глубину заделки семян, и отказаться от предпосевной культивации. Технически это можно осуществить, например, закрепив раму культиватора КРН-4,2, используемого для ВВГ, в задней части рамы переоборудованного под щелевание КПП-250. Культиваторные секции КРН-4,2, имеющие опорные колеса, в этом случае необходимо заменить на безопорные, т.е. снабженные только копирующими колесами.

В отношении предпосевной культивации наше мнение состоит в том, что в ряде случаев ее можно проводить также ленточным способом. Если перед предпосевной культивацией ставится задача только лишь сформировать семенное ложе, то эту функцию могут выполнить предлагаемые РО для ВВГ одновременно с выполнением своей основной операции. В противном случае культиватор КРН-4,2 необходимо доукомплектовать штатными стрелчатыми лапами так, чтобы он рыхлил почву сплошную. Важно чтобы при обоих вариантах технологии в конкретных почвенных условиях планируемая глубина заделки семян кукурузы и оптимальная глубина внесения гербицида совпадали. Если последнее условие не выполняется, то предпосевную культивацию необходимо проводить на требуемую глубину традиционным способом перед щелеванием и внесением гербицидов.

Все выше приведенное составляет резерв повышения экономической эффективности предлагаемого варианта технологии и, следовательно, дает основания полагать, что вычисленный годовой экономический эффект от применения ее является гарантированным.

## ВЫВОДЫ

1. Превышение эффективности гербицидного действия препарата эрадикан (80%-ный) при его ленточном внутрипочвенном внесении на глубину 4–5 см по сравнению с традиционным поверхностным способом его внесения с последующей заделкой дисковыми орудиями на посевах кукурузы на зерно составило 2,0–6,0 раза.

2. Полевыми экспериментами установлено, что применение вождения сельхозагрегатов по методу “направляющая щель” в условиях недостаточного увлажнения и богарного земледелия применимо только в случае использования разработанных устройств по вождению агрегатов по одной щели, предполагающих уменьшение их количества и засыпание рыхлой почвой после каждого прохода.

3. Уменьшение нормы расхода гербицидов при использовании разработанных технологий и технических средств может достигать 74%.

4. Для экспресс-оценки безопасности и эффективности применения гербицидов можно рекомендовать усовершенствованный метод внутриклеточного микроэлектрофореза.

5. При самых неблагоприятных в хозяйственном смысле условиях на посевах кукурузы на зерно без учета экологической и эргономической составляющих срок окупаемости технических средств для ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов не превышает 2,6 года.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В результате обобщения известных исследований по применению жидких средств химизации в растениеводстве установлено: во-первых, наиболее эффективными являются методы их внутрипочвенного локального внесения; во-вторых, из гербицидов наиболее результативными и наиболее безвредными в экологическом смысле являются почвенные препараты; в-третьих, имеет место многолетняя тенденция к снижению норм расхода препаратов и ответному росту требований на точность и программируемость их распределения по обрабатываемым поверхностям. Отсутствие методов решения обозначенных проблем привело к увеличению разрыва между возможным и требуемым. Решение проблем внутрипочвенного внесения жидких средств химизации неизбежно связано с развитием теорий почвообработки и распределения жидкостей гидравлическими распылителями.

2. Анализ известных положений теорий почвообработки, пластичности и предельного равновесия сплошных сред показал, что для повышения адекватности математического моделирования взаимодействия рабочих органов с почвой необходимо исследовать и развивать методы решения основных систем уравнений, описывающих эти модели. Разработка более сложных и формально более адекватных математических моделей приводит к снижению адекватности их конкретного приложения. В связи с этим, при решении проблем почвообработки за основу необходимо принять представление почвы, как весомой неупругой идеально-связной сплошной среды, обладающей внешним трением и подчиняющейся теории предельного равновесия. Для пахотного слоя чернозема плотность составляет  $1,0 - 1,5 \times 10^{-5} \text{ Н/мм}^3$ , а коэффициент сцепления всегда меньше  $0,15 \text{ Н/мм}^2$ . Коэффициент внешнего трения почвы по стали равен  $0,45 - 0,70$  и с учетом налипания для глинистых почв может достигать  $0,60 - 0,95$ .

3. В развитие обозначенных представлений о почве ее состояние предельного равновесия описано квазилинейной системой уравнений в частных производных гиперболического типа, разработан метод решения этой системы (перехода на сетку характеристик), основанный на прямой замене независимых переменных и позволивший получить математические выражения, выполняющиеся вдоль прямых, параллельных осям декартовых координат и связывающие между собой параметры напряженного состояния и независимые координаты.

4. Обобщением полученных теоретических результатов, а также положений теорий пластичности и предельного равновесия сплошных сред впервые сформулировано правило знаков касательных напряжений, которое состоит из двух частей. В соответствии с первой — определяется направление действия вектора касательной компоненты полного напряжения вне зависимости от знака его модуля, а уже затем, в соответствии со второй — определяется ее знак. При этом учитывается действующее правило в отношении знаков и ранжирования главных нормальных напряжений.

5. Теоретическими исследованиями впервые установлено, что развитие опережающей трещины, образующейся впереди почвообрабатывающего рабочего органа, происходит путем переключения между поверхностями (в вертикальном сечении — линиями) скольжения. Пара зарождающихся у режущей кромки и пересекающихся под прямым углом линий скольжения различных семейств уходят вверх и вниз. В реальных средах, места переходов из линии скольжения одного семейства на линию скольжения другого семейства определяются неоднородностями, форма трещины имеет вероятностный характер и может быть весьма сложной. Такой результат обобщает как известные представления о трещинах из почвообработки, так и опытные данные по испытаниям стальных образцов на разрывных машинах. Применительно к рабочим органам для внутрипочвенного внесения жидких средств химизации форма и размеры опережающей трещины определяют геометрию области разрушения и, как следствие, форму и размеры пространства, которое образуется в кинематической тени рабочего органа в процессе его движения.

6. Для расчета объема полости, которая образуется в кинематической тени рабочих органов, достаточной для размещения в ней распылителя и его факела распыла, впервые получены математические выражения, связывающие кинематические и режимные параметры плоскорежущих стрельчатых рабочих органов для внутрипочвенного внесения гербицидов. Если плоскорежущий стрельчатый рабочий орган имеет ширину захвата 270 мм, максимальную высоту сводообразующей части 17 мм, угол раствора лемехов у режущей кромки 65 град., угол крошения лемехов, изменяющийся от 23 град. (у режущей кромки) до 10 град. (у верхнего обреза лемехов), то для внесения рабочей жидкости на глубину 5–8 см минимальная рабочая скорость должна составлять 1,8–2,38 м/с.

7. Для прогнозирования конечного распределения жидкости распылителями с различным размещением и ориентацией в конструкциях рабочих органов для внутрипочвенного внесения жидкостей впервые разработаны: математические методы представления нормированной характеристики (распределения жидкости в пределах пятна распыла) любого гидравлического распылителя на основе интерполяции экспериментальных данных с помощью бикубического сплайна; математические методы, которые на основе нормированной характеристики распылителя и представления о факеле распыла как об векторном поле, позволяют рассчитать распределение жидкости по площадке общего положения и, в частности, по плоскости резания вносящих жидкость рабочих органов.

8. Для ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов различного назначения разработано три типа конструкций рабочих органов. В конструкции, предназначенной для работы на комковатых почвах, необходимо использовать прутковую сводообразующую часть. С целью снижения норм расхода препаратов (< 50 л/га) с одновременным улучшением показателей

равномерности их распределения под слоем почвы предложена технология размазывания. Реализуется она путем применения криволинейных в вертикальной плоскости прутков, которые в рабочем режиме прижимаются почвой ко дну борозды и так способствуют размазыванию препарата, предварительно нанесенного на дно распылением.

9. С целью повышения эргономичности обслуживания и применения разработанных рабочих органов создана сдвижная (по направляющим) безрезьбовая конструкция крепления распылителя.

10. Созданы технологии послепосевого ленточного внутрипочвенного внесения жидких средств химизации, основанные на использовании самостоятельных машин и комбинированных агрегатов, машин или рабочих органов. Для первого варианта, когда ленточное внесение жидких средств химизации осуществляется как самостоятельная операция при помощи вождения агрегатов по направляющим щелям в почве, с целью минимизации потерь влаги из них разработан ряд устройств для вождения агрегатов по одной направляющей щели, а также — для нарезки таких щелей.

11. Применительно к разработанным рабочим органам для внутрипочвенного внесения гербицидов теоретическими и экспериментальными изотопными исследованиями установлено, что программируемого распределения жидкости под слоем почвы можно достигнуть только в случае наклона по отношению к дну борозды ориентации распылителя. В экспериментах угол наклона распылителя составлял  $5,7-7^\circ$ , что позволило в 2,63–3,67 раза уменьшить коэффициент вариации для плотности распределения препарата вдоль оси полосы внесения, и в 3 раза — для средней глубины заделки препарата. Изотопными методами также установлено, что в случае, когда посев выполняется на более чем 20 мм глубже, чем ленточное внутрипочвенное внесение гербицидов, то последние лучше вносить после посева. В этом случае удастся получить программируемое распределение препарата под слоем почвы.

12. Показано, что превышение эффективности действия препарата эрадикан (80%-ный) при его ленточном внутрипочвенном внесении на глубину 4–5 см по сравнению с традиционным поверхностным способом его внесения с последующей заделкой дисковыми орудиями на посевах кукурузы на зерно составило 2,0–6,0 раза и в самом неблагоприятном случае экономическая эффективность послепосевого ленточного внутрипочвенного внесения эрадикана на посевах кукурузы на зерно составляет 75,89 грн./га, а срок окупаемости дополнительных капиталовложений — 2,6 года. При этом расходуется в 3,9 раза меньше гербицидов, исключается их выветривание, фотохимический распад и смыв.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Захаренко В. А. Экономическая эффективность гербицидов / В. А. Захаренко // Защита растений. — 1984. — № 11. — С. 5–7.
- 2 Вербицкая Н. М. Производство зерна кукурузы за рубежом / Н. М. Вербицкая // Кукуруза и сорго. — 1985. — № 3. — С. 32–34.
- 3 Державин Л. М. Засоренность полей и задачи комплексной борьбы с сорняками / Л. М. Державин, В. В. Исаев, Ю. Н. Березкин // Земледелие. — 1984. — № 2. — С. 45–47.
- 4 Мержинський Ю. Г. Довідник по гербіцидах / Ю. Г. Мержинський, І. В. Веселовський — К.: Урожай, 1983. — 206 с.
- 5 Чесалин Г. А. Справочник по гербицидам. / Чесалин Г. А., Алиев В. Ф., Лобанин В. Ф. — М.: Россельхозиздат, 1977. — 190 с.
- 6 Сальников В. К. Возделывание пропашных культур с применением гербицидов / Сальников В. К. — М.: Колос, 1967. — 187 с.
- 7 Захаренко В. А. Гербициды / Владимир Андреевич Захаренко. — М.: Агропромиздат, 1990. — 240 с.
- 8 Фурман П. М., Минимизация междурядных обработок почвы / П. М. Фурман, В. Л. Шикитка // Кукуруза. — 1983. — № 1. — С. 17.
- 9 Линский А. М. Минимизация обработок почвы / А. М. Линский // Кукуруза. — 1983. — № 3. — С. 17–18.
- 10 Цыков В. С. Борьба с сорняками / В. С. Цыков, А. А. Якунин, В. П. Бондарь // Кукуруза. — 1983. — № 5. — С. 30–31.
- 11 Васильев Д. С. Важное звено индустриальной технологии / Д. С. Васильев // Защита растений. — 1984. — № 4. — С. 25–27.
- 12 Георгади А. Г. Борьба с сорной растительностью на посевах кукурузы / А. Г. Георгади // Защита растений. — 1984. — № 11. — С. 8–9.
- 13 Якштайте А. В. Совершенствуя технологию возделывания кукурузы / А. В. Якштайте, И. П. Пузинайте // Защита растений. — 1985. — № 3. — С. 18–20.
- 14 Затучный В. Л. Против сорняков в посевах кукурузы / В. Л. Затучный, В. П. Ливочка, В. И. Штирбу // Защита растений. — 1985. — № 9. — С. 22.
- 15 Варенкова А. С. Комплексные примемы борьбы с сорняками / А. С. Варенкова, П. М. Попов // Кукуруза и сорго. — 1985. — № 3. — С. 30.
- 16 Безуглов В. Г. Применение гербицидов в интенсивном земледелии / Безуглов В. Г. — М.: Россельхозиздат, 1981. — 238 с.

- 17 Состояние и перспективные направления в развитии машин для химической борьбы с сорняками / С. Д. Шеруда, Я. К. Омелюх, Е. А. Барыш, Я. И. Кушнир; под. ред. С. Д. Шеруды. — М.: ЦНИИТЭИтракторсельхозмаш, 1976. — 44 с.
- 18 Ильинский В. Б. Исследование процесса подпочвенного внесения гербицидов штанговым культиватором и обоснование его основных параметров: автореф. дис. на соискание уч. степени канд. техн. наук: спец. 05.06.01 “сельскохозяйственные машины” / В. Б. Ильинский — Челябинск, 1972. — 23 с.
- 19 Минаков Н.А. Применение гербицидов в Центрально-Черноземной зоне / Минаков Н. А. — Воронеж: Центр.-Чернозем. кн. изд-во, 1978. — 96 с.
- 20 Велецкий И. Н. Технология применения гербицидов / Велецкий И. Н. — Л.: Колос, Ленинградское отделение, 1980. — 152 с.
- 21 Циков В. С. Кукурузе, возделываемой по индустриальной технологии, — надежную защиту / В. С. Циков, В. Н. Писаренко, А. А. Матюха [и др.] // Защита растений. — 1984. — № 7. — С. 12–13.
- 22 Баранов А. П. Главное — технологическая дисциплина / А. П. Баранов // Земледелие. — 1985. — № 3. — С. 3–5.
- 23 Фадеев Ю. Н. Международный конгресс / Ю. Н. Фадеев, В. И. Мартыненко // Защита растений. — 1985. — № 3. — С. 56–61.
- 24 Индустриальная технология производства кукурузы / [А. И. Желобов, К. С. Орманджи, П. Н. Бурченко и др.]; под общ. ред. А.И.Желобова. — [2-е изд. с изменениями]. — К.: Урожай, 1985. — 280 с.
- 25 Цыков В. С. Гербициды при индустриальной технологии выращивания кукурузы / В. С. Цыков, А. А. Матюха // Защита растений. — 1981. — № 2. — С. 19–20.
- 26 Воеводин А. В. Рациональные способы применения гербицидов / А. В. Воеводин, В. И. Кондратенко, Ж. В. Аспидов // Защита растений. — 1985. — № 5. — С. 29–32.
- 27 Великохатский А. И. Индустриальная в действии / А. И. Великохатский, А. А. Якунин, А. Д. Флягин // Кукуруза. — 1983. — № 1. — С. 24–25.
- 28 Цыков В. С. Эффективнее использовать гербициды / В. С. Цыков, Л. А. Матюха // Кукуруза. — 1983. — № 3. — С. 29–30.
- 29 Эффективность эрадикана при заделке различными орудиями / Ю. Г. Мережинский, А. Г. Семенов, А. С. Лукьяненко [и др.] // Защита растений. — 1984. — № 1. — С. 32–33.

- 30 Кивер В. Ф. Пути совершенствования борьбы с сряками кукурузы / В. Ф. Кивер, В. М. Куница, И. Ф. Машкин // Защита растений. — 1985. — № 9. — С. 20.
- 31 Велецкий И. Н. Экономно, эффективно, безопасно / И. Н. Велецкий // Защита растений. — 1983. — № 2. — С. 8–10.
- 32 Фисюнов А. В. Борьба с сорняками на орошаемых землях / А. В. Фисюнов // Земледелие. — 1981. — № 1. — С. 56–59.
- 33 Гниломедов В. П. Экранированное внесение почвенных гербицидов / В. П. Гниломедов, В. И. Павлов // Защита растений. — 1981. — № 1. — С. 18–21.
- 34 Фисюнов А. В. Борьба с сорняками в современном земледелии / А. В. Фисюнов // Земледелие. — 1984. — № 2. — С. 51–54.
- 35 Манорик А. В. Инактивація гербіцидів в ґрунті / А. В. Манорик, А. М. Маличенко. — К.: Наукова думка, 1975. — 86 с.
- 36 Самыгин П. А. Инактивація и передвижение триазиновых гербицидов в почве / Самыгин П. А. — М.: ВНИИТЭИСХ, 1975. — 60 с.
- 37 Руденко Н. Е. Индустриальную технологию в производство / Н. Е. Руденко // Картофель и овощи. — 1984. — № 5. — С. 6–10.
- 38 Руденко Н. Е. Механизация производства томатов / Руденко Н. Е. — М.: Колос, 1982. — 159 с.
- 39 Байрамбеков Ш. Б. Ленточное внесение гербицидов. / Ш. Б. Байрамбеков, Н. Е. Руденко, З. Б. Валеева // Защита растений. — 1985. — № 5. — С. 41–42.
- 40 Юнаев А. А. Устройство для внесения гербицидов / А. А. Юнаев // Защита растений. — 1985. — № 2. — С. 35.
- 41 Лагутин В. Г. Подпочвенное внесение гербицидов / В. Г. Лагутин // Кукуруза. — 1983. — № 4. — С. 26.
- 42 Березовский М. Я. К вопросу об агрономических требованиях к машинам для внесения гербицидов в почву / Мендель Яковлевич Березовский // Развитие механизации и средств по борьбе с сорняками, вредителями и болезнями растений / [под ред. Н. А. Сороко]. — Вып. 1. — М.: ТСХА, 1963. — С. 101–108.
- 43 Велецкий И. Н. Локальные способы применения гербицидов / И. Н. Велецкий // Защита растений. — 1979. — № 4. — С. 36–38.
- 44 Цыбульников Л. И. По новой технологии / Л. И. Цыбульников // Кукуруза и сорго. — 1985. — № 3. — С. 21–23.

- 45 Карамышев В. И. Испытания продолжим / В. И. Карамышев // Кукуруза и сорго. — 1985. — № 3. — С. 23–24.
- 46 Клочков А. В. Ленточное внесение гербицидов при возделывании овощных культур на гребнях / А. В. Клочков, О. В. Гордеенко // Агропанорама: Научно-технический журнал для работников агропромышленного комплекса. — 2003. — № 3. — С. 11–14
- 47 Клочков А. В. Обоснование типа и параметров оборудования для ленточного внесения пестицидов на гребневую поверхность / А. В. Клочков, О. В. Гордеенко // Вестник Белорусской государственной сельскохозяйственной академии: Научно-методический журнал. — 2003. — № 3. — С. 82–87.
- 48 Гордеенко О. В. Обоснование параметров распылителей для ленточного внесения гербицидов при возделывании пропашных культур на гребнях / О. В. Гордеенко, И. С. Крук // Агропанорама: Научно-технический журнал для работников агропромышленного комплекса. — 2006. — № 3. — С. 36–40.
- 49 Дунский В. Ф. Монодисперсные аэрозоли / Дунский В. Ф., Никитин Н. В., Соколов М. С. — М.: Наука, 1975. — 188 с.
- 50 Шеруда С. Д. Тенденции развития за рубежом конструкций машин для химической защиты растений: Обзор / С. Д. Шеруда, Я. К. Омелюх, Е. А. Барыш. — М.: ЦНИИТЭИ тракторосельхозмаш, 1976. — 51 с.
- 51 Дунай Н. Ф. Механизация защиты растений / Дунай Н. Ф., Рябцев Г. А., Слободюк П. И. — М.: Колос, 1979. — 277 с.
- 52 Шеруда С. Д. Опрыскиватели на воздушной подушке и сверхлегких летательных аппаратах / С. Д. Шеруда, Я. К. Омелюх, Е. А. Барыш // Защита растений. — 1986. — № 12. — С. 52.
- 53 Шумилин В. М. Авиационная техника высокоэкономична / В. М. Шумилин., В. Г. Пушкин // Защита растений. — 1990. — № 3. — С. 45–46.
- 54 Применение мотодельтопланов в лесном хозяйстве: практические рекомендации / [сост. А. Н. Красновидов, А. Н. Мартынов, А. Н. Дашивец, А. С. Пихало]. — С-Петербург: СПбНИИЛХ, 1992. — 34 с.
- 55 Дибир А. Г. Юбилей сельскохозяйственной авиации / Дибир А. Г., Копичко В. П., Хоменко И. И. // Авиация общего назначения. — 2000. — № 4. — С. 23–26.
- 56 Ударцев Е. П. Перспективы развития легкой авиации в Украине / Е. П. Ударцев // Авиация общего назначения. — 2000. — № 3. — С. 16–18.

- 57 Pat. 5271566 United States America, Int. CI: B 05 B 15/06, B 05 B 15/00, B 05 B 001/02. Self-orienting spray nozzle system / Dederich; Paul L. (County of Lehigh, PA); Assignee: D. B. Smith & Company, Inc. (Utica, NY); Appl. No.: 07/964,351; Filed: October 21, 1992; Patented: December 21, 1993.
- 58 Аксенов И. В. Эффективность внесения гербицидов и жидких комплексных удобрений с поливной водой при возделывании кукурузы по интенсивной технологии в Присивашье: дис. ... канд. с.-х. наук: 06.01.02 / Игорь Викторович Аксенов. — Днепропетровск, 1991. — 227 с.
- 59 Ямников Ю. Н. Маркер для опрыскивателей / Ю. Н. Ямников // Защита и карантин растений. — 2007. — № 1. — С. 35.
- 60 Пат. 210560 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00, В 05 В 9/08, В 05 В 15/10. Опрыскиватель для обработки садовых насаждений / Радовицкий А. Л.; заявитель Всесоюзный научно-исследовательский институт сельскохозяйственного машиностроения. — № 1128505/30-15; заявл. 23.01.67; опубл. 06.11.68, Бюл. № 6.
- 61 Слободюк В. Я. Рабочий орган для внутрипочвенного внесения жидких минеральных удобрений / В. Я. Слободюк, Н. П. Гусаренко, Т. Е. Лындина // Механизация работ в полеводстве: [сб. науч. тр. МИИСП]. — М.: МИИСП, 1986. С. 50–54.
- 62 Pat. 6802153 United States America, Int. CI: A 01 M 21/04, A 01 M 21/00, A 01 C 023/00. System for applying a chemical vegetation / DuBois; Wayne (Boynton Beach, FL), DuBois; Mark (Boynton Beach, FL), DuBois; Brett (Boynton Beach, FL), DuBois; Monte (Boynton Beach, FL); Assignee: DuBois Growers, Inc. (Boynton, Beach, FL); Appl. No.: 10/174,012; Filed: June 18, 2002; Patented: October 12, 2004.
- 63 Wills G. D. Developments in post-emergence herbicide applicators / G. D. Wills, C. G. McWhorter // Outlook on Agriculture. — 1981. — Vol. 10, No. 7. — P. 333–341.
- 64 Пат. 2263549 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> В 05 В 17/04. Пневмоакустический распылитель жидкости / Хажметов Л. М., Яцков Р. П., Цымбал А. А., Яцкова Ж. А., Шомахов Л. А., Шекихачев Ю. А., Сасиков А. С., Губжоков Х. Л.; патентообладатель Кабардино-Балкарская государственная сельскохозяйственная академия (RU). — № 2003135811/12; заявл. 09.12.03; опубл. 10.11.05. Бюл. № 312
- 65 Пат. 2329873 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> В 05 В 7/00, В 05 В 7/28. Распылитель жидкости / Душкин А. Л., Карпышев А. В., Рязанцев Н. Н.; патентообладатели: Душкин А. Л., Карпышев А. В., Рязанцев Н. Н. — № 2006130489/12; заявл. 24.08.06; опубл. 27.07.08. Бюл. № 21.



- 66 Design Factors affecting Spray Characteristics and Drift Performance of Air Induction Nozzles / [M. C. Butler Ellisa, T. Swanb, P. C. H. Millera et al.] // *Biosystems Engineering* — 2002. — Vol. 82, Issue 3. — P. 289–296.
- 67 Тверитин А.В. Использование электрического поля при опрыскивании растений пестицидами / А. В. Тверитин, А. С. Егураздова // *Сельское хозяйство за рубежом*. — 1984. — № 3. — С. 18–25.
- 68 Гапоненко В. С. Машини для хімічного захисту рослин та їх використання / В. С. Гапоненко, Д. Г. Войтюк. — К.: Урожай, 1964. — 55 с.
- 69 Pat. 6669120 United States America, Int. CI: A 01 M 7/00, B 05 B 15/00, B 05 B 15/06, F 16 L 35/00, B 05 B 1/00. Universal head for fixing a nozzle to a fluid distribution duct / Vernia; Marco (Rubiera, IT); Assignee: Arag - S.R.L. Con Socio Unico (Rubiera, IT); Appl. No.: 10/146,880; Filed: May 17, 2002; Patented: December 30, 2003.
- 70 Pat. 4004733 United States America, Int. CI: B 05 B 7/04, B 05 B 5/025, B 05 B 5/043, B 05 B 5/02. Electrostatic spray nozzle system / Law S. Edward (Athens, GA); Assignee: Research Corporation (New York, NY); Appl. No.: 05/594,266; Filed: July 9, 1975; Patented: January 25, 1977.
- 71 Matthews E. J. Electrostatic Spraying Systems / Edwin J. Matthews // *Arkansas Farm Research*. — 1981. — Vol. XXX. — No. 6. — P. 9–10.
- 72 Pat. 5765761 United States America, Int. CI: B 05 B 5/03, B 05 B 5/043, B 05 B 5/025, B 05 B 5/16, B 05 B 5/00, B 05 B 5/053, B 05 B 5/43. Electrostatic-induction spray-charging nozzle system / Law S. Edward (Athens, GA), Cooper Steven C. (Athens, GA); Assignee: Universtiy of Georgia Research Foundation Inc. (Athens, GA); Appl. No.: 08/506,725; Filed: July 26, 1995; Patented: June 16, 1998.
- 73 Kirk I. W. Aerial Electrostatic Spray System Performance / I. W. Kirk, W. C. Hoffmann, J. B. Carlton // *American Society of Agricultural Engineers*. — 2001. — Vol. 44(5). — P. 1089–1092.
- 74 Оценка качественных показателей опрыскивателя с электростатической подзарядкой капель / [А. А. Цымбал, Р. П. Яцков, Г. А. Кочедыков и др.] // *Тракторы и сельскохозяйственные машины*. — 2003. — № 2. — С. 44–45.
- 75 Колтунов Н. А. Электростатическое опрыскивание посевов / Н. А. Колтунов // *Сахарная свекла*, — 2004. — № 5. — С. 34–36.
- 76 Штанговые опрыскиватели с вращающимися распылителями / Н. В. Никитин, Ю. Я. Спиридонов, В. А. Абубикеров, Раскин М. С. // *Защита и карантин растений*. — 2005. — № 3. — С. 46–48.

- 77 Использование современных опрыскивателей в адаптивной защите растений / [Н. В. Никитин, Ю. Я. Спиридонов, М. С. Соколов и др.] // *Агрехимия*. — 2008. — № 11. — С. 51–59.
- 78 Омелюх Я. К. Рециркуляционные опрыскиватели / Я. К. Омелюх, Т. В. Троцюк // *Защита растений*. — 1981. — № 12. — С. 38–39.
- 79 Велецкий И. Н. Малообъемное рециркуляционное опрыскивание / И. Н. Велецкий, Н. С. Лепехин // *Защита растений*. — 1982. — № 4. — С. 6–7.
- 80 Абубикеров В. А. Микрообъемный монодисперсный опрыскиватель с отделением мелких капель / В. А. Абубикеров, А. В. Богданов, Н. В. Никитин // *Тракторы и сельскохозяйственные машины*. — 1989. — № 4. — С. 23–24.
- 81 Пат. 372981 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00, В 05 В 1/28. Распылитель жидкости / Дунский В. Ф., Никитин Н. В., Богомолов М. Ф., Судит Ж. М., Штеренталь М. И., Гройский А. И. — № 1659575/30-15; заявл. 07.05.71; опубл. 12.03.73, Бюл. № 14.
- 82 Wiens E. H. Winnowing as a means of removing small draps from a spray pattern / E. H. Wiens, F. W. Bigsby. // *Canadian Agricultural Engineering* — 1971. — Vol. 13, No. 1. — P. 68–77.
- 83 Richardson R. G. Control of Spray Drift with Thickening Agents / R. G. Richardson // *Journal of Agricultural Engineering Research*. — 1974. — Vol. 19, No. 3. — P. 227–231.
- 84 Pat. 4197995 United States America, Int. CI: A 01 M 7/00, E 03 B 7/07, G 01 F 13/00. Agricultural spraying assembly / Campbell; Robert J. (Cedar Rapids, IA), Gray; Paul D. (Cedar Rapids, IA); Assignee: McCord Corporation (Detroit, MI); Appl. No.: 05/960,486; Filed: November 13, 1978; Patented: April 15, 1980.
- 85 Pat. 4300461 United States America, Int. CI: A 01 C 23/02, A 01 C 23/00, A 01 C 7/00, A 01 C 005/00, A 01 C 007/20. Grass seed planter having fluid injection soil opener / Hodge; Ronald F. (Gurley, AL), Fears; George D. (New Market, AL); Assignee: Hodge; Ronald F. (Gurley, AL), Fears; George D. (New Market, AL); Appl. No.: 06/117,454; Filed: February 1, 1980; Patented: November 17, 1981.
- 86 Pat. 5035357 United States America, Int. CI: A 01 M 7/00, G 05 D 16/20, B 05 B 12/08, B 05 B 12/12, B 05 B 12/00, A01C 023/00. Pressure control valve and system / Brickell; Joseph W. (Jonesboro, AR), Post; Steven W. (Jonesboro, AR); Assignee: FMC Corporation (Chicago, IL); Appl. No.: 07/479,809; Filed: February 14, 1990; Patented: July 30, 1991.

- 87 Pat. 5394812 United States America, Int. CI: A 01 C 23/02, A 01 C 23/00, A 01 C 023/00. Injector for polymer placement and a method therefore / Dunning; Levant G. (Sacramento, CA), Dunning; Ardith A. (Sacramento, CA), Forbes; K. C. Doyle (Sacramento, CA); Assignee: Dunning; Levant G. (Sacramento, CA), Dunning; Ardith A. (Sacramento, CA), Forbes; K. C. Doyle (Sacramento, CA); Appl. No.: 07/871,353; Filed: April 20, 1992; Patented: March 7, 1995.
- 88 Pat. 5741090 United States America, Int. CI: A 01 C 23/02, A 01 C 23/00, A 01 C 023/00. Injector for polymer placement and method therefore / Dunning; Levant G. (Sacramento, CA), Dunning; Ardith Arlene (Sacramento, CA), Forbes; K. C. Doyle (South Lake Tahoe, CA); Assignee: Dunning; Levant G. (Sacramento, CA), Dunning; Ardith Arlene (Sacramento, CA), Forbes; K. C. Doyle (South Lake Tahoe, CA); Appl. No.: 08/399,838; Filed: March 6, 1995; Patented: April 21, 1998.
- 89 Pat. 5862987 United States America, Int. CI: A 01 M 7/00, B 05 B 1/14, B 05 B 1/20, B 05 B 15/06. Non-metallic spray nozzle manifold and support therefor / Reif; Stephen C. (Naperville, IL); Assignee: Spraying Systems Co. (Wheaton, IL); Appl. No.: 08/844,301; Filed: April 18, 1997; Patented: January 26, 1999.
- 90 Pat. 6152388 United States America, Int. CI: B 05 B 15/00, B 05 B 15/06, B 05 B 1/00. Spray nozzle apparatus / Rohloff; Terry (Eagan, MN); Assignee: Rohloff; Terry (Eagan, MN); Appl. No.: 09/317,331; Filed: May 24, 1999; Patented: November 28, 2000.
- 91 Разработка опрыскивателя с автономной подачей агрохимикатов к распылителям / В. И. Вялков, В. А. Вялых, Н. А. Балакирев, А. В. Вялых // Разработка технического оснащения агроинженерной сферы растениеводства. — Зерноград, 2002. — С. 64–74.
- 92 Богданов А. В. Тракторный штанговый опрыскиватель с вращающимися распылителями / А. В. Богданов, Н. В. Никитин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 1991. — № 11. — С. 28.
- 93 Состояние и основные направления развития техники и технологии ультрамалообъемного опрыскивания за рубежом: Обзор / С. Д. Шеруда, Я. К. Омелюх, Е. А. Барыш, Я. И. Кушнир. — М.: ЦНИИТЭИ-тракторсельхозхиммаш, 1977. — 51 с.
- 94 Цветников Ж. Д. Современная техника для борьбы с сорняками, вредителями и болезнями сельскохозяйственных растений за рубежом / Ж. Д. Цветников, Л. П. Комаров. — М.: В/О “Союзсельхозтехника”. ЦНИИТЭИ, 1978. — 39 с.
- 95 Механізація захисту рослин / [І. П. Масло, С. П. Тимошенко, Ю. Ф. Онуфрієнко та ін.]. — К : Урожай, 1982. — 144 с. — (Бібліотека сільського інженера).

- 96 Пат. 2274992 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 С 23/02, А 01 В 49/06. Агрегат для подкормки и внесения гербицидов в прикорневую зону растений / Сотченко В. С., Багринцева В. Н., Карпунин В. В., Абезин В. Г.; патентообладатель Государственное научное учреждение Поволжский научно-исследовательский институт эколого-мелиоративных технологий Российской академии сельскохозяйственных наук (RU). — № 2004129348/12; заявл. 05.10.04; опубл. 27.04.06. Бюл. № 12.
- 97 Пат. 2216935 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00. Штанговый опрыскиватель с вращающимися распылителями / Смелик В. А., Теплинский И. З., Калинин А. Б., Яблоков А. В., Яблоков Е. В.; патентообладатель Ярославская государственная сельскохозяйственная академия. — № 2000104332/13; заявл. 21.02.00; опубл. 27.11.03.
- 98 Пат. 2231259 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00. Агрегат малообъемного опрыскивания “Иртышанка” / Субботин А. И. (RU), Татаринов А. И. (RU), Федоренко В. М. (RU); патентообладатель Закрытое акционерное общество Торгово-промышленная компания “АСГАРД плюс” (RU). — № 2002112655/12; заявл. 13.05.02; опубл. 27.06.04.
- 99 Пат. 2272393 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 С 23/02. Устройство для внутрипочвенного внесения жидких удобрений / Краховецкий Н. Н. (RU), Гиндин Б. И. (RU); патентообладатели Краховецкий Николай Николаевич (RU), Гиндин Борис Иосифович (RU). — № 2004128903/12; заявл. 01.10.04; опубл. 27.03.06. Бюл. № 9.
- 100 Омелюх Я. К Тенденции развития конструкций опрыскивателей во Франции / Я. К Омелюх , Е. А. Барыш , Л. А. Рабий // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 1986. — № 1. — С. 54–57.
- 101 Влияние нормы расхода рабочей жидкости на эффективность применения почвенных гербицидов / [Ю. Я. Спиридонов, М. С. Раскин, Н. В. Никитин и др.] // Агро XXI. — 1998. — № 4. — С. 8–9.
- 102 Tanaś W. Basic agrotechnic requirements of spraying process. Review analysis and evaluation of spraying methods and universal sprayers / Wojciech Tanaś, T. P. Kot // Journal of Research and Applications in Agricultural Engineering (Poland). — 2006. — Vol. 51(1). — P. 53–59.
- 103 Сборник статей по механизации технологических процессов защиты растений / [под ред. Н. К. Тарановича]. — Л.: изд. ВИЗР, 1970. — 408 с.
- 104 Пат. 257915 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00. Монодисперсный опрыскиватель / Дунский В. Ф., Никитин Н. В.; заявитель Всесоюзный научно-исследовательский институт фитопатологии. — № 1281360/30-15; заявл. 04.11.68; опубл. 20.11.69, Бюл. № 36.

- 105 Пат. 257916 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00. Распылитель жидкости / Дунский В. Ф., Никитин Н. В., Шумилов В. А., Соколов М. С., Шеруда С. Д., Судит Ж. М., Штеренталь М. И., Гронский А. И.; заявители: Всесоюзный научно-исследовательский институт фитопатологии, Государственное специальное конструкторское бюро по машинам для химической защиты растений. — № 1231472/30-15; заявл. 04.04.68; опубл. 20.11.69, Бюл. № 36.
- 106 Пат. 285410 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00. Штанговый малообъемный опрыскиватель для обработки полевых культур / Дунский В. Ф., Никитин Н. В., Судит Ж. М., Штеренталь М. И.; заявитель Всесоюзный научно-исследовательский институт фитопатологии. — № 1158595/30-15; заявл. 23.05.67; опубл. 29.10.70, Бюл. № 33.
- 107 Пат. 1362431 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00. Монодисперсный вращающийся распылитель / Богданов А. В., Никитин Н. В.; заявитель Всесоюзный научно-исследовательский институт фитопатологии. — № 3929641/30-15; заявл. 17.07.85; опубл. 30.12.87, Бюл. № 48.
- 108 Пат. 1521419 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00. Вращающийся распылитель / Богданов А. В., Никитин Н. В.; заявитель Всесоюзный научно-исследовательский институт фитопатологии. — № 4211105/30-15; заявл. 18.03.87; опубл. 15.11.89, Бюл. № 42.
- 109 Пат. 2017420 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 М 7/00. Распылитель жидкости / Абубикеров В.А., Богданов А. В., Никитин Н. В.; заявитель Всероссийский научно-исследовательский институт фитопатологии; патентообладатель Богданов Александр Викторович. — № 4938614/15; заявл. 22.05.91; опубл. 15.08.94,
- 110 Довгань Б. П. Опрыскиватели с электроприводом / Б. П. Довгань, Т. М. Тычка // Защита растений. — 1989. — № 3. — С. 58–60.
- 111 Пат. 2158508 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> А 01 М 7/00. Распылитель жидкости / Митрофанов В. И., Векшин Д. В., Белоус И. С., Пузырев Г. П., Сулейманов Р. Х., Гулидов Э. В.; заявители и патентообладатели Митрофанов Валерий Иванович, Векшин Дмитрий Владимирович, Белоус Иосиф Семенович, Пузырев Георгий Петрович, Сулейманов Ринат Хисматович, Гулидов Эдуард Владимирович. — № 99119744/13; заявл. 10.09.99; опубл. 10.11.00,
- 112 Пат. 2204246 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> А 01 М 7/00, В 05 В 3/12. Распылитель жидкости / Зорин В. А., Зорин А. В., Зорин А. В.; заявители и патентообладатели Зорин Владимир Анатольевич, Зорин Андрей Владимирович, Зорин Алексей Владимирович. — № 2001129848/13; заявл. 05.11.01; опубл. 20.05.03,

- 113 Пат. 2210393 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> А 61 М 11/00. Распылитель жидкости / Богатов А. И., Галкин Р. А., Ревякин А. В., Изжеуров Е. А., Захарова И. А.; заявитель и патентообладатель Самарская областная клиническая стоматологическая поликлиника. — № 99111412/14; заявл. 01.06.99; опубл. 20.08.03,
- 114 Пат. 2211561 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> А 01 М 7/00. Распылитель / Зорин В. А., Зорин А. В., Зорин А. В.; заявители и патентообладатели Зорин Владимир Анатольевич, Зорин Алексей Владимирович, Зорин Андрей Владимирович. — № 2001132091/13; заявл. 28.11.01; опубл. 10.09.03,
- 115 Пат. 2214872 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> В 05 В 3/12. Распылитель / Зорин В. А., Зорин А. В., Зорин А. В.; заявители и патентообладатели Зорин Владимир Анатольевич, Зорин Алексей Владимирович, Зорин Андрей Владимирович. — № 2002101515/12; заявл. 23.01.02; опубл. 27.10.03,
- 116 Пат. 2216409 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> В 05 В 3/12. Распылитель жидкости / Зорин В. А., Зорин А. В., Никитин Н. В.; заявители и патентообладатели Зорин Владимир Анатольевич, Зорин Андрей Владимирович, Никитин Николай Васильевич. — № 2002103957/12; заявл. 18.02.02; опубл. 20.11.03,
- 117 Пат. 2232503 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> А 01 М 7/00, В 05 В 3/02. Распылитель жидкости / Гнучев В.Ф. (RU), Мироненко В. М. (RU), Муращенко В. Г. (RU), Трубицин И. Т. (RU), Широков В. Б. (RU); патентообладатель Открытое акционерное общество “Оптрон” (RU) . — № 2002131341/12; заявл. 21.11.02; опубл. 20.07.04,
- 118 Пат. 2178759 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> В 64 D 1/18, А 01 М 7/00, В 05 В 17/00. Распылитель вращающийся мелкокапельный / Уваров Н. В.; заявитель и патентообладатель Уваров Николай Витальевич. — № 2000107403/13; заявл. 27.03.00; опубл. 27.01.02,
- 119 Пат. 2290261 Российская Федерация, МПК<sup>7</sup> В 05 В 3/12. Распылитель вращающийся мелкокапельный / Дмитриев А. И. (RU), Закота А. И. (RU), Карпов С. И. (RU), Кликодуев Н. Г. (RU), Кучеренко Ю. С. (RU), Ларионов В. А. (RU), Мищенко А. П. (RU); патентообладатель Открытое акционерное общество “Государственное машиностроительное конструкторское бюро “РАДУГА” им. А.Я. Березняка” (RU). — № 2005118522/12; заявл. 16.06.05; опубл. 27.12.06, Бюл. № 36.
- 120 Современное состояние и перспективы развития механизации химической защиты растений за рубежом / С. Д. Шеруда, Я. К. Омелюх, Е. А. Барыш, Я. И. Кушнир. — М.: ЦНИИТЭИ в/о “Союзсельхозтехника”, 1977. — 55 с.

- 121 Лысов А. К. Каким должен быть опрыскиватель с вращающимися дисковыми распылителями / А. К. Лысов // Защита и карантин растений. — 2003. — № 5. — С. 38–39.
- 122 Кузнецов В. М. Химико-технологические основы разработки и совершенствования гербицидных препаративных форм / Кузнецов В. М. — М.: Химия, 2006. — 320 с.
- 123 Старостин С. П. Механизация защиты растений: (О разработ. систем машин и механизмов во ВНИИ защиты растений) / С. П. Старостин, Н. Н. Белецкий // Механизация и электрификация соц. сел. хоз-ва. — 1979. — № 9. — С. 1–3.
- 124 Ультрамалообъемное опрыскивание сельскохозяйственных культур / [Н. К. Тарнович, В. В. Курдюмов, А. А. Смирнова и др.]. — М.: ВНИИТЭИСХ, 1976. — 41 с.
- 125 Велецкий И. Н. Современные средства механизации для применения пестицидов и перспективы их развития / И. Н. Велецкий // Журн. Всесоюз. хим. о-ва им. Менделеева. — 1984. — Т. 29, № 1. — С. 83–92.
- 126 Лапы и стойки культиваторов. Технические условия: ГОСТ 1343-82 (СТ СЭВ 3095-81). — [Введ. с 1983-01-01 по 1988-01-01]. — М.: Государственный комитет СССР по стандартам, 1982. — 29 с.
- 127 Культиватор-растениепитатель навесной КРН-5,6. Техническое описание и инструкция по эксплуатации. — Ростов-на-Дону: Ростовский культиваторный завод “Красный Аксай”, 1981. — 61 с.
- 128 Пат. 965375 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> А 01 В 49/06. Комбинированный рабочий орган культиватора для предпосевной обработки почвы и комплексного внесения жидких растворов / Гнилomedов В. П.; заявитель Куйбышевский сельскохозяйственный институт. — № 3215076/30-15; заявл. 10.12.80; опубл. 15.10.82, Бюл. № 38.
- 129 Pat. 965375 United States America, Int. CI: A 01 M 17/00, A 01 C 23/02, A 01 C 23/00, A 01 B 13/08. Device for distributing chemicals beneath the soil surface and conditioning seed beds / Taylor; Billy R. (Levelland, TX); Assignee: Taylor; Billy R. (Levelland, TX); Appl. No.: 04/717,685; Filed: April 1, 1968; Patented: June 1, 1971.
- 130 Родоначальники научных школ // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 2005. — № 9. — С. 5–7.
- 131 Василенко Петро Мефодійович: Бібліографічний покажчик наукових праць за 1933–1999 роки / УААН, ЦНСГБ, НАУ; Упорядники: Т. Ф. Дерлеменко, Л. Д. Полякова, Д. В. Устиновський, З. І. Варта, В. М. Булгаков, Д. Г. Войтюк; Наук. ред. Г. Г. Хурманець. — К.: Аграрна наука, 2000. — 125 с.

- 132 Зеленин А. Н. Основы разрушения грунтов механическими способами / А. Н. Зеленин. — М: Машиностроение, 1968. — 375 с.
- 133 Синеоков Г. Н. Теория и расчет почвообрабатывающих машин / Г. Н. Синеоков, И. М. Панов. — М.: Машиностроение, 1977. — 328 с.
- 134 Панов И. М. Вопросы развития теории разрушения почвы / И. М. Панов // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 1988. — № 11. — С. 18–20.
- 135 Панов И. М. Физические основы механики почв: монография / И. М. Панов, В. И. Ветехин. — К.: Феникс, 2008. — 266 с.
- 136 Кушнарв А. С. К построению теории взаимодействия почвообрабатывающих органов с почвой / А. С. Кушнарв // Научные труды / УСХА. — 1975. — Вып. 162. — С. 99–110.
- 137 Кушнарв А. С. Механико-технологические основы процесса воздействия рабочих органов почвообрабатывающих машин и орудий на почву: автореферат дис. на соискание уч. степени д-ра техн. наук: спец. 05.20.01 “Механизация сельскохозяйственного производства” / А. С. Кушнарв; ЧИМЭСХ. — Челябинск, 1981. — 50 с.
- 138 Кушнарв А. С. Механико-технологические основы обработки почвы / А. С. Кушнарв, В. И. Кочев. — Киев, Урожай, 1989. — 144 с.
- 139 Дубровін В. О. Механіко-технологічне обґрунтування диференціації засобів механізації оранки: дис. ... доктора техн. наук: 05.20.01 / Валерій Олександрович Дубровін. — Глеваха, 1997. — 420 с.
- 140 Панченко А. Н. Теория измельчения почв почвообрабатывающими орудиями: [учеб. пособие] / А. Н. Панченко. — Днепропетровск, 1999. — 140 с.
- 141 Пащенко В. Ф. Моделирование взаимодействия с почвой рабочих органов сельскохозяйственных машин и орудий / В. Ф. Пащенко. — Харьков: Харьковский государственный университет им. В. В. Докучаева, 1994. — 134 с.
- 142 Пащенко В. Ф. Механіко-технологічні засоби еколого-економічного удосконалення процесів обробітку ґрунту: дис. ... доктора техн. наук: 05.05.11 / Володимир Филимонович Пащенко. Харківський національний технічний ун-т сільського господарства ім. Петра Василенка. — Харьков, 2005. — 335 с.
- 143 Ковбаса В. П. Механіко-технологічне обґрунтування оптимізації взаємодії робочих органів з ґрунтом: дис. ... доктора техн. наук: 05.05.11 / Володимир Петрович Ковбаса. — К., 2005. — 300 с.



- 144 Сало В. М. Науково-технологічні основи обґрунтування складу та параметрів комбінованих ґрунтообробних знарядь: дис. ... доктора техн. наук: 05.05.11 / Василь Михайлович Сало. — К., 2008. — 278 с.
- 145 Механика: новое в зарубежной науке / пер. с англ.; под ред. В. Н. Николаевского; редакторы А. Ю. Ишлинский, Г. Г. Черный. — М.: Мир, 1975. — 230 с. — (Серия 2 “Определяющие законы механики грунтов”).
- 146 Кулен А. Современная земледельческая механика / А. Кулен, Х. Куиперс; пер. с англ. А. Э. Габрилеаня; под ред. и с предисл. Ю. А. Смирнова. — М.: Агропромиздат, 1986. — 349 с.
- 147 De Saint-Venant B. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / B. De Saint-Venant // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Série 2. — 1871. — Vol. 16. — P. 308–316, 373–382.
- 148 Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа: [учебник для вузов] / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — [изд. 8-е, перераб. и доп.]. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 720 с.
- 149 Томленов А. Д. Теория пластического деформирования материалов / А. Д. Томленов — М.: Металлургия, 1972. — 408 с.
- 150 Ландау Л.Д. Теоретическая физика: в 10-ти т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — Т. VII: Теория упругости: [учеб. пособие]. — [4-е изд. испр. и доп.]. — 1987. — 248 с.
- 151 Бегун П.И., Прикладная механика: [учебник] / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын. — СПб.: Политехника, 1995. — 320 с.
- 152 Саргсян А. Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов: [учебник для вузов] / А. Е. Саргсян. — М.: Высшая школа, 2000. — 286 с.
- 153 Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре / Христианович С. А. // Математический сборник. — 1936. — Т. 1 (43). — Вып. 4. — С. 511–531.
- 154 Христианович С.А., Мыхлин С.Г., Девисон Б.Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды: Неустановившееся движение воды в каналах и реках. Математическая теория пластичности. Движение грунтовых вод / С. А. Христианович, С. Г. Мыхлин, Б. Б. Девисон; под. ред. Н.Е.Кочина. — М., Л.: Изд-во АН СССР, 1938. — 407 с.
- 155 Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: [учебник для вузов] / В. И. Феодосьев. — [9-е изд., перераб.]. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 512 с.

- 156 Гринев Б.В. Сцинтилляционные детекторы ионизирующих излучений для жестких условий эксплуатации / Б. В. Гринев, В. П. Семиноженко. — Харьков: Издательство “Основа” при ХГУ, 1993. — 156 с.
- 157 Соколовский В. В. Статика сыпучей среды / Вадим Васильевич Соколовский. — [4-е изд.]. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
- 158 Можаровский Н. С. Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения: [в 2 ч.] / Н. С. Можаровский — К.: Выща школа, 1991. — Ч. 1: Теория пластичности и ползучести в инженерном деле. — 1991. — 264 с.
- 159 Зубчанинов В. Г. Основы теории упругости и пластичности: [учеб. для машиностроит. спец. вузов] / В. Г. Зубчанинов. — М.: Высш. шк., 1990. — 368 с.
- 160 Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением / А. Ю. Ишлинский // Украинский математический журнал. — 1954. — Т. 6, № 3. — С. 314–324.
- 161 Хилл Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл; пер. с англ. Э.И.Григолока. — М.: Гостехиздат, 1956. — 407 с.
- 162 Ивлев Д. Д. К построению теории идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев // Прикладная математика и механика. — 1958. — Т. 22. — Вып. 6. — С. 850–855.
- 163 Генки Г. Новая теория пластичности, упрочнения, ползучести и опыты над неупругими материалами / Г. Генки // Теория пластичности: Сб. статей / Под ред. Ю. Н. Работнова. — М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. — С. 427–446.
- 164 Гениев Г. А. Определяющие уравнения и функционалы в теории течения для расширенного класса неупругих сред / Г. А. Гениев // Строительная механика и расчет сооружений. — 1987. — № 1. — С. 63–65.
- 165 Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: [в 2 т] / К. Флетчер; пер. с англ. В. Ф. Каменецкого; под ред. Л. И. Турчака. — М.: Мир, 1991. — Т. 2. — 552 с.
- 166 Гениев Г. А. Пространственная и осесимметричная задача динамики баровязкой среды / Г. А. Гениев // Строительная механика и расчет сооружений. — 1985. — № 1. — С. 63–65.
- 167 Мельник В. И. Предельное равновесие сплошных неупругих сред: [монография] / В. И. Мельник. — Харьков: Издательство КП Типография № 13, 2006. — 368 с.
- 168 Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 231 с.

- 169 Прагер В. Проблемы теории пластичности / В. Прагер; пер. с нем. А. И. Смирнова; под ред. Э. И. Григолоука. — М.: Гос. изд. физико-математической литературы, 1958. — 136 с.
- 170 Ключников В. Д. Математическая теория пластичности / В. Д. Ключников. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. — 208 с.
- 171 Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: [Справочное пособие] / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. — К.: Наукова думка, 1981. — 496 с.
- 172 Мельник В.И. Формирование порошковых светоотражающих оболочек для сцинтилляционных кристаллов сложной формы / В. И. Мельник, Б. В. Гринев // Инженерно-физический журнал. — 1995. — Т. 68. — № 2. — С. 263–270.
- 173 Пат. 1725648 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/202. Способ формирования светоотражающей оболочки в сцинтилляционном детекторе / Мельник В. И., Гринев Б. В., Литичевский А. М.; заявители: Научно-производственное объединение “Монокристаллреактив”, Харьковский институт механизации и электрификации сельского хозяйства; патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины. — № 4853528/25; заявл. 23.07.90; опубл. 28.02.94, Бюл. № 10.
- 174 Пат. 1805410 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/202. Сцинтилляционный детектор, способ его сборки и устройство для сборки сцинтилляционного детектора / Гринев Б. В., Мельник В. И.; заявитель Научно-производственное объединение “Монокристаллреактив”; патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины. — № 4903210/25; заявл. 21.01.91; опубл. 30.03.93, Бюл. № 12.
- 175 Пат. 2014634 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/20. Сцинтилляционный детектор и способ его сборки / Гринев Б. В., Мельник В. И.; заявитель и патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины. — № 4905845/25; заявл. 10.12.90; опубл. 15.06.94, Бюл. № 11.
- 176 Пат. 2018877 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/202. Способ сборки сцинтилляционного детектора / Гринев Б. В., Мельник В. И.; заявитель и патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины. — № 4926510/25; заявл. 08.04.91; опубл. 30.08.94, Бюл. № 16.
- 177 Пат. 2019857 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/202. Способ сборки сцинтилляционного детектора / Гринев Б. В., Мельник В. И.; заявитель и патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины. — № 5013275/25; заявл. 12.07.91; опубл. 15.09.94, Бюл. № 17.
- 178 Пат. 2069871 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/202. Способ сборки сцинтилляционного детектора и устройство для его осуществления /

- Гринев Б. В., Мельник В. И.; заявитель и патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины (UA). — № 5013166/25; заявл. 22.07.91; опубл. 27.11.96, Бюл. № 33.
- 179 Мельник В. И. Технологічні задачі підвищення вібротермостійкості кристалічних скінтиляційних детекторів: автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. техн. наук: спец. 05.27.06 “Технологія, устаткування та виробництво електронної техніки” / В. И. Мельник. — Харків, 2000. — 20 с.
- 180 Соколовский В. В. Плоское предельное равновесие горных пород / Вадим Васильевич Соколовский // Изв. АН СССР. ОТН. — 1948. — № 9. — С. 1361–1370.
- 181 Melnik V. I. On connection between the plane limiting equilibrium problem for a non-ideally coherent medium and the plasticity theory / V. I. Melnik // Functional materials. — 1996. — Vol. 3. — No. 4. — P. 566–570.
- 182 Мельник В. И. Матмоделирование напряженного состояния порошковой светоотражающей оболочки кристаллических скінтиляційонних детекторів / В. И. Мельник // 4-ый Международный молодежный форум “Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке”: Сб. научн. трудов. Ч. 1. — Харьков: ХГТУРЭ, 2000. — С. 146–147.
- 183 Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко. — [изд. 2-е, перераб. и доп.] — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. — 688 с.
- 184 Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. — [изд. 3-е, доп.]. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. — 400 с.
- 185 Кошляков Н. С. Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов; под общ. рук. Н.С.Кошлякова. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962. — 767 с.
- 186 Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант; пер. с англ. Т. Д. Венцель; под ред. О. А. Олейник. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
- 187 Берс Л. Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер; пер. с англ. Ю. В. Егорова; под ред. О. А. Олейник. — М.: Мир, 1966. — 351 с.
- 188 Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики: [учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов] / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.
- 189 Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е. М. Ландис. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 287 с.

- 190 Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 736 с.
- 191 Мизохата С. Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата; пер. с японского Ю. В. Егорова; под ред. О. А. Олейник. — М.: Мир, 1977. — 504 с.
- 192 Годунов С. К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. — [изд. 2-е, исправл. и дополн.]. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 392 с.
- 193 Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: [в 2 т.]. Т. 1: Основные положения и общие методы / К. Флетчер; пер. с англ. А. И. Державиной; под ред. В. П. Шидловского. — М.: Мир, 1991. — 504 с.
- 194 Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Курс лекцій: [навчальний посібник] / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К.: Либідь, 1993. — 248 с.
- 195 Масленникова В. Н. Дифференциальные уравнения в частных производных: [учеб.] / В. Н. Масленникова. — М.: Изд-во РУДН, 1997. — 447 с.
- 196 Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І. Я. Кміть, В. М. Поліщук; під заг. ред. Б. Й. Пташника. — К.: Наукова думка, 2002. — 416 с.
- 197 Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 736 с.
- 198 Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч; пер. с англ. В. А. Гушина и В. Я. Митицкого; под ред. П. И. Чушкина. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
- 199 Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — [3-е изд.]. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
- 200 Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию): [учеб. пособие] / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 439 с.
- 201 Бахвалов Н. С. Численные методы: [учеб. пособие] / Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 600 с.
- 202 Марчук Г. И. Методы вычислительной математики: [учеб. пособие] / Г. И. Марчук. — [3-е изд., перераб. и доп.]. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 608 с.

- 203 Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — [3-е изд., испр.]. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 616 с.
- 204 Мельник В. И. Преобразование независимых переменных по характеристическому решению гиперболических квазилинейных систем двух уравнений / В. И. Мельник // Вісник Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. — Харків: НТУ “ХПІ”. — 2001. — № 25. — С. 118–125.
- 205 Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер; пер. с англ. С. П. Демущина. — [2-е изд.]. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 272 с.
- 206 Клиот-Дашинский М. И. Алгебра матриц и векторов: [учебник для вузов] / М. И. Клиот-Дашинский. — [3-е изд. стер.]. — СПб.: Изд-во “Лань”, 2001. — 160 с.
- 207 Акивис М. А. Тензорное исчисление / М. А. Акивис, В. В. Гольдберг. — [2-е изд. стер.]. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. — 351 с.
- 208 Шикин Е. В. Линейные пространства и отображения / Е. В. Шикин. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 311 с.
- 209 Соколовский В. В. Плоская задача теории давления земли / Вадим Васильевич Соколовский // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 22. — № 4. — С. 153–158.
- 210 Соколовский В. В. Плоская задача теории пластичности по Прандтлю и теория давления земли / Вадим Васильевич Соколовский // Изв. АН СССР. ОТН. — 1939. — № 2/3. — С. 107–127.
- 211 Соколовский В. В. Предельное напряженное состояние сыпучей и земляной слоистой среды / Вадим Васильевич Соколовский // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 24, № 8. — С. 731–737.
- 212 Соколовский В. В. Обобщенная задача Прандтля для слоистой земляной среды / Вадим Васильевич Соколовский // Докл. АН СССР. — 1939. — Т. 24, № 8. — С. 737–745.
- 213 Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. / Вадим Васильевич Соколовский. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1942. — 207 с.
- 214 Соколовский В. В. О предельном равновесии сыпучей среды / Вадим Васильевич Соколовский // Прикладная математика и механика. — 1951. — Т. 15. — Вып. 6. — С. 689–709.
- 215 Соколовский В. В. О приближенном приеме в статике сыпучей среды / Вадим Васильевич Соколовский // Прикладная математика и механика. — 1952. — Т. 16. — Вып. 2. — С. 246–249.

- 216 Lüders W. Über die äusserung der elasticität an stahlartigen eisenstäben und stahlstäben, und über eine beim biegen solcher stäbe beobachtete molecularbewegung / W. Lüders // *Dingler's Polytechnical Journal* — 1860. — Vol. 155, — P. 18–22.
- 217 Чернов Д. К. О приготовлении стальных бронепробивающих снарядов / Д. К. Чернов // *Записки Императорского Русского Технического Общества*. — 1885. — № 2. — С. 59–73.
- 218 Hartmann L. M. Disstribution des déformation dans les métaux soumis à des efforts / L. M. Hartmann // *Bulletin de la société d'encouragement pour l'industrie nationale* — 1897. — Т. II. — P. 103–107.
- 219 Hencky H. Über Einige Statisch Bestimmte Fälle Des Gleichgewichts In Plastischen Körpern / Heinrich Hencky // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. — 1923. — Band 3. — Heft 4. — S. 241–251.
- 220 Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht / L. Prandtl // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. — 1923. — Band 3. — Heft 6. — S. 401–406.
- 221 De Saint-Venant B. Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état / B. De Saint-Venant // *Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences*. — 1870. — Т. 70. — P. 473–480.
- 222 Levy M. Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / Maurice Levy // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Série 2*. — 1871. — Т. 16. — P. 369–372.
- 223 Nadai A. Plastizität und Erddruck / Arpad Nadai // *Handbuch der Physik*. — 1928. — Vol. VI. — P. 428–484,
- 224 Nadai A. Theory of flow and fracture of solids. Vol. 1 / Arpad Nadai — New York: McGraw-Hill, 1950. — 647 p.
- 225 Geiringer H. Some Recent Results in the Theory of an Ideal Plastic Body / Hilda Geiringer // *Advances in Applied Mechanics* / Edited by Richard von Mises, Theodore von Kármén. — New York: Academic Press Inc., 1953. — Vol. 3. — P. 197–294.
- 226 Prager W. Theory of Perfectly Plastic Solids. / William Prager, Philip Gibson Hodge. — New York: John Wiley and Sons Inc., 1951. — 264 p.
- 227 Prager W. An introduction to plasticity / William Prager. — London: Addison-Wesley Pub. Co., 1959. — 148 p. — (Series “The Addison-Wesley series in the engineering sciences: mechanics and thermodynamics”).

- 228 Михлин С. Г. Основные уравнения математической теории пластичности / Соломон Григорьевич Михлин. — Л.: Изд-во АН СССР, 1934. — 71 с.
- 229 Соколовский В. В. О давлении пластической среды на жесткий штамп / Вадим Васильевич Соколовский // Прикладная математика и механика. — 1940. — Т. IV. — Вып. 5, 6. — С. 19–27.
- 230 Соколовский В. В. Теория пластичности. / Вадим Васильевич Соколовский. — М.: Изд-во АН СССР, 1946. — 297 с.
- 231 Соколовский В. В. Построение полей напряжений и скоростей в задачах пластического течения / Вадим Васильевич Соколовский // Инженерный журнал. — 1961. — Т. I. — № 3. — С. 116–121.
- 232 Соколовский В. В. Поля напряжений и скоростей при волочении пластической полосы / Вадим Васильевич Соколовский // Инженерный журнал. — 1962. — Т. II. — № 2. — С. 288–293.
- 233 Друянов Б. А. Пластическая деформация при формоизменении листа при помощи валков / Б. А. Друянов // Прикладная механика и техническая физика. — 1963. — № 1. — С. 118–224.
- 234 Друянов Б. А. Теория технологической пластичности: монография / Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. — М.: Машиностроение, 1990. — 272 с.
- 235 Ильюшин А. А. Пластичность / Ильюшин А. А. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — 346 с.
- 236 Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов: [учеб. пособие для ун-тов] / А. А. Ильюшин, В. С. Ленский. — М.: Физматгиз, 1959. — 371 с.
- 237 Ильюшин А. А. Упруго-пластические деформации полых цилиндров / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов — М.: Изд-во МГУ, 1960. — 224 с.
- 238 Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бригелля / А. Ю. Ишлинский // Прикладная математика и механика. — 1944. — Т. VIII. — Вып. 3. — С. 201–224.
- 239 Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов: [учеб. пособие для ун-тов] / Ю. Н. Работнов — М.: Физматгиз, 1962. — 455 с.
- 240 Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Работнов Ю. Н. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
- 241 Качанов Л. М. Основы теории пластичности: [учеб. пособие для ун-тов] / Л. М. Качанов. — [2-е изд., перераб. и доп.] — М.: Наука, 1969. — 420 с.



- 242 Кийко И. А. О воздействии сжатого пластического тонкого слоя на упругие поверхности / И. А. Кийко // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. — 1961. — № 6. — С. 131–133.
- 243 Hill R. A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals / R. Hill // Proceedings of the Royal Society. — 1948. — Vol. 193. — P. 281–297.
- 244 Hill R. A theory of the Plastic Bulging of a Metal Diaphragm by Lateral / R. Hill // The Philosophical magazine. — 1950. — Vol. 41. — No. 322. — P. 1133–1142.
- 245 Prager W. Probleme der Plastizitätstheorie / W. Prager. — Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1955. — 100 s.
- 246 Alexander J. M. The effect of coulomb friction in the planestrain compression of a plastic-rigid material / J. M. Alexander // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1955. — Vol. 3. — Issue 4. — P. 233–245
- 247 Ford H. Advanced Mechanics of Materials / H. Ford, J. M. Alexander. — London: Longmans Green, 1963. — 327 p.
- 248 Johnson W. Plasticity for Mechanical Engineers / W. Johnson, P. B. Mellor. — London: D. Van Nostrand Company Ltd., 1962. — 412 p.
- 249 Johnson W. The Mechanics of Metal Extrusion / William Johnson, Hideaki Kudo. — Manchester: Manchester University Press, 1962. — 226 p.
- 250 Johnson W. Plane-Strain Slip-Line Fields: Theory and Bibliography / W. Johnson, R. Sowerby, J. B. Haddow. — London: Edward Anorld, 1970. — 176 p.
- 251 Green A. P. On the use of hodographs in problems of plane plastic strain / A. P. Green // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1954. — Vol. 2. — Issue 2. — P. 73–80.
- 252 Kudo H., Takahashi H. Effects Die-or Punch-Angle and Friction in Plane-Strain Extrusion and Piercing / H. Kudo, H. Takahashi // Annals of the CIRP. — 1965. — Vol. 13. — Nr. 1. — P. 73–78.
- 253 Kudo H. Mathematical Theory Of Plasticity / Hideaki Kudo. — Japan: Yokohama National University, 1968. — 251 p.
- 254 Shield R.T. On the Plastic Flow of Metals under Conditions of Axial Symmetry / R. T. Shield // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — 1955. — Vol. 233. — No. 1193. — P. 267–287.
- 255 Bishop J. F. W. A note on the deformable region in a rigid-plastic body / J. F. W. Bishop, A. P. Green, R. Hill // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1956. — Vol. 4. — Issue 4. — P. 256–258.

- 256 Sauer R. / Robert Sauer // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM). — 1949. — Band 29. — S. 274–279.
- 257 Sauer R. Anfangswertprobleme bei partiellen differentialgleichungen / Robert Sauer. — [2. Auf.]. — Berlin: Springer-Verlag, 1958. — 284 p.
- 258 Neuber H. Allgemeine Lösung des ebenen Plastizitätsproblems für beliebiges isotropes oder anisotropes Fließgesetz / H. Neuber // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. — 1948. — Band 28. — Heft 9. — S. 253–257.
- 259 Генки Г. Пространственная задача упругого и пластического равновесия / Г. Генки // Изв. АН СССР. Отд.-ние техн. наук. Механика. — 1937. — № 2. — С. 187–196.
- 260 Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. — М.: Машиностроение, 1975. — 398 с.
- 261 Мельник В. И. Соотношения на декартовых координатах для условий предельного равновесия идеально-вязкой среды / В. И. Мельник // Вібрації в техніці та технологіях. — 2002. — № 3(24). — С. 72–81.
- 262 Мельник В. И. Уплотнение идеально-вязкой среды между параллельными вертикальными стенками — вывод основных уравнений / В. И. Мельник // Вібрації в техніці та технологіях. — 2003. — № 6(32). — С. 68–76.
- 263 Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 436 с.
- 264 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке; пер. с нем. С. В. Фомина. — [3-е изд., исправл.]. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. — 704 с.
- 265 Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями) / Л. Коллатц; пер. с нем. В. В. Никольского; под общ. ред. В. В. Никольского. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. — 504 с.
- 266 Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях (введение в метод промежуточных задач Ванштэйна) / С. Гулд; пер. с англ. Б. В. Федосова; под ред. В. Б. Лидского. — М.: Мир, 1970. — 328 с.
- 267 Келлер Дж. Б. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Дж. Б. Келлер, С. Антман; пер. с англ. Б. В. Логинова и Л. С. Срубщика; под ред. В. А. Треногина и В. И. Юдовича. — М.: Мир, 1974. — 254 с.
- 268 Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. — 736 с.

- 269 Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного: [учеб. для вузов] / И. И. Привалов. — [изд. 14-е, стер.]. — М.: Высш. шк., 1999. — 432 с.
- 270 Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц; пер. с франц. Ф. В. Широкова. — М.: Мир, 1965. — 412 с.
- 271 Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: [в 2 т.]. Т. 1 / Р. Курант; пер. с нем. и англ. З. Г. Либина и Ю. Л. Рабиновича. — [4-е изд., перераб. и доп.] — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 704 с.
- 272 Будак Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М.Будак, С.В.Фомин. — [2-е изд., стереотип.]. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 607 с.
- 273 Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: [в 3 т.]. Т. 1. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Изд-во “Лань”, 1997. — 607 с.
- 274 Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: [в 3 т.]. Т. 3. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Изд-во “Лань”, 1997. — 672 с.
- 275 Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 800 с.
- 276 Брычков Ю. А. Таблицы неопределенных интегралов: Справочник / Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, А. П. Прудников. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 192 с.
- 277 Мельник В. И. Плоды томатов как пластическое тело / В. И. Мельник, М. А. Цыганенко // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник Харківського національного технічного університету сільськогосподарства ім. Петра Василенка. — Харків: Видавництво СПДФО Червяк В. Є., 2005. — Вип. 41. — С. 283–299.
- 278 Мельник В. И. Алгоритм расчета напряженного состояния плода томата, сжатого между двумя жесткими горизонтальными плоскостями. / В. И. Мельник, М. А. Цыганенко // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник Харківського національного технічного університету сільськогосподарства ім. Петра Василенка. — Харків: ХНТУСГ, 2006. — Вип. 44, Т. 2. — С. 236–251.
- 279 Мельник В. И. Взаимодействие плодов томатов между собой и с жестким плоским деформатором одновременно / В. И. Мельник, М. А. Цыганенко // Проблеми надійності машин та засобів механізації сільськогосподарського виробництва: Вісник Харківського національного технічного університету сільськогосподарства ім. Петра Василенка. — Харків: ХНТУСГ, 2007. — Вип. 51. — С. 349–362.

- 280 Мельник В. И. Уплотнение идеально-связной среды между параллельными вертикальными стенками — анализ граничных условий и алгоритм расчета / В. И. Мельник // Вібрації в техніці та технологіях. — 2004. — № 4(36). — С. 81–90.
- 281 Паппас К. Visual C++. Руководство для профессионалов / К. Паппас, У. Мюррей; пер. с англ. А. Чекмарев, К. Шмидт; под ред. Е. Кондуковой и А. Жданова — СПб.: “ВНУ – Санкт-Петербург”, 1996. — 884 с.
- 282 Страуступ Б. Язык программирования C++ / Б. Страуступ; пер. с англ. С. Анисимова, М. Кононова; под ред. Ф. Андреева и А. Ушакова. — [3-е изд.]. — СПб.; М.: “Невский Диалект” – “Издательство БИНОМ”, 1999. — 991 с.
- 283 Богумирский Б. Энциклопедия Windows 98 / Б. Богумирский. — [2-е изд.]. — СПб.: “Питер”, 1999. — 896 с.
- 284 Румянцев П. В. Азбука программирования в Win 32 API / П. В. Румянцев. — М.: Радио и связь, 1998. — 272 с.
- 285 Реклейтис Г. Оптимизация в технике: [в 2-х кн.]. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндрант, К. Рэгсдел; пер с англ. В. Я. Алтаева, В. И. Моторина. — М.: Мир, 1986. — Кн. 1. — 349 с.
- 286 Миңу М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Миңу; пер. с фр. и предисловие А. И. Штерпа. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 488 с.
- 287 Маликов В. Т. Вычислительные методы и применение ЭВМ: [учеб. пособие] / В. Т. Маликов, Р. Н. Кветный. — К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989. — 213 с.
- 288 Фурунжиев Р. И. Применение математических методов и ЭВМ: Практикум: [учеб. пособие для вузов] / Р. И. Фурунжиев, Ф. М. Бабушкин, В. В. Варавко. — Мн.: Выщ. шк., 1988. — 191 с.
- 289 Мельник В. И. Уплотнение идеально-связной среды между параллельными вертикальными стенками — построение сетки линий скольжения / В. И. Мельник // Вібрації в техніці та технологіях. — 2006. — № 1(43). — С. 79–86.
- 290 Мельник В. И. К вопросу о знаках касательных напряжений / В. И. Мельник // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник Харківського національного технічного університету сільськогосподарства ім. Петра Василенка. — Харків: Видавництво СПДФО Червяк В. Є., 2005. — Вип. 41. — С. 259–264.

- 291 Мельник В. И. Задача о взаимодействии жесткой вертикальной пластины на почву — постановка, основные уравнения и граничные условия / В. И. Мельник // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. — Харків: Друкарня ФОП В Червяк В.Є, 2007. — Вип. 59, Т 2. — С. 60–74.
- 292 Мельник В. И. Задача о воздействии жесткой вертикальной пластины на почву — обоснование методов расчета параметров почвы, как среды / В. И. Мельник // Технічний сервіс АПК, техніка та технології в сільськогосподарському машинобудуванні: Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. — Харків: Видавництво ЧП Червяк, 2007. — Вип. 67, Т 2. — С. 3–16.
- 293 Мельник В. И. Задача о взаимодействии жесткой вертикальной пластины на почву, закономерности образования опережающей трещины / В. И. Мельник // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. — Харків: Друкарня ФОП В Червяк В.Є, 2008. — Вип. 75, Т 2. — С. 169–175.
- 294 Кушнарєв А.С. Методологические предпосылки выбора способа обработки почвы / А. С. Кушнарєв, В. В. Погорелый // Техніка АПК. — 2008. — № 1. — С. 17–21.
- 295 Зеленин А. Н. Машины для земляных работ (основы теории разрушения грунтов, моделирование процессов, прогнозирование параметров): [учеб. пособие для ВУЗ-ов] / А. Н. Зеленин, Баловнев В. И., Керов И. П.; под ред. А. Н. Зеленин. — М.: Машиностроение, 1975. — 422 с.
- 296 Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. — М.: Наука, 1975. — 632 с.
- 297 Мельник В. И. Внутрипочвенное внесение / В. И. Мельник // Кукуруза и сорго. — 1991. — № 2. — С. 39–43.
- 298 Сабликов М. В. Сельскохозяйственные машины: [учеб. пособие для интов и фак. механизации сел. хоз-ва]: [в 2 ч.] / Михаил Владимирович Сабликов — М.: Колос, 1968. Ч. 2: Основы теории и технологического расчета. — 296 с.
- 299 Гернет М.М. Курс теоретической механики: [учебник для вузов] / М. М. Гернет. — [изд. 3-е, перераб. и доп.]. — М.: Высшая школа, 1973. — 464 с.
- 300 Макеев Н. З. Агрегат для внутрипочвенного внесения гербицидов / Н. З. Макеев, В. И. Мельник // Кукуруза и сорго. — 1989. — № 3. — С. 36–40.

- 301 Мельник В. И. Экология, эргономика и внутрипочвенное внесение гербицидов / В. И. Мельник // Кукуруза и сорго. — 1994. — № 2. — С. 5–7.
- 302 Мельник В. И. Рабочий орган для внутрипочвенного внесения гербицидов / В. И. Мельник // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 1994. — № 3. — С. 15–19.
- 303 Мельник В. И. Ленточное внесение / В. И. Мельник // Кукуруза и сорго. — 1995. — № 2. — С. 12–14.
- 304 Мельник В. И. Изменение характера распределения жидкости распылителем по обрабатываемой поверхности в зависимости от их взаимной ориентации / В. И. Мельник // Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні: Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. — Харків: ХДТУСГ, 2004. — Вип. 23. — С. 287–301.
- 305 Ильин В. А. Аналитическая геометрия: [учебник для университетов] / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — [4-е изд., доп.]. — М.: Наука, 1988. — 224 с.
- 306 Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
- 307 Алгебра и аналитическая геометрия: [в 2 ч.]; [учеб. пособ. для вузов]. Ч. 2 / М. В. Милованов, М. М. Толкачев, Р. И. Тишкевич, А. С. Феденко. — Минск: Выш. шк., 1987. — 269 с.
- 308 Мельник В. И. Некоторые результаты применения опытных технических средств для ленточного предпосевого внесения гербицидов / В. И. Мельник, Н. Ч. Куринный // Механизация работ в полеводстве: Сб. научн. тр. / Московский институт инженеров сельскохозяйственного производства. — М.: МИИСП, 1986. — С. 37–40.
- 309 Макеев Н. З. Ленточное предпосевоное внесение гербицидов / Н. З. Макеев, В. И. Мельник // Проблемы конструирования и технологии производства сельхозмашин: тез. докл. Респ. научн.-техн. конф., (Кировоград, 28–30 окт. 1986 г.) / М-во высшего и среднего специального образования УССР, Госагропром УССР, Украинское республиканское правление НТО Машиностроительной промышленности, Кировоградский обласной совет НТО, Кировоградский институт сельскохозяйственного машиностроения. — Кировоград: КИСМ, 1986. — С. 28–30.
- 310 Макеев Н.З. Элементы технологии внутрипочвенного внесения гербицидов и рабочий орган для ее осуществления / Н. З. Макеев, В. И. Мельник // Совершенствование конструкции рабочих органов сельскохозяйственной техники: сб. научн. тр. / Харьк. с.-х. ин-т им. В.В.Докучаева. — Харьков: Харьк. с.-х. ин-т им. В.В.Докучаева, 1988. — С. 32–40.

- 311 Пат. 2025919 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 В 49/06. Комбинированный рабочий орган культиватора / Мельник В. И.; заявитель и патентообладатель Мельник Виктор Иванович [UA]. — № 4803939/15; заявл. 20.03.90; опубл. 09.01.95, Бюл. № 11.
- 312 Пат. 1291054 Российская Федерация, МПК<sup>4</sup> А 01 С 23/02. Рабочий орган для внесения жидких удобрений / Муравьев Ю. В., Дубовской С. Х.; заявители: Саратовское электроагрегатное производственное объединение и Колхоз “40 лет Октября” Краснокутского района Саратовской области. — № 3837048/30-15; заявл. 30.11.84; опубл. 23.02.87, Бюл. № 7.
- 313 Макеев Н. З. Некоторые теоретические аспекты взаимодействия почвообрабатывающих рабочих органов с почвой / Н. З. Макеев, В. И. Мельник // Современные проблемы земледельческой механики: Тез. докл. Всесоюзн. научн.-техн. конф. / Мелитопольский институт механизации сельского хозяйства. — Мелитополь: МИМСХ, 1989. — С. 89.
- 314 Макеев Н.З. Об обтекании препятствия почвой / Н.З.Макеев, В.И.Мельник // Техника в сельском хозяйстве. — 1996. — № 4. — С. 23–26.
- 315 Пат. 1276271 Российская Федерация, МПК<sup>4</sup> А 01 В 35/26. Рабочий орган культиватора / Макеев Н. З., Мельник В. И.; заявитель Харьковский институт механизации и электрификации сельского хозяйства. — № 3888130/30-15; заявл. 22.04.85; опубл. 15.12.86, Бюл. № 46.
- 316 Кобылко Б. Г. Расчет распылителей щелевого типа / Б. Г. Кобылко, М. И. Незбрицкий, Л. Н. Козин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 1983. — № 10. — С. 24.
- 317 Макеев Н. З. Обоснование общей гидравлической схемы агрегата для внутрпочвенного внесения гербицидов / Н. З. Макеев, В. И. Мельник, М. А. Цыганенко // Пути развития производства зерна в Украинской ССР: Тез. докл. Респ. научн.-техн. конф. / Украинский научно-исследовательский институт механизации и электрификации сельского хозяйства — Глеваха: УНИИМЭСХ, 1988. — с. 72–73.
- 318 Немилов Е. Ф. Справочник по электроэрозионной обработке материалов / Е. Ф. Немилов. — Л.: Машиностроение, 1989. — 164 с.
- 319 Разработка и исследование технических средств для внутрпочвенного ленточного предпосевного внесения гербицидов под посев пропашных культур: Отчет о НИР (заключительный) / Харьковский институт механизации и электрификации сельского хозяйства. № ГР 01.86.0032083. Инв. № 6320247. Харьков, 1986. — 22 с.
- 320 Пат. 1743430 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> А 01 С 23/02, А 01 С 23/00. Комбинированный рабочий орган почвообрабатывающего орудия /

- Мельник В. И.; заявитель Мельник Виктор Иванович. — № 4783730/15; заявл. 18.01.90; опубл. 30.06.92, Бюл. № 24.
- 321 Пат. 1662396 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> А 01 С 23/02. Комбинированный рабочий орган культиватора / Мельник В. И., Красноперова А. П., Гавриленко В. П.; заявитель Харьковский государственный университет им. А. М. Горького. — № 4703837/15; заявл. 09.06.89; опубл. 15.07.91, Бюл. № 26.
- 322 Мельник В. И. Робочий орган для стрічкового підповерхневого внесення гербицидів на комкуватих ґрунтах / В. І. Мельник // Удосконалення технологій та технічних засобів у сільському господарстві: Науково-дослідні роботи факультету механізації с.-г. ХДТУСГ, результати яких рекомендовані до впровадження в сільськогосподарське виробництво. — Харків: Золочівська районна друкарня, 1996. — С. 20–23.
- 323 Пат. 2025932 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 С 23/02, А 01 В 49/06. Комбинированный рабочий орган культиватора / Мельник В. И. [UA], Красноперова А. П. [UA], Гавриленко В. П. [UA]; заявитель Харьковский государственный университет им. А. М. Горького (UA); патенто-обладатель Мельник Виктор Иванович (UA). — № 4898480/15; заявл. 02.01.91; опубл. 10.01.95, Бюл. № 1.
- 324 Макеев Н. З. Предпосевное внутрипочвенное ленточное внесение гербицидов / Н. З. Макеев, В. И. Мельник // Основные направления развития техники для возделывания и уборки сахарной свеклы и кукурузы по индустриальным технологиям в свете Продовольственной программы СССР: Тез. докл. Респ. научн.-техн. конф. / Украинский научно-исследовательский институт сельскохозяйственного машиностроения. — Харьков: УкрНИИСХОМ, 1986. — С. 18–19.
- 325 Разработка и исследование технических средств для внутрипочвенного ленточного послепосевого внесения гербицидов на посевах пропашных культур: Отчет о НИР (заключительный) / Харьковский институт механизации и электрификации сельского хозяйства. № ГР 01.86.0032083. Инв. № 32-88. Харьков, 1989. — 55 с.
- 326 Пат. 1521323 Российская Федерация, МПК<sup>4</sup> А 01 В 79/02. Способ возделывания пропашных культур / Муха В. Д., Макеев Н. З., Мельник В. И., Куринный Н. Ч.; заявитель Харьковский институт механизации и электрификации сельского хозяйства. — № 4064257/30-15; заявл. 30.04.86; опубл. 15.11.89, Бюл. № 42.
- 327 Пат. 304901 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 С 7/20. Комбинированный сошник / Смирнов И. К., Федосеев В. Г., Буштец П. П., Беляев Е. А., Козаченко А. Н., Дурягин Д. А., Шокина А. И., Одегнатов М. П., Еременко Н. Г., Борисова Е. С.. — № 1407012/30-15; заявл. 20.11.70; опубл. 04.06.81, Бюл. № 18.



- 328 Пат. 820700 Российская Федерация, МПК<sup>6</sup> А 01 С 7/20. Сошник / Поликарпов В.И.; заявитель Рязанский сельскохозяйственный институт им. профессора П.А.Костычева. — № 2680165/30-15; заявл. 27.09.78; опубл. 15.04.81, Бюл. № 14.
- 329 Краткая инструкция по сборке и эксплуатации приспособления к сеялке СУПН-8 для внутрипочвенного внесения гербицидов одновременно с посевом высокостебельных пропашных культур. — Краснодар, 1985. — 27 с.
- 330 Пат. 1797767 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> А 01 В 69/00. Сельскохозяйственный агрегат / Макеев Н. З., Мельник В. И.; заявитель Харьковский институт механизации и электрификации сельского хозяйства. — № 4689148/15; заявл. 16.05.89; опубл. 28.02.93, Бюл. № 8.
- 331 Распыливание жидкости / Ю. Ф. Дитякин, Л. А. Кличко, Б. В. Новиков, В. И. Ягодин. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.
- 332 Анурьев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя: [в 3-х т.]. Т. 1. / В. И. Анурьев. — [5-е изд., перераб. и доп.]. — М.: Машиностроение, 1979. — 728 с.
- 333 Пат. 1613680 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> F 04 В 43/12. Перистальтический насос / Цыганенко М. А., Мельник В. И., Романченко Н.А.; заявители: Цыганенко Михаил Александрович, Мельник Виктор Иванович, Романченко Николай Анастасьевич. — № 4635760/25-29; заявл. 12.01.89; опубл. 15.12.90, Бюл. № 46.
- 334 Пат. 1687865 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> F 04 В 43/12. Насос перистальтического типа / Мельник В. И., Цыганенко М. А.; заявители: Мельник Виктор Иванович, Цыганенко Михаил Александрович. — № 4744777/29; заявл. 03.10.89; опубл. 30.10.91, Бюл. № 40.
- 335 Пат. 1716192 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> F 04 В 43/12. Перистальтический насос / Мельник В. И.; заявитель: Мельник Виктор Иванович. — № 4757448/29; заявл. 09.11.89; опубл. 28.02.92, Бюл. № 8.
- 336 Пат. 1701980 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> F 04 В 43/12. Перистальтический насос / Мельник В. И., Цыганенко М. А., Романченко Н.А.; заявители: Мельник Виктор Иванович, Цыганенко Михаил Александрович, Романченко Николай Анастасьевич. — № 4757800/29; заявл. 10.11.89; опубл. 30.12.91, Бюл. № 48.
- 337 Система контроля для машин хлопководящего комплекса / В. Г. Демидов, И. Х. Светославов, Н.Н. Божилов [и др.] // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 1989. — № 6. — С. 20–21.

- 338 Пат. 1586530 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> А 01 В 13/16. Орудие для нарезки щелей в почве / Макеев Н. З., Мельник В. И.; заявитель Харьковский институт механизации и электрификации сельского хозяйства. — № 4601130/31-15; заявл. 04.11.88; опубл. 23.08.90, Бюл. № 31.
- 339 Пат. 1386056 Российская Федерация, МПК<sup>4</sup> А 01 В 13/16. Щелерез / Макеев Н. З., Мельник В. И.; заявитель Харьковский институт механизации и электрификации сельского хозяйства. — № 3958700/30-15; заявл. 24.07.85; опубл. 07.04.88, Бюл. № 13.
- 340 Обладнання для захисту рослин. Обприскувачі. Частина 1. Методи випробування насадок для розприскування (ISO 5682-1:1996, IDT): ДСТУ ISO 5682-1:2005. — [Чинний від 2007-01-01]. — К.: Держспоживстандарт України, 2005. — 18 с.
- 341 Обладнання для захисту рослин. Обприскувачі. Частина 2. Методи випробування гідравлічних обприскувачів (ISO 5682-2:1997, IDT): ДСТУ ISO 5682-2:2005. — [Чинний від 2006-07-01]. — К.: Держспоживстандарт України, 2005. — 12 с.
- 342 Мельник В. И. Стенд для испытания малорасходных гидравлических распылителей полевых сельскохозяйственных машин / В. И. Мельник, М. А. Цыганенко, А. Н. Шкрегаль // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. — Харків: ХДТУСГ, 2002. — Вип. 11 — С. 121–127.
- 343 Мельник В. И. Розпилювач для стрічкового внесення гербіцидів / В. И. Мельник, А. А. Гаврюшенко // Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет — Мелітополь: ТДАТУ, 2008. — Вип. 8. — Т. 6. — С. 90–95
- 344 Тищенко Л. Н. К изотопным исследованиям распределения химпрепаратов под слоем почвы / Л. Н. Тищенко, В. И. Мельник // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв: Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка (ХНТУСГ). — Харків: КП “Міська друкарня”, 2009. — Вип. 88. — С. 45–53.
- 345 Тищенко Л. Н. Методика выбора детектора, радионуклида и расчет его начальной активности для изотопных исследований распределения химпрепаратов под слоем почвы / Л. Н. Тищенко, В. И. Мельник // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. — Харків: Друкарня ФОП Червяк В. Є., 2010. — Вип. 93, Т 2. — С. 5–17.

- 346 Тищенко Л. Н. Результаты изотопных исследований процесса внутрипочвенного внесения гербицидов / Л. Н. Тищенко, В. И. Мельник // Ресурсозберігаючі технології, матеріали та обладнання у ремонтному виробництві: Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. — Харків: Друкарня ФОП Воронюк В. В., 2010. — Вип. 96. — С. 113–124.
- 347 Сивухин Д. В. Общий курс физики: [в 5 т.] / Д. В. Сивухин. — [3-е издание, стереотипное]. — М.: Физматлит, 2002. — Т. V: Атомная и ядерная физика. — 784 с.
- 348 Защита от ионизирующих излучений: [учеб. для физ. и инженер.-физ. специальностей вузов]: в 2 т. / Под ред. Н. Г. Гусева. — [3-е изд., перераб. и доп.] — М.: Энергоатомиздат, 1989 — . — Т. 1: Физические основы защиты от излучений / Н. Г. Гусев, В. А. Климанов, В. П. Машкович, А. П. Суворов. — 1989. — 509 с.
- 349 Защита от ионизирующих излучений: [учеб. для физ. и инженер.-физ. специальностей вузов]: в 2 т. / Под ред. Н. Г. Гусева. — [3-е изд., перераб. и доп.] — М.: Энергоатомиздат, 1989 — . — Т. 2: Защита от излучений ядерно-технических установок / Н. Г. Гусев, Е. Е. Ковалев, В. П. Машкович, А. П. Суворов. — 1990. — 351 с.
- 350 Ву Ц. С. Бета-распад / Ц. С. Ву, С. А. Мошковский; перевод с английского В. В. Малярова. — М.: Атомиздат, 1970 — 396 с.
- 351 Мухин К. Н. Экспериментальная ядерная физика: [в 2 кн., кн. 1 в 2 ч.]: [учеб. для вузов] / К. Н. Мухин. — [5-е изд., перераб. и доп.] — М.: Энергоатомиздат, 1993 — . — Кн. 1: Физика атомного ядра. — Часть 1: Свойства нуклонов, ядер и радиоактивных излучений. — 1993 — 376 с.
- 352 Кноп Г. Взаимодействие электронов и альфа-частиц с веществом / Г. Кноп, В. Пауль // Альфа-, бета-, гамма-спектроскопия: [в 4 т.] / пер. с англ.; под ред. К. Зигбана. — М.: Атомиздат, 1993 — . — Вып. 1. — 1993. — 567 с.
- 353 Волков Н.Г. Методы ядерной спектрометрии: [учеб. пособие для инженер.-физ. специальностей вузов]. / Н. Г. Волков, В. А. Христоворов, Н. П. Ушакова. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 255 с.
- 354 Основы сельскохозяйственной радиологии / Б. С. Пристер, Н. А. Лоцилов, О. Ф. Немец, В. А. Поярков. — К.: Урожай, 1988. — 256 с.
- 355 Гудков И. Н. Основы общей и сельскохозяйственной радиобиологии: [учеб. для вузов] / И. Н. Гудков. — К.: Изд-во УСХА, 1991. — 328 с.
- 356 Смоляр В. А. Диффузионная модель кинетического уравнения для пучка быстрых электронов, падающего на полубесконечную мишень

- / В. А. Смоляр, А. В. Еремин // Радиотехника и электроника. — 2001. — № 5. — С. 599–603.
- 357 Ахиезер А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. — [4-е изд.] — М.: Наука, 1981. — 432 с.
- 358 Байер В. Н. Излучение релятивистских электронов / В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин. — М.: Атомиздат, 1973. — 376 с.
- 359 Богданкевич О.В. Работа с пучком тормозного излучения / О. В. Богданкевич, Ф. А. Николаев. — М.: Атомиздат, 1964. — 248 с.
- 360 Соколов А. А. Релятивистский электрон / А. А. Соколов, И. М. Тернов. — М.: Наука, 1983. — 304 с.
- 361 Немец О.Ф.Справочник по ядерной физике / О. Ф. Немец, Ю. В. Гофман. — К.: Наукова Думка, 1975. — 416 с.
- 362 Котегов К.В. Технеций / К. В. Котегов, О. Н. Павлов, В. П. Шведов. — М.: Атомиздат, 1965. — 119 с.
- 363 Спицын В.И. Технеций / В. И. Спицын, А. Ф. Кузина. — М.: Наука, 1981. — 146 с.
- 364 Блинов Н. Н. Технические средства медицинской интроскопии / Н. Н. Блинов, Р. Е. Быков, Э. Б. Козловский; под ред. Б. И. Леонова. — М.: Медицина, 1989. — 304 с.
- 365 Синьков М.В. Многоэлементные детекторы ионизирующего излучения / М. В. Синьков, В. Д. Сапрыкин, В. Г. Чалая. — К.: Техника, 1985. — 136 с.
- 366 Калашников С. Д. Физические основы проектирования сцинтилляционных гамма-камер / С. Д. Калашников. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 121 с.
- 367 Шамовский Л. М. Кристаллофосфоры и сцинтилляторы в геологии / Л. М. Шамовский. — М.: Недра, 1985. — 239 с.
- 368 Automated growing of lade single crystals controlled by meld level sensor / Eidelman L. G., Goriletsky V. J., Nemenov V. A. [et al.] // Cryst. Res. Technol. — 1985. — Vol. 20, № 2. — P. 167.
- 369 Melnik V. I. Classification of heavy-duty ionizing radiation detectors by technologic and design features / V. I. Melnik // Functional materials. — 1998. — Vol. 5. — No. 4. — P. 613–617.
- 370 Гринев Б. В. Осевая направленность детектора гамма-излучения на основе сцинтиллятора в форме диска / Б. В. Гринев, В. И. Мельник, В. Ю. Педаш // Тезисы докладов XVII международного семинара

- по ускорителям заряженных частиц; 17–23 сентября 2001 г. Алушта, Крым. — Харьков: НТЦ “ХФТИ”, 2001. — С. 186.
- 371 Grinyov B. V. A Direction Sensitive Detector / B. V. Grinyov, V. I. Melnik, V. Y Pedash. // 2001 Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference. 12th International Workshop an Room-Temperature Semiconductor X-and Gamma-Ray Detectors. — Sad Diego, California, 4–10 November 2001 year. — P. 25, 26.
- 372 Grinev B. V. Crystal shape variation as a way to improve the axial directionality of scintillation gamma detectors / B. V. Grinev, V. I. Melnik, V. Yu. Pedash // Functional materials. — 2002. — Vol. 9. — No. 3. — P. 467–470.
- 373 Grinyov B. V. The application of detectors on the base of “open” scintillators in scanning devises / B. V. Grinev, V. I. Melnik, V. Yu. Pedash // Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції: Спектроскопія в спеціальних застосуваннях. 18-21 червня 2003 р., Київ, Україна. — Київ, 2003. — С. 123.
- 374 Пат. 2018878 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/202. Сцинтилляционный детектор / Гринев Б. В., Мельник В. И.; заявители Гринев Б. В., Мельник В. И.; патентообладатель Гринев Борис Викторович. — № 5006496/25; заявл. 02.07.91; опубл. 30.08.94, Бюл. № 16.
- 375 Пат. 2014635 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/202. Сцинтилляционный детектор / Гринев Б. В., Мельник В. И.; заявитель и патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины. — № 4938164/25; заявл. 22.05.91; опубл. 15.06.94, Бюл. № 11.
- 376 Пат. 1829646 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/20. Сцинтилляционный детектор / Гринев Б. В., Мельник В. И.; заявитель Научно-производственное объединение “Монокристаллреактив”; патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины. — № 4906024/25; заявл. 10.12.90; опубл. 30.06.93, Бюл. № 27.
- 377 Пат. 1789946 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/20. Термостатированный сцинтилляционный детектор / Гринев Б. В., Мельник В. И., Е.Г.Урманов; заявитель Научно-производственное объединение “Монокристаллреактив”; патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины. — № 4943368/25; заявл. 23.04.91; опубл. 23.01.93, Бюл. № 3.
- 378 Пат. 1807431 Российская Федерация, МПК<sup>5</sup> G 01 T 1/202. Термопрочный сцинтилляционный детектор / Гринев Б. В., Мельник В. И.; заявители: Научно-производственное объединение “Монокристаллреактив”, Харьковский институт механизации и электрификации сельского хозяйства; патентообладатель Институт монокристаллов АН Украины. — № 4938152/25; заявл. 22.05.91; опубл. 07.04.93, Бюл. № 13.

- 379 Гринев Б.В. Перспективные направления совершенствования сцинтилляционных детекторов / Б. В. Гринев, В. И. Мельник // Тезисы докладов Межгосударственной конф. “Сцинтиллятор-93”. — Часть 2. — Харьков: Институт монокристаллов АН Украины. — 1993. — С. 5–6.
- 380 Grinev B.V. Improving the thermal resistance of scintillation detectors / B. V. Grinev V. I. Mel'nik // Instruments and Experimental Techniques. — 1994. — Vol. 37. — No. 5. — Part 1. — P. 572–577.
- 381 Мельник В.И. Термопрочный сцинтилляционный детектор / В. И. Мельник, Б. В. Гринев // Инженерно-физический журнал. — 1996. — Т. 69. — № 4. — С. 577–581.
- 382 Воробьев В.А. Гамма-плотнометрия / В. А. Воробьев, В. А. Горшков, А. Е. Шеломанов. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 144 с.
- 383 Испытания сельскохозяйственной техники. Машины посевные. Программа и методы испытаний: ОСТ 70.5.1-82. — М.: Госстандарт СССР, 1983. — 148 с. — (Государственный комитет СССР по стандартам).
- 384 Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров нормального распределения (СТ СЭВ 867-78): ГОСТ 11.004-74. — М.: Издательство стандартов, 1981. — 20 с. — (Государственный комитет СССР по стандартам).
- 385 Кардашевский С. В. Испытания сельскохозяйственной техники / [С. В. Кардашевский, Л. В. Погорелый, Г. М. Фудиман и др.]. — М.: Машиностроение, 1979. — 288 с.
- 386 Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики / Дж. Поллард; пер. с англ. В. С. Занадворова; под ред. Е. М. Четыркина. — М.: Финансы и статистика, 1982. — 344 с.
- 387 Соболев И. М. Метод Монте-Карло / И. М. Соболев. — [4-е изд.] — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 80 с. — (Популярные лекции по математике).
- 388 Хангильдин Э. В. Вероятностные модели расположения семян и растений в рядке / Э. В. Хангильдин // Механизация и электрификация сельского хозяйства. — 1981. — № 6. — С. 14–17.
- 389 Мельник В. И. Двумерная числовая модель расположения семян и растений пропашных культур в рядке / В. И. Мельник // Пути развития производства зерна в Украинской ССР: Тез. докл. Респ. научн.-техн. конф. / Украинский научно-исследовательский институт механизации и электрификации сельского хозяйства — Глеваха: УНИИМЭСХ, 1988. — с. 65–66.

- 390 Кузьминов В.Г., Лепа В.Е., Кашурко А.С. Состояние и перспективы развития автоматизации вождения тракторов и сельскохозяйственных машин: Обзорная информация / В. Г. Кузьминов, В. Е. Лепа, А. С. Кашурко. — К.: УкрНИИТИ, 1974. — 61 с.
- 391 Кнут Д. Э. Искусство программирования: [в 3 т.]. / Дональд Эрвин Кнут; пер. с англ. и ред. Л. Ф. Козаченко, В. Т. Тertyшного, И. В. Крайкова. — [3-е изд.]. — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2000. — Т. 2: Получисленные алгоритмы. — 272 с.
- 392 Математическое обеспечение ЕС ЭВМ / пер. с англ.; ред. И. С. Жаврид, М. М. Петрович. — Минск: Ин-т математики АН БССР, 1973 — . — Вып. 2: Пакет научных программ. Руководство программиста. — Ч. 2. — 1973. — 272 с.
- 393 Салтыков А. И. Программирование для всех / А. И. Салтыков, Г. Л. Семашко; под ред. В. П. Ширикова. — [2-е изд., перераб.]. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 176 с.
- 394 Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. — [2-е изд., перераб. и доп.]. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 640 с.
- 395 Дубнер В. Н. Вычисление прямых и обратных функций распределения / В. Н. Дубнер. — М.: Изд-во МГУ, 1971. — 19 с. — (Серия “Статистика и стохастические системы”, вып. 15).
- 396 Баврин И. И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / И. И. Баврин. — М.: Высшая школа, 2005. — 160 с.
- 397 Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения / Е. Я. Ремез. — К.: Наукова думка, 1969. — 623 с.
- 398 Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим ГОСТ 11.006-74. — М.: Издательство стандартов, 1979. — 24 с. — (Государственный комитет СССР по стандартам).
- 399 Parzen E. On Estimation of a Probability Density Function and Mode / Emanuel Parzen // The Annals of Mathematical Statistics. — 1962. — Vol. 33, No. 3. — P. 1065–1076.
- 400 Надарая Э. А. Об оценке плотности распределения случайных величин / Э. А. Надарая // Сообщ. АН ГССР. — 1964. — Т. 34, № 2. — С. 277–280.
- 401 Надарая Э. А. Непараметрическое оценивание плотности вероятности и кривой регрессии / Э. А. Надарая. — Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1983. — 194 с.

- 402 Епанечников В. А. Непараметрическая оценка многомерной плотности-вероятности / В. А. Епанечников. // Теория вероятностей и ее применения. — 1969. — Т. 14, № 1. — С. 156–161.
- 403 Лапко А. В. Непараметрические системы обработки информации / А. В. Лапко, С. В. Ченцов. — М.: Наука, 2000. — 350 с.
- 404 Большев Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
- 405 Кас М. On Tests of Normality and Other Tests of Goodness of Fit Based on Distance Methods / М. Кас, J. Kiefer, J. Wolfowitz // The Annals of Mathematical Statistics. — 1955. — Vol. 26, No. 2. — P. 189–211.
- 406 Лемешко Б. Ю. О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов — 1998. — Т. 64, № 3. — С. 61–72
- 407 Лемешко Б. Ю. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим: [методические рекомендации] / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. — Часть II: Непараметрические критерии. — 85 с.
- 408 Лемешко Б. Ю. Применение непараметрических критериев согласия при проверке сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Автометрия. — 2001. — № 2. — С. 88–102.
- 409 Лемешко Б. Ю. О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров / Б. Ю. Лемешко, С. Н. Постовалов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2001. — Т. 67, № 7. — С. 62–71.
- 410 Верлань А. Ф. Языки персональных компьютеров: справочное пособие / А. Ф. Верлань, И. В. Апатова, В. И. Донской; отв. ред. А. Ф. Верлань; АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике. — Киев: Наук. думка, 1989. — 240 с.
- 411 Руководство к полевому почвенному плотномеру конструкции Ю. Ю. Ревякина. — М: Издательство ТСХА, 1966. — 4 с.
- 412 Сельскохозяйственная техника. Методы определения условий испытаний. ГОСТ 20915-75. — М.: Издательство стандартов, 1975. — 37 с. — (Государственный комитет СССР по стандартам).
- 413 Мельник В. І. Експрес-оцінка безпеки та господарської ефективності застосування гербіцидів / В. І. Мельник // Матеріали наук.-метод. конф. факультету механізації сільського господарства ХДТУСГ, 16-22 березня 1996 р. / Харківський державний технічний університет сільського господарства — Харків: ХДТУСГ, 1996. — С. 10.



- 414 Мельник В. И. Экспресс-оценка безопасности и хозяйственной эффективности применения гербицидов / В. И. Мельник // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. — Харків: ХДТУСГ, 2000. — Вып. 1 — С. 134–142.
- 415 Шахбазов В. Г. Биоэлектрические свойства ядра и ядрышка в клетках растений в связи с генотипом, физиологическим состоянием и действием высокой температуры / В. Г. Шахбазов, Г. С. Лобынцева // Биофизика. — 1971. — № 3. — С. 457–461.
- 416 Kishimoto S. Nuclear Membranes of Cultured Mammalian Cells in the Period Preceding DNA Synthesis / Susumu Kishimoto, Irving Lieberman // The Journal of Cell Biology. — 1965. — Vol. 25, No. 1, Part 1. — P. 103–107.
- 417 Maekawa A. Electrophoretic mobility of isolated nuclei from rat ascites hepatoma cells and normal liver cells / A. Maekawa // Nagoya Medical Journal. — 1967. — Vol. 13, No. 4. — P. 216–231.
- 418 Шкорбатов Ю. Г. О связи между электрическим зарядом хроматина и клеточных ядер, объемом и функциональной активностью ядер. / Ю. Г. Шкорбатов, В. Г. Шахбазов // Вестник Харьковского университета. — 1984. — № 262. — С. 49–52.
- 419 Пат. 1425541 Российская Федерация, МПК<sup>4</sup> G 01 N 33/48. Способ диагностики интоксикации организма / Сосин И. К., Береснев А. В., Шахбазов В. Г., Гуревич Я. Л., Атраментова Л. А., Витин А. А., Пелих И. В., Береснева О. А.; заявители Украинский институт усовершенствования врачей, Харьковский медицинский институт, Харьковский государственный университет. — № 3998495/28-14; заявл. 19.11.85; опубл. 23.09.88, Бюл. № 35.
- 420 Пат. 1169614 Российская Федерация, МПК<sup>4</sup> A 61 B 10/00. Способ определения биологического возраста человека / Шахбазов В. Г., Набоков А. Л., Колупаева Т. В.; заявитель Харьковский ордена Трудового Красного Знамени и ордена Дружбы народов государственный университет им. А. М. Горького. — № 3355951/28-13; заявл. 30.10.81; опубл. 30.07.85, Бюл. № 28.
- 421 Колупаева Т. В. Изменения электрического потенциала клеточного ядра в онтогенезе человека / Т. В. Колупаева, В. Г. Шахбазов // Биохимия и физиология возрастного развития организма: Сб. науч. тр. ХГУ. — К.: Наукова думка, 1992. — С. 282–287.
- 422 Пат. 1242124 Российская Федерация, МПК<sup>4</sup> A 61 B 10/00. Способ диагностики алкоголизма / Сосин И. К., Шахбазов В. Г., Атраментова Л. А., Гуревич Я. Л., Згонникова Т. Б., Филатов М. К.; заявители

- Украинский институт усовершенствования врачей, Харьковский государственный университет им. А. М. Горького. — № 3784114/28-14; заявл. 26.06.84; опубл. 07.07.86, Бюл. № 25.
- 423 Мельник В. И. Экспресс-оценка эффективности гербицидов / В. И. Мельник, Ю. Г. Шкорбатов, Б. Д. Масловский // Защита и карантин растений. — 1997. — № 1. — С. 21.
- 424 Шкорбатов Ю. Г. Биоэлектрические свойства клеточных ядер / Ю. Г. Шкорбатов, В. Г. Шахбазов // Успехи современной биологии. — 1992. — Т. 112, № 4. — С. 499–511.
- 425 Шкорбатов Ю. Г. Влияние видимого света на состояние хроматина и электрокинетические свойства клеточных ядер / Ю. Г. Шкорбатов // Вестник Харьковского университета. — 1982. — № 226. — С. 41–45.
- 426 Шкорбатов Ю. Г. Проявление эффекта гетерозиса у проростков кукурузы при холодовом воздействии / Ю. Г. Шкорбатов // Природа, проявления и прогнозирование гетерозиса: Сб. науч. тр. ХГУ. — К.: Наукова думка, 1992. — С. 103–106.

ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение А

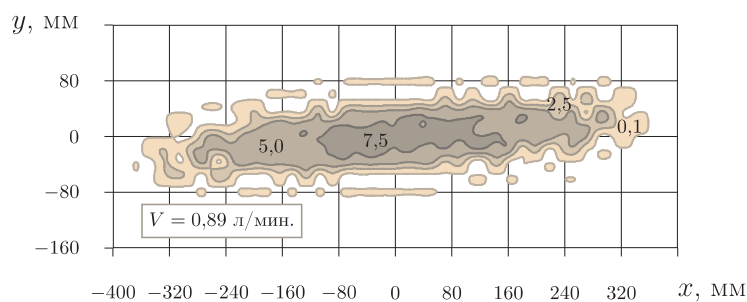
Характеристики щелевых распылителей,  
изготовленных в соответствии с рис. 6.4

Параметры проведения эксперимента: высота установки распылителя —  $h = 250$  мм; давление РЖ —  $P = 0,4$  МПа; время испытания —  $\Delta t = 1$  мин.

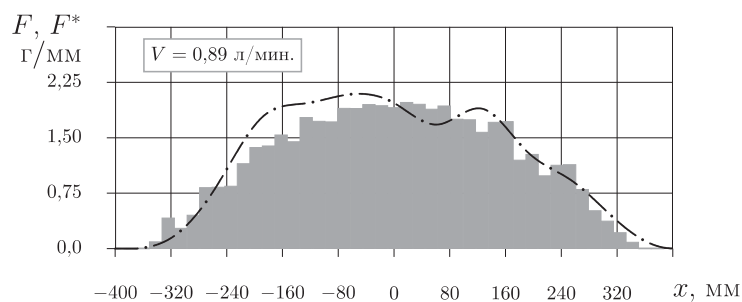
Изолинии соответствуют количеству РЖ в граммах, которое приходится на квадрат  $\Delta x \times \Delta y = 18 \times 18$  мм<sup>2</sup> площади пятна распыла, занятой одной пробиркой стенда.

Гистограмма  $F(x)$  соответствует количеству РЖ в граммах, которое приходится на 1 мм ширины захвата, в случае вертикальной ориентации распылителя, а кривая линия  $F^*(x)$  соответствует полученному расчетным путем тому же распределению, но в случае, когда распылитель ориентирован под углом  $45^\circ$  к поверхности напыления.

Все приведенные обозначения и параметры проведения испытаний соответствуют рис. 7.2.

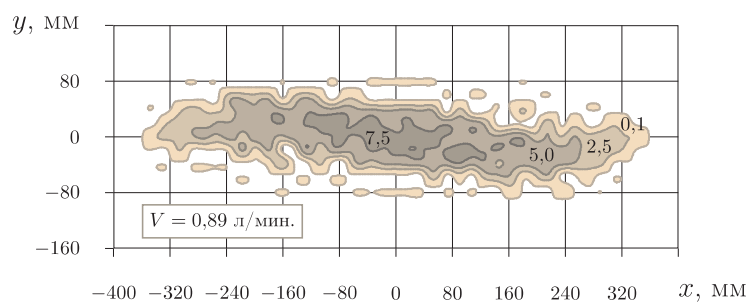


А

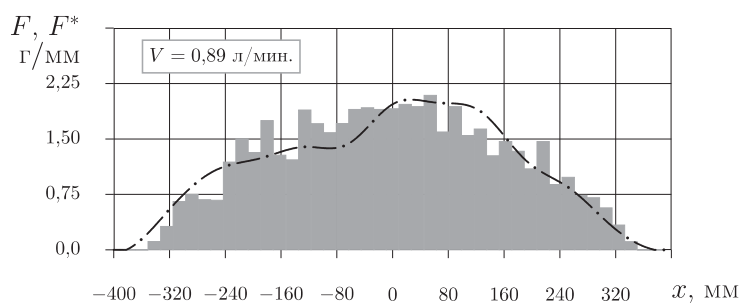


В

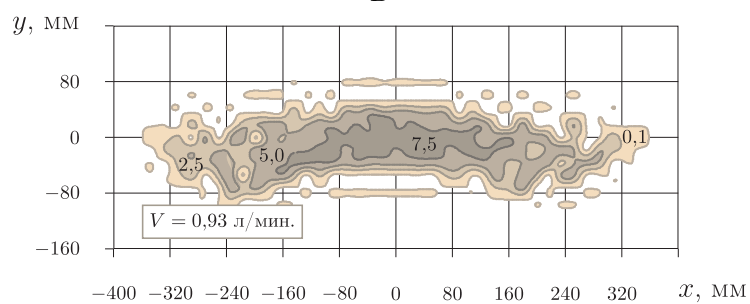
Рис. А.1. Характеристики распылителя № 2: А — двумерное распределение;  
В — одномерное распределение



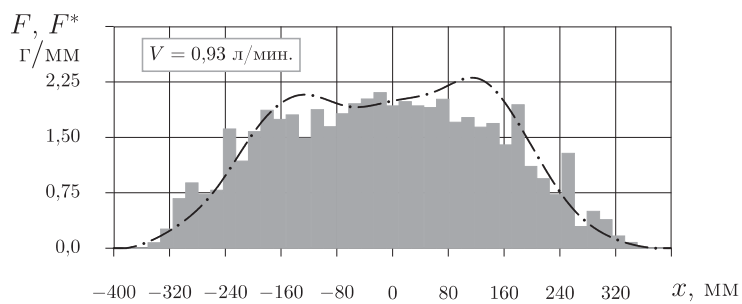
А



В

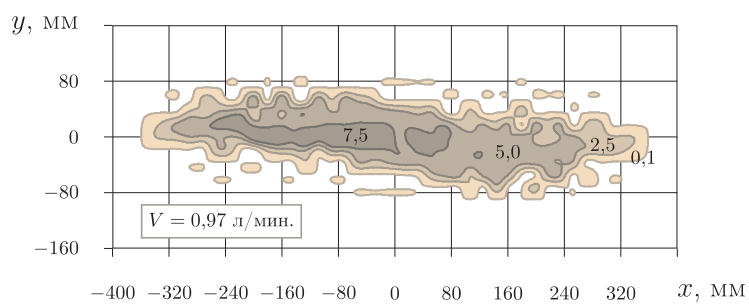


С

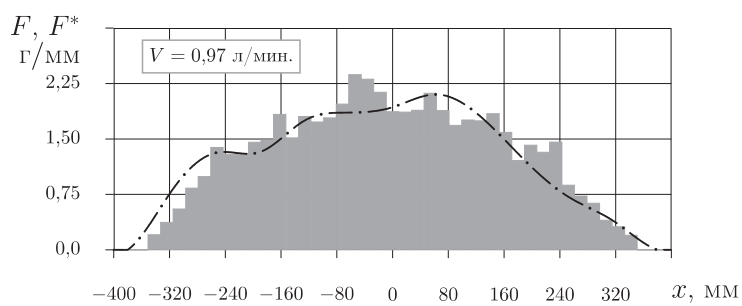


Д

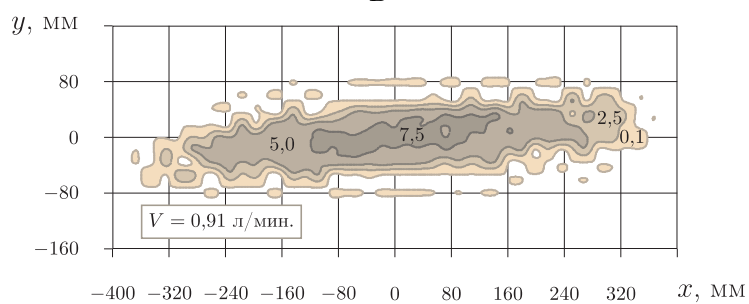
Рис. А.2. Характеристики распылителей № 3 и № 4: А, С — двумерное распределение; В, Д — одномерное распределение



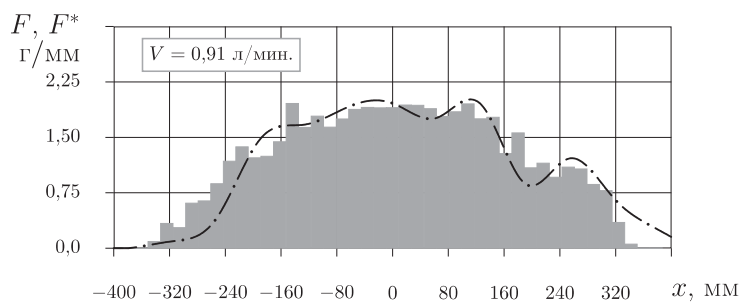
А



В

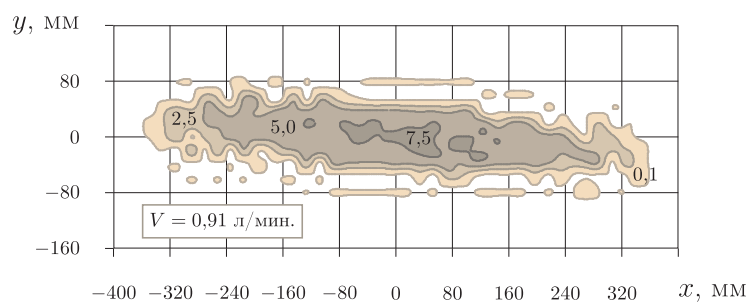


С

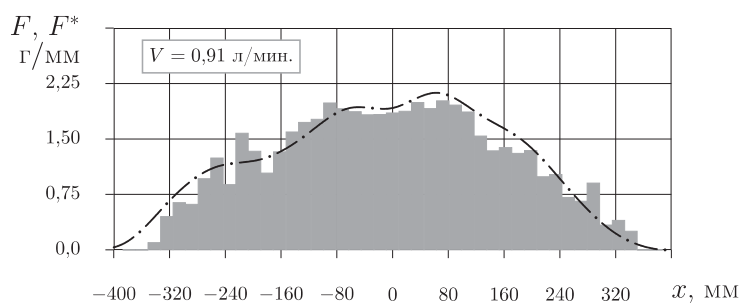


D

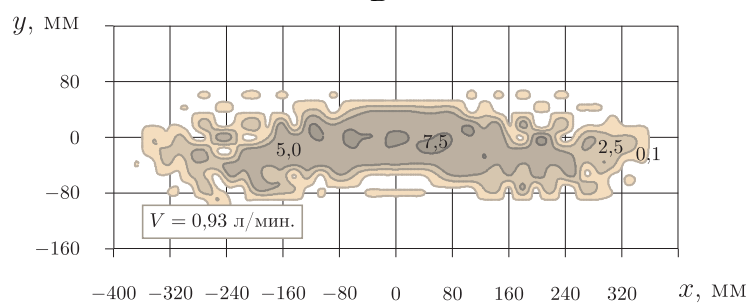
Рис. А.3. Характеристики распылителей № 5 и № 6: А, С — двумерное распределение; В, D — одномерное распределение



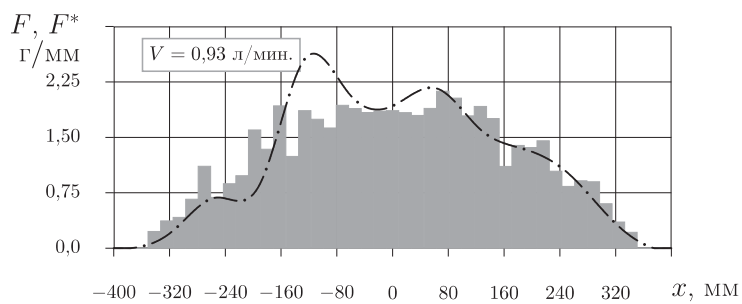
А



В

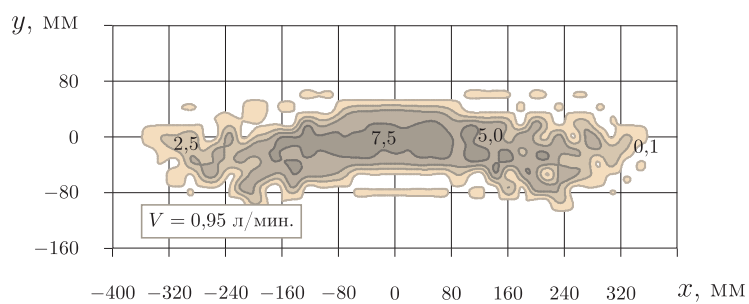


С

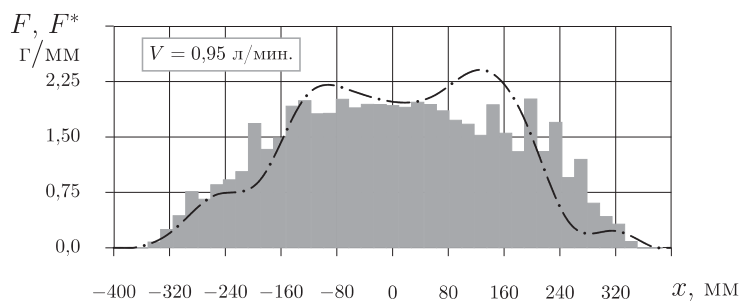


Д

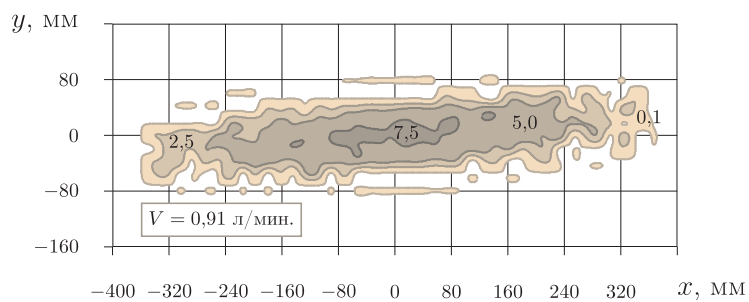
Рис. А.4. Характеристики распылителей № 7 и № 8: А, С — двумерное распределение; В, Д — одномерное распределение



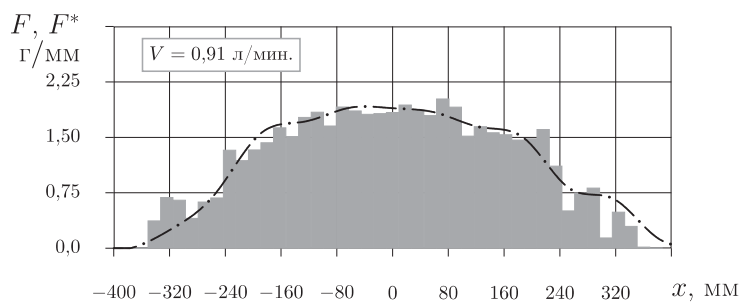
А



В



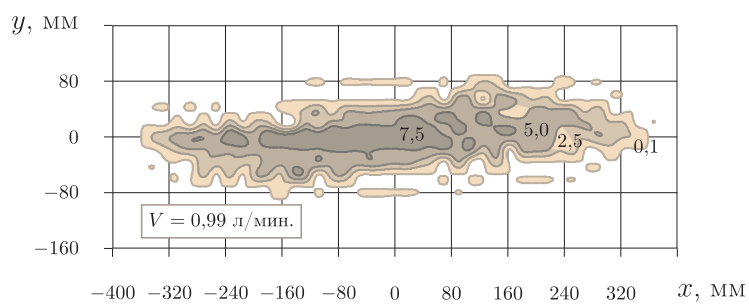
С



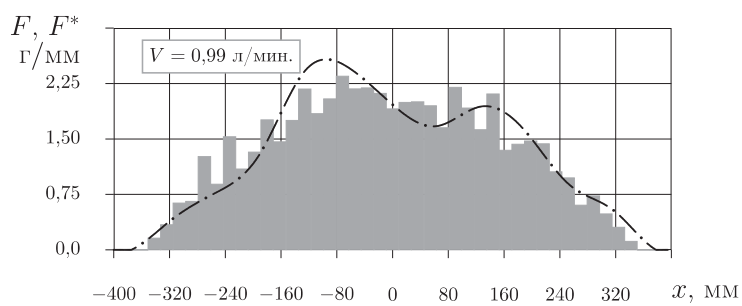
D

Рис. А.5. Характеристики распылителей № 9 и № 10: А, С — двумерное распределение; В, D — одномерное распределение

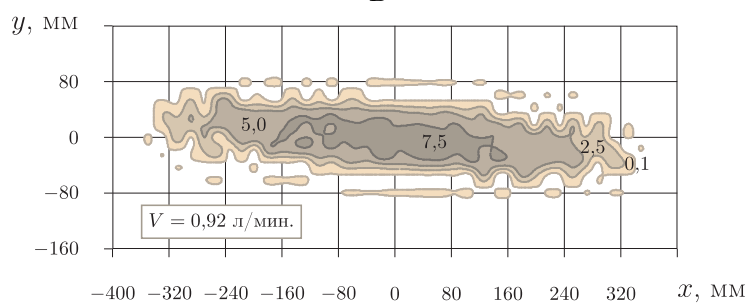




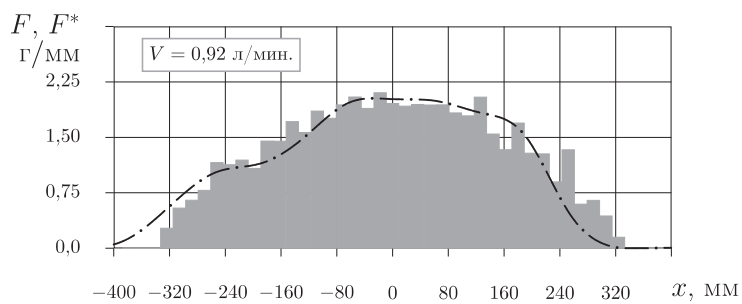
А



В

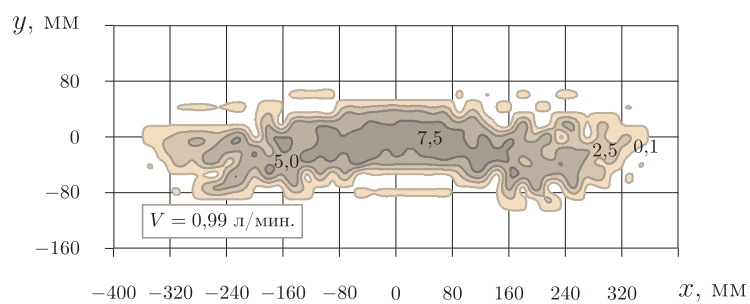


С

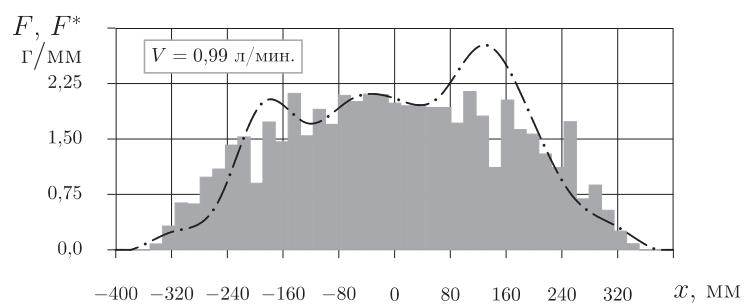


Д

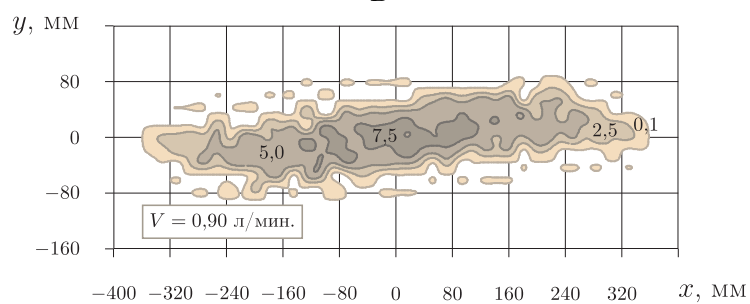
Рис. А.6. Характеристики распылителей № 11 и № 12: А, С — двумерное распределение; В, Д — одномерное распределение



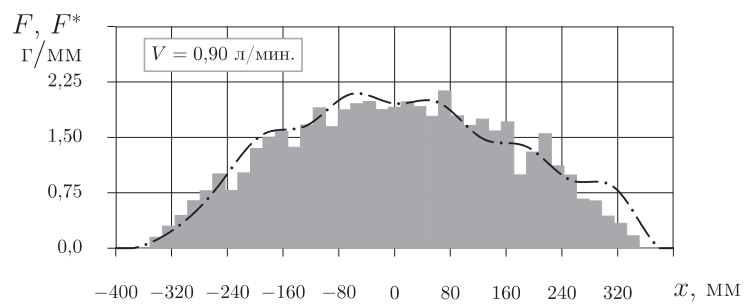
А



В

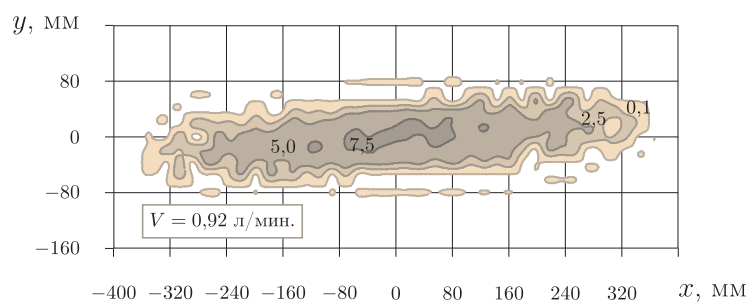


С

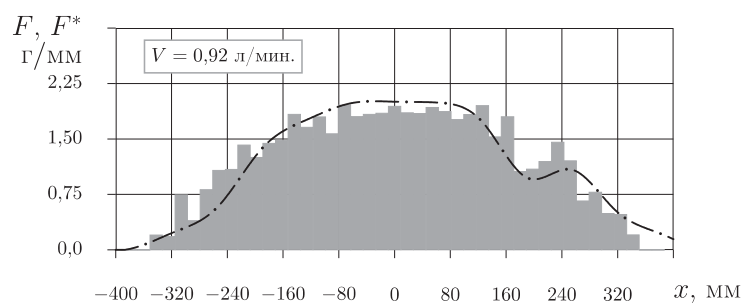


D

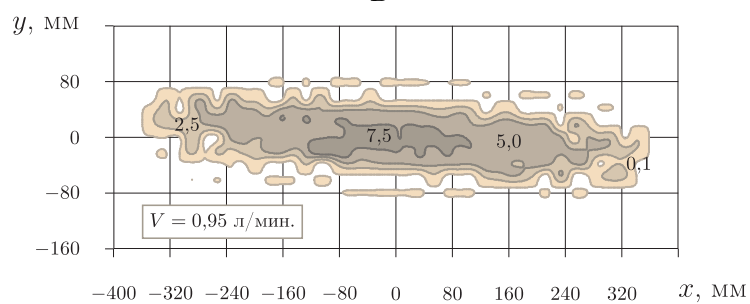
Рис. А.7. Характеристики распылителей № 13 и № 14: А, С — двумерное распределение; В, D — одномерное распределение



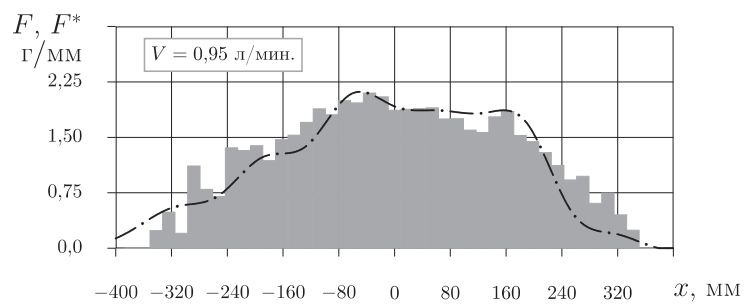
А



В



С



Д

Рис. А.8. Характеристики распылителей № 15 и № 16: А, С — двумерное распределение; В, D — одномерное распределение

## Приложение Б

Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) качественных показателей распределения препарата под слоем почвы при внесении его путем применения предлагаемых рабочих органов и технологий

Таблица Б.1

Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) количества препарата, находящегося под слоем почвы в узлах ортогональной сетки  $20 \times 20$  мм в случае внесения предлагаемым рабочим органом при наклонной ориентации распылителя\*

$y$ , мм	$x$ , мм												
	-120	-100	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80	100	120
Количество импульсов													
0	146	415	663	955	1114	1343	1406	1411	1524	1048	796	354	126
20	211	273	742	948	1144	1411	1451	1370	1283	1084	809	404	210
40	216	395	617	997	1128	1268	1542	1458	1423	1161	698	468	153
60	145	406	650	993	1024	1369	1483	1421	1349	1170	727	342	228
80	204	337	635	910	1235	1454	1380	1310	1413	1223	778	381	261
100	153	280	630	961	1219	1369	1468	1331	1428	1052	719	377	248
120	76	307	645	899	1081	1278	1424	1392	1534	1200	733	315	294
140	151	425	562	921	1146	1505	1452	1465	1405	1179	813	438	97
160	95	384	538	909	1150	1343	1426	1451	1348	1075	725	426	219
180	95	323	657	849	1209	1460	1423	1390	1345	1131	781	421	94
200	96	393	617	878	1129	1452	1365	1464	1429	1226	766	417	160
220	84	230	783	954	1111	1404	1404	1409	1406	1050	798	417	187
240	65	299	580	836	1204	1462	1431	1404	1183	1157	752	337	199
Статистические параметры													
$\bar{C}$	134	344	640	924	1146	1394	1435	1406	1390	1135	761	392	190
$\sigma_c$	52,9	63,3	66,5	50,4	59,6	73,3	46,1	48,7	92,9	66,1	38,0	45,2	62,1
$v_c$	0,4	0,18	0,1	0,05	0,05	0,05	0,03	0,03	0,07	0,06	0,05	0,12	0,33

\* Условные обозначения:  $x$  и  $y$  — расстояние до узла, измеренное по ширине и вдоль полосы внесения (мм);  $\bar{C}$ ,  $\sigma_c$  и  $v_c$  — среднее количество импульсов в узле, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации для количества импульсов относящихся к узлам для которых  $x = \text{const}$

Таблица Б.2  
 Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) количества препарата, находящегося под слоем почвы в узлах ортогональной сетки  $20 \times 20$  мм в случае внесения предлагаемым рабочим органом при горизонтальной ориентации распылителя\*

$y$ , мм	$x$ , мм												
	-120	-100	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80	100	120
Количество импульсов													
0	172	455	483	850	1147	1333	1473	1554	1160	1288	630	626	116
20	235	320	627	915	1129	1480	1296	1300	1471	1088	737	535	183
40	345	168	578	725	1040	1212	1528	1510	1301	1164	1267	546	238
60	151	234	660	1066	1161	1264	1684	1137	1252	1256	756	899	319
80	82	296	618	1035	1379	1622	1332	1345	1268	1063	818	384	44
100	255	411	553	794	1080	1624	1396	961	1475	1187	645	396	239
120	204	382	664	808	1360	1631	1594	1691	805	1214	1011	466	89
140	159	209	604	855	1497	1229	1376	1583	1358	898	918	935	51
160	124	360	338	1352	1253	1285	1619	1531	1253	1167	450	531	332
180	96	438	972	948	1182	1306	1380	1519	1347	1368	769	95	127
200	348	1311	587	1099	1295	1508	1670	1533	1327	1194	799	340	161
220	1113	357	753	887	1073	1509	1177	1387	1289	1259	731	378	114
240	80	395	696	973	938	1518	1326	1318	1481	994	607	757	36
Статистические параметры													
$\bar{C}$	259	410	626	947	1195	1425	1450	1413	1291	1165	780	530	158
$\sigma_c$	271,7	284,6	146,2	164,4	155,9	157,7	158,1	200,5	175,2	127,2	203,3	233,3	99,4
$v_c$	1,05	0,69	0,23	0,17	0,13	0,11	0,11	0,14	0,14	0,11	0,26	0,44	0,63

\* Условные обозначения:  $x$  и  $y$  — расстояние до узла, измеренное по ширине и вдоль полосы внесения (мм);  $\bar{C}$ ,  $\sigma_c$  и  $v_c$  — среднее количество импульсов в узле, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации для количества импульсов относящихся к узлам для которых  $x = \text{const}$

Таблица Б.3  
 Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) количества препарата, находящегося под слоем почвы в узлах ортогональной сетки  $20 \times 20$  мм в случае внесения предлагаемым рабочим органом при наклонной ориентации распылителя, после прохода (на 20 мм глубже) сошника посевной секции\*

$y$ , мм	$x$ , мм												
	-120	-100	-80	-60	-40	-20	0	20	40	60	80	100	120
Количество импульсов													
0	288	385	584	1050	1536	1555	1121	1867	1618	1189	738	430	211
20	157	372	632	933	1373	1175	1066	1315	1449	1258	781	408	191
40	116	367	599	1026	1440	1188	985	1342	1672	1281	706	429	182
60	158	334	677	937	1292	1300	469	1386	1417	1366	748	395	319
80	151	348	586	1022	1318	1221	847	1585	1352	1349	759	305	187
100	157	316	639	1041	1262	1208	1114	1358	1485	1098	622	431	216
120	222	345	570	972	1487	1398	814	1519	1534	1270	694	410	96
140	267	236	674	1088	1313	1255	944	1372	1481	1277	667	411	188
160	201	391	629	885	1384	1289	709	1286	1636	1163	755	418	113
180	179	330	705	939	1500	983	811	1086	1521	1301	740	484	137
200	127	444	623	1172	1255	1306	945	1493	1541	1100	840	507	266
220	102	378	698	1134	1252	1363	882	1164	1329	1171	786	475	256
240	239	351	685	1039	1418	1446	828	1328	1623	1218	648	353	148
Статистические параметры													
$\bar{C}$	182	354	639	1018	1372	1284	887	1392	1512	1234	730	420	193
$\sigma_c$	57,9	48,3	45,8	83,7	98,5	142	177,3	195,8	107,9	86,0	60,6	53,0	62,7
$v_c$	0,32	0,14	0,07	0,08	0,07	0,11	0,20	0,14	0,07	0,07	0,08	0,13	0,32

\* Условные обозначения:  $x$  и  $y$  — расстояние до узла, измеренное по ширине и вдоль полосы внесения (мм);  $\bar{C}$ ,  $\sigma_c$  и  $v_c$  — среднее количество импульсов в узле, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации для количества импульсов относящихся к узлам для которых  $x = \text{const}$

Таблица Б.4

Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) распределения препарата по глубине на оси обработанной полосы при внесении его предлагаемым рабочим органом в случае наклонной ориентации распылителя с имитацией посева (последующим проходом сошника):  $y$  — положение по глубине, мм;  $\bar{C}$  — среднее значение импульсов;  $\sigma_c$  — дисперсия;  $v_c$  — коэффициент вариации

$y$ , мм	Количество импульсов										$\bar{C}$	$\sigma_c$	$v_c$
0	140	147	166	157	134	171	122	145	120	133	143,5	17,28	0,12
20	148	612	591	636	372	1088	772	669	732	526	614,6	247,45	0,40
40	1269	1149	509	1206	490	1385	1337	1253	1103	616	1031,7	351,50	0,34
60	725	1590	974	1397	494	987	1913	292	1425	1507	1130,4	520,76	0,46
80	166	260	231	157	238	260	277	289	264	197	233,9	46,04	0,20

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ . . . . .	5
1. АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ . . . . .	6
1.1. Агротехническое обоснование прогрессивных технологий использования гербицидов на посевах пропашных культур . . . . .	6
1.2. Обзор известных технических решений в области применения гербицидов . . . . .	9
1.2.1. Классификация методов и технических средств для применения гербицидов . . . . .	9
1.2.2. Ультрамалообъемное опрыскивание . . . . .	15
1.2.3. Гидравлические распылители . . . . .	17
1.2.4. Технические средства для внутрипочвенного внесения гербицидов . . . . .	20
1.2.5. Агротехнические требования к перспективным машинам и технологиям . . . . .	22
1.3. Обзор методов математического моделирования почвообработки как теоретической основы проектирования рабочих органов для внутрипочвенного внесения гербицидов . . . . .	23
Выводы . . . . .	24
2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЧВЫ КАК СПЛОШНОЙ НЕУПРУГОЙ СРЕДЫ . . . . .	25
2.1. Дифференциальные уравнения равновесия . . . . .	25
2.2. Предельные условия . . . . .	26
2.3. Понятие плоской задачи . . . . .	33
2.4. Компоненты тензора напряжений для случая плоского предельного равновесия . . . . .	36
2.5. Условие предельного равновесия в компонентах тензора напряжений . . . . .	37
2.6. Дифференциальные уравнения плоского предельного равновесия . . . . .	37
2.7. Характеристический метод решения гиперболических систем уравнений . . . . .	39
2.8. Определение и классификация краевых задач . . . . .	41
2.9. Характеристическое решение систем уравнений предельного равновесия . . . . .	46
Выводы . . . . .	50



3. РАЗВИТИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЧВЫ КАК СПЛОШНОЙ НЕУПРУГОЙ СРЕДЫ В СОСТОЯНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ . . . . .	51
3.1. Система уравнений плоского предельного равновесия идеально-связной среды. Замена переменных по характеристическому решению . . . . .	51
3.2. Соотношения на декартовых координатах для системы уравнений плоского предельного равновесия идеально-связной среды . . . . .	53
3.2.1. Постановка задачи . . . . .	53
3.2.2. Масштабирующие функции-множители . . . . .	55
3.2.3. Выбор простейших представлений масштабирующих функций-множителей . . . . .	64
3.2.4. Общая дифференциальная форма соотношений на декартовых координатах . . . . .	66
3.2.5. Интегралы соотношений на декартовых координатах . . . . .	68
3.3. Анализ физической осмысленности полученных соотношений на декартовых координатах . . . . .	75
3.3.1. Условия тестовых задач и тестовые закономерности . . . . .	75
3.3.2. Предварительный анализ тестовых закономерностей . . . . .	77
3.3.3. Адаптированный вариант соотношений на декартовых координатах . . . . .	78
3.3.4. Оценка адекватности полученных соотношений . . . . .	80
3.3.5. Формулировка правил периодичности . . . . .	81
3.4. Два комплекта соотношений на декартовых осях, две различные задачи и два разных предельных состояния модельной среды . . . . .	83
3.5. Решение задачи об уплотнении модельной среды . . . . .	87
3.5.1. Формулировка граничных условий . . . . .	87
3.5.2. Компоненты тензора напряжений на осях декартовых координат . . . . .	88
3.5.3. Интеграл внешней нагрузки, действующей вдоль поверхности уплотнения . . . . .	89
3.5.4. Возможный сценарий развития процесса внешнего нагружения . . . . .	93
3.5.5. Алгоритм численного решения задачи . . . . .	94
3.5.6. Оценка алгоритма на адекватность . . . . .	107
3.5.7. Влияние физико-механических свойств среды на характер начального предельного напряженного состояния . . . . .	111
3.5.8. Конечное предельное напряженное состояние, переход к фазе релаксации. . . . .	111

3.5.9. Конечное предельное напряженное состояние. Построение сетки линий скольжения . . . . .	118
3.6. Анализ адекватности правила знаков касательных напряжений . . . . .	121
Выводы . . . . .	124
4. ЗАДАЧА В.П.ГОРЯЧКИНА ОБ ОПЕРЕЖАЮЩЕЙ ТРЕЩИНЕ . . . . .	125
4.1. Общие положения из теории предельного равновесия . . . . .	125
4.2. Постановка задачи. Частный случай . . . . .	127
4.3. Анализ задачи. Формулировка граничных условий . . . . .	128
4.3.1. Предварительные выводы в отношении граничных условий на свободном контуре . . . . .	128
4.3.2. Напряженное состояние среды в объеме ближайших окрестностей пятна контакта . . . . .	129
4.4. Адаптация соотношений на координатных прямых . . . . .	135
4.4.1. Анализ рабочего варианта соотношений на декартовых координатах . . . . .	142
4.4.2. Компоненты тензора напряжений на осях декартовых координат . . . . .	144
4.5. Формулировка граничных условий, действующих вдоль пятна контакта . . . . .	150
4.5.1. Определение постоянных, вошедших в соотношения на ординате, выполняющиеся вдоль пятна контакта . . . . .	151
4.5.2. Преобразование граничного условия, действующего вдоль пятна контакта . . . . .	152
4.5.3. Анализ и графическая интерпретация граничного условия, действующего вдоль пятна контакта . . . . .	154
4.6. Интегралы нормальной и касательной компонент полного напряжения, действующего на пятне контакта . . . . .	167
4.6.1. Интеграл нормальной составляющей полного напряжения . . . . .	168
4.6.2. Интеграл касательной составляющей полного напряжения . . . . .	173
4.7. Интегралы нормальной и касательной компонент полного напряжения, действующего в текущем горизонтальном сечении гребня . . . . .	177
4.7.1. Интеграл нормальной составляющей полного напряжения . . . . .	177
4.7.2. Интеграл касательной составляющей полного напряжения . . . . .	180
4.8. Согласование величин, определяющих напряженное состояние среды в области пятна контакта . . . . .	181

4.9. Согласование величин, определяющих напряженное состояние среды в произвольном горизонтальном сечении предельной области . . . . .	198
4.9.1. Постоянные величины из соотношений на абсциссе для гребня . . . . .	198
4.9.2. Постоянные величины из соотношений на абсциссе для средней части предельной области . . . . .	201
4.9.3. Постоянные величины из соотношений на абсциссе для нижней части предельной области . . . . .	202
4.10. Согласование величин, определяющих напряженное состояние среды в произвольном вертикальном сечении предельной области . . . . .	203
4.11. Алгоритм вычисления координат точек кривой свободного контура . . . . .	205
4.12. Усовершенствованный алгоритм согласования и проверки корректности начальных данных . . . . .	214
4.13. Расчет координат точек огибающей кривой . . . . .	217
4.13.1. Алгоритм вычисления координат точек огибающей кривой в предположении, что она является характеристикой одного из семейств . . . . .	217
4.13.2. Анализ граничных условий . . . . .	218
4.13.3. Уточнение физического смысла огибающей кривой . . . . .	221
Выводы . . . . .	231
5. ПРОЦЕССЫ ОБРАЗОВАНИЯ ПОЛОСТИ В ПОЧВЕ И РАСПЫЛЕНИЯ В НЕЙ РАБОЧИХ ЖИДКОСТЕЙ . . . . .	234
5.1. Образование в почве полости, предназначенной для распределения жидких удобрений и/или иных средств химзащиты растений . . . . .	234
5.1.1. Динамический характер процесса образования полости в почве . . . . .	234
5.1.2. Стрельчатая лапа — основа комбинированного рабочего органа . . . . .	235
5.1.3. Согласование конструктивных и режимных параметров рабочего органа . . . . .	239
5.2. Моделирование распределения жидкости по обрабатываемой поверхности . . . . .	241
5.2.1. Постановка и актуальность задачи . . . . .	241
5.2.2. Факел распыла жидкости как векторное поле . . . . .	242
5.2.3. Распыление жидкости по свободно ориентированной площадке . . . . .	249
5.2.4. Методика пересчета нормированной характеристики распылителя . . . . .	252
5.2.5. Анализ результатов моделирования . . . . .	255
Выводы . . . . .	257

6. РАЗРАБОТКА ТЕХНОЛОГИЙ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ДЛЯ ВНЕСЕНИЯ ЖИДКИХ УДОБРЕНИЙ И ХИМЗАЩИТЫ РАСТЕНИЙ . . . . .	258
6.1. Разработка комбинированных рабочих органов для почвообработки и внесения жидких удобрений и/или иных средств химзащиты растений . . . . .	258
6.1.1. Рабочие органы для открытого ленточного внесения жидких гербицидов . . . . .	258
6.1.2. Цельносварной стрелчатый рабочий орган для внутрипочвенного внесения гербицидов . . . . .	261
6.1.3. Рабочий орган с криволинейными лемехами и разборной стойкой . . . . .	268
6.1.4. Эргономичный рабочий орган . . . . .	274
6.1.5. Рабочий орган для внутрипочвенного внесения гербицидов на комковатых почвах . . . . .	276
6.1.6. Рабочий орган для внутрипочвенного внесения гербицидов с применением технологии размазывания . . . . .	278
6.2. Разработка технологии ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов . . . . .	281
6.2.1. Обоснование и анализ возможных вариантов реализации технологии ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов . . . . .	281
6.2.2. Обоснование и анализ перспективных гидравлических схем машин для ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов . . . . .	291
6.2.3. Разработка перспективных технических средств для вождения агрегатов по направляющим щелям в почве . . . . .	292
Выводы . . . . .	295
7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ДЛЯ ЛЕНТОЧНОГО ВНУТРИПОЧВЕННОГО ВНЕСЕНИЯ ГЕРБИЦИДОВ . . . . .	296
7.1. Испытание распылителей . . . . .	296
7.1.1. Стенд для испытания распылителей . . . . .	296
7.1.2. Основные положения методики подготовки распылителей к испытаниям и самих испытаний . . . . .	296
7.1.3. Характеристики прямоточных щелевых распылителей с прямоугольным шлицом . . . . .	298
7.2. Радиоизотопный эксперимент по исследованию конечного распределения рабочей жидкости при ее внутрипочвенном внесении разработанными рабочими органами . . . . .	303
7.2.1. Полевая исследовательская машина . . . . .	303
7.2.2. Мерительный инструментарий и приборы . . . . .	305
7.2.3. Выбор радионуклида . . . . .	312
7.2.4. Совершенствование регистрирующей аппаратуры . . . . .	317

7.2.5. Программа и методика эксперимента . . . . .	320
7.2.6. Результаты радиоизотопного эксперимента . . . . .	326
7.3. Эксперимент по оценке перераспределения семян полезных растений вследствие выполнения самостоятельной операции послепосевого внутрипочвенного внесения гербицидов . . . .	333
7.3.1. Программа и методика эксперимента . . . . .	333
7.3.2. Метод Монте-Карло. Математическая модель посева . .	335
7.3.3. Метод скользящего среднего. Совершенствование методики оценки параметров распределения растений по ширине ленты посева . . . . .	341
7.3.4. Результаты эксперимента . . . . .	352
7.4. Эксперимент по оценке закономерностей уплотнения почвы вследствие выполнения самостоятельной операции послепосевого внутрипочвенного внесения гербицидов . . . .	359
Выводы . . . . .	361
8. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗРАБОТАННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ДЛЯ ЛЕНТОЧНОГО ВНУТРИПОЧВЕННОГО ВНЕСЕНИЯ ГЕРБИЦИДОВ . . . . .	363
8.1. Агротехнические преимущества . . . . .	363
8.2. Оценка предложенных инженерно-технологических решений на экологичность и эргономичность . . . . .	365
8.2.1. Уменьшение отрицательного воздействия на окружающую среду . . . . .	365
8.2.2. Улучшение условий и повышение производительности труда обслуживающего персонала и механизаторов . . .	366
8.3. Разработка метода для экспресс-оценки безопасности и эффективности гербицидного действия . . . . .	367
8.4. Экономическая эффективность применения послепосевого ленточного внутрипочвенного внесения гербицидов . . . . .	371
Выводы . . . . .	378
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	379
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	382
ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . .	421
А. Характеристики щелевых распылителей, изготовленных в соответствии с рис. 6.4 на стр. 263 . . . . .	422
Б. Результаты эксперимента по оценке (изотопным методом) качественных показателей распределения препарата под слоем почвы при внесении его путем применения предлагаемых рабочих органов и технологий . . . . .	430

Монография

Мельник Виктор Иванович

ВНУТРИПОЧВЕННОЕ  
ВНЕСЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ  
В РАСТЕНИЕВОДСТВЕ

Дизайн и оформление обложки	В.И.Мельник
Общий дизайн, оформление рисунков, компьютерный набор и верстка в издательской системе L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X 2 <sub>ε</sub>	В.И.Мельник
Литературный редактор	Л.И.Воробьева

Сдано в набор 15.06.2010. Подписано к печати 25.06.2010.  
Формат 70×100/16. Усл.-печ. л. 27,66. Уч.-изд. л. 29,58.  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Заказ 430, Тираж 300 экз..  
Цена договорная.

---

Издано и напечатано в КП “Городская типография”,  
61002, г. Харьков, ул. Артема, 44.  
Свидетельство о внесении субъекта издательского дела в государственный  
реестр издателей, изготовителей и распространителей издательской  
продукции № 3613 ДК от 29.10.2009 г.

---