

К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА РЕЗАНИЯ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА ОСТРЫМ ЛЕЗВИЕМ

Нанка А.В., Иевлев И.И., Семенцов В.В., Бойко Д.И., Семенцов В.И.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Рассматривается задача, моделирующая процесс резания упругого тела острым ножом. Воздействие ножа моделируется действием сосредоточенной силы. Задача рассматривается в двухмерной постановке, когда упругое тело занимает полуплоскость, ограниченную прямой линией. Используется известное решение о напряженном состоянии упругой полуплоскости, нагруженной сосредоточенной силой, направленной под углом по отношению к нормали n к граничной линии. Вводится некоторый «параметр качества» процесса резания, позволяющий осуществлять оптимизацию процесса резания. Результаты приведены в виде графиков компонент тензора напряжений, интенсивности касательных напряжений и графической зависимости «параметра качества» от угла наклона силы к нормали n .

Ключевые слова: *резание, лезвие, напряжения, предельные напряжения, интенсивность касательных напряжений, поле перемещений.*

Введение. Процесс разрушения тела наблюдаем при измельчении зерновых продуктов. Имеются различные способы такого измельчения [1-6]. Разрушение твердых тел – это процесс деления тела на более мелкие его части. Несмотря на большое количество способов дробления (резание, раздавливание, скалывание, удар и т.п.), в основе лежит одно и то же явление – это возникновение в теле при его нагрузке предельных напряжений, приводящих к нарушению целостности тела, разрыву связей атомов и молекул между собой.

Анализ литературных данных и постановка проблемы. При этом разрыв этих связей возможен двумя способами: первый, хрупкое разрушение, когда напряжения в теле вплоть до предельных связаны с деформациями согласно закону Гука, и, второй, «квазихрупкое» разрушение, когда в точке разрушения появляются пластические деформации.

Следует заметить, что физическая картина разрушения твердого тела на части до настоящего времени не вполне ясна. Некоторые авторы предлагают рассматривать процесс разрушения как процесс развития микротрещин, имеющих в теле [6, 7]. Другая точка зрения опирается на понятие предельного равновесия, связанного с образованием пластических зон, приводящих к разрушению тела [8-10].

Таким образом, в любом случае требуется изначальное определение напряженного состояния, приводящего к пластическим деформациям, и дальнейшее рассмотрение совместного упругопластического состояния. Если остановиться на процессе резания тела на части, то схематически его можно представить в виде внедрения некоторого «абсолютно твердого» клинообразного тела I (резца, лезвия, штампа) в некоторое менее прочное тело II (Рис.1).

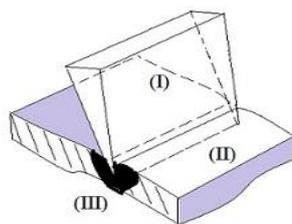


Рис.1 Взаимодействие лезвия с телом

В окрестности острия реза при достижении предельных напряжений образуется зона пластичности (III).

Для реза, имеющего идеально острую клинообразную форму, теоретически в окрестности контакта острия, очевидно, будут возникать бесконечно большие напряжения при любом силовом воздействии лезвия. Практически идеально острые лезвия в действительности не встречаются, всегда лезвие заканчивается поверхностью, обладающей большой кривизной (или малым радиусом кривизны ε). Поэтому состояние с бесконечно большими напряжениями можно рассматривать как предельное состояние, к которому асимптотически стремится решение задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Цели и задачи исследования. Целью исследований является изучение напряженно-деформированного состояния упругого тела в применении к процессу дробления зерновых материалов сельскохозяйственной продукции.

Для анализа напряженно деформированного состояния тела при резании предлагается такая последовательность рассмотрения задачи.

1. Определение тензоров напряжений и деформаций плоской задачи о равновесии упругого полупространства под действием сосредоточенной силы \vec{P} , действующей на границе тела и направленной под углом α по отношению к нормали к этой границы.

2. Расчет интенсивности касательных напряжений, ответственной за возникновение пластических деформаций.

3. Определение некоторого параметра S , характеризующего «качество» нагружения силой \vec{P} . В качестве такого параметра выберем площадь той части полуплоскости $y \geq 0$, для которой интенсивность касательных напряжений T превосходит предельное значение τ_s : $T \geq \tau_s$. Здесь τ_s - предельное касательное напряжение при чистом сдвиге. Рассматривая параметр S как функцию угла наклона α при постоянной величине $|\vec{P}|$, в качестве благоприятного для разрушения значения α выбираем то, при котором S является максимальным.

Материалы и методы исследования. Для решения задачи используется подход опирающийся на методы линейной теории упругости. Формулируются задачи об определении напряженно деформированного состояния при действии на упругое тело сосредоточенной силой. Используется известная методика расчета задач теории упругости. Используются известные аналитические соотношения, описывающие данное состояние для решения поставленной задачи. По полученным соотношениям производится расчет полей напряжений и деформации. Для проведения численных расчетов используется пакет математических программ MATLAB. Решение сформулированной выше задачи используется для анализа процесса дробления зерновых материалов при производстве кормов и продуктов питания (пищевых круп). Решение данной задачи может быть также использовано для прогнозирования проведения экспериментов по дроблению зерновых материалов.

Результаты и их обсуждение. Схема решения задачи определения напряженного состояния известна [12-14].

1. Для решения задачи первого пункта воспользуемся результатами, приведенными в работе [12]. Введем систему координат xOy так, чтобы граница упругой полуплоскости совпадала с осью Ox . Пусть в начале координат на границе $y=0$ действует сосредоточенная сила \vec{P} (Рис.2)

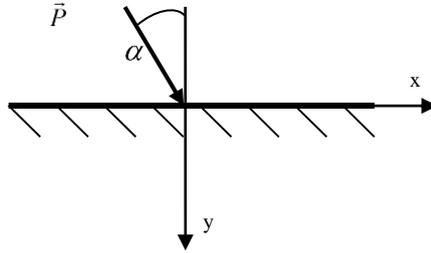


Рис.2 Воздействие силы на упругое полупространство

При плоском деформированном состоянии вектор перемещений $\vec{u} = (u, v, 0)$ зависит только от двух переменных x, y и третья компонента равна нулю. В этом случае тензоры деформаций $\hat{\varepsilon}$ и напряжений $\hat{\sigma}$ имеют следующую структуру

$$\hat{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ik}\}_{i,k=1}^3 = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \{\sigma_{ik}\}_{i,k=1}^3 = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

где $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ и связаны между собой законом Гука [13]

$$\varepsilon_x = \frac{(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y}{2\mu}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu}, \quad \varepsilon_y = \frac{(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x}{2\mu} \quad (2)$$

где μ является коэффициентом Ляме,

ν - коэффициент Пуассона.

Равновесное состояние описывается двумя уравнениями равновесия, дополненными уравнением совместности [12].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sigma_{xy}$$

Разложим силу \vec{P} на нормальную и касательную составляющие

$$\vec{P} = (N, K) \quad (N = P \cos \alpha, \quad K = P \sin \alpha)$$

Для получения однозначного решения системы уравнений (3), необходимо дополнить их граничными условиями на границе $y=0$ и на бесконечности при $y \rightarrow \infty$. На бесконечности решение задачи должно стремиться к нулю

$$(|\sigma_x|, |\sigma_{xy}|, |\sigma_y|) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

На границе упругого полупространства заданы напряжения \vec{p}_n , имеющие распределение, содержащее функцию Дирака $\delta(x)$

$$\vec{p}_n = (P \cos \alpha, P \sin \alpha) \delta(x) \quad (5)$$

Тогда имеем два граничных условия при $y=0$

$$\begin{aligned} -\sigma_y(0, x) &= P \cos \alpha \delta(x) \\ -\sigma_{xy}(0, x) &= P \sin \alpha \delta(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Решение сформулированной задачи можно представить в виде суперпозиции решений двух задач: первая, соответствует нормальной составляющей силы на границе, вторая, относится к касательной составляющей силы. Решения первой и второй задач известны: [12], стр.321, формула (19) для первой задачи и [12], стр.326, формула (31) для второй задачи.

Окончательное выражение для компонент тензора напряжений можно записать в виде

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{y^2 (y \cos(\alpha) + x \sin(\alpha))}{(x^2 + y^2)^2} \quad (7)$$

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 (y \cos(\alpha) + x \sin(\alpha))}{(x^2 + y^2)^2} \quad (8)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy (y \cos(\alpha) + x \sin(\alpha))}{(x^2 + y^2)^2} \quad (9)$$

Деформации упругого деформирования определяются соотношениями (2) первое и третье из которых дают дифференциальные выражения для компонент вектора перемещений

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \varepsilon_x(x, y), \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \varepsilon_x(x, y) \quad (10)$$

Интегрируя здесь первое по x , а второе по y соотношения, соответственно, получим выражения для компонент вектора перемещений

$$u = \frac{P}{2\pi\mu} \left\{ \left[(v-1) \ln(x^2 + y^2) - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)} \right] \sin \alpha + \left[(2v-1) \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{yx}{(x^2 + y^2)} \right] \cos \alpha \right\} \quad (11)$$

$$v = \frac{P}{2\pi\mu} \left\{ \left[(2v-1) \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{yx}{(x^2 + y^2)} \right] \sin \alpha + \left[(v-1) \ln(x^2 + y^2) - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)} \right] \cos \alpha \right\} \quad (12)$$

Не трудно проверить, что вектор перемещений удовлетворяет второму уравнению соотношений (2).

2. Теория пластического деформирования тел основывается на условии текучести, соответствующего некоторому предельному состоянию, при котором в теле возникают пластические деформации [9-11]. Соответствующие условия носят аксиоматический характер и опираются на опытные данные. Одним из наиболее применимых является условие текучести Мизеса, которое выражает собой условие достижения интенсивностью касательных напряжений T предельного значения τ_s

$$T = \tau_s \quad (13)$$

где квадрат интенсивности касательных напряжений представляет собой второй

инвариант девиатора напряжений $\overset{\circ}{\sigma}$ ($\overset{\circ}{\sigma} = \hat{\sigma} - \sigma_{nn} \hat{\delta} / 3$)

$$T^2 = \frac{1}{2} \sigma_{mn}^o \sigma_{mn}^o = \frac{(\sigma_x^o - \sigma_y^o)^2 + (\sigma_y^o - \sigma_z^o)^2 + (\sigma_z^o - \sigma_x^o)^2}{6} + \sigma_{xy}^o{}^2 = \quad (14)$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]^2 + [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]^2 \right\} + \sigma_{xy}^2$$

по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3!

3. Ниже на рис.3-11 приведены графики, изображающие зависимости компонент тензора напряжений и соответствующие им линии уровня для различных углов наклона действующей силы \vec{P} .

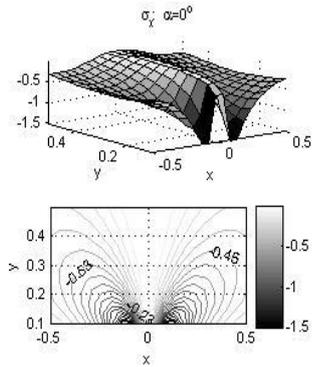


Рис.3 Компонента тензора напряжений

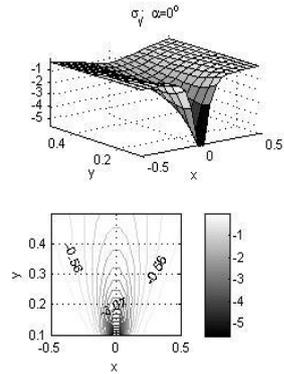


Рис.4 Компонента тензора напряжений

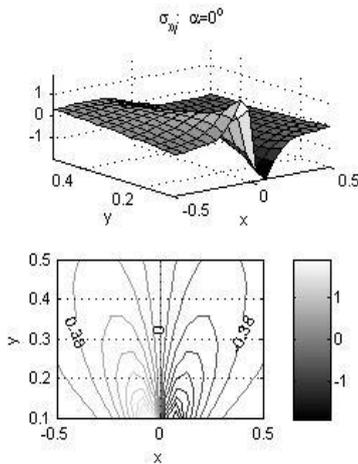


Рис.5 Компонента тензора напряжений

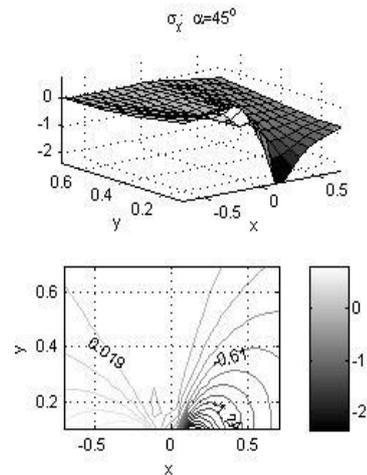


Рис.6 Компонента тензора напряжений

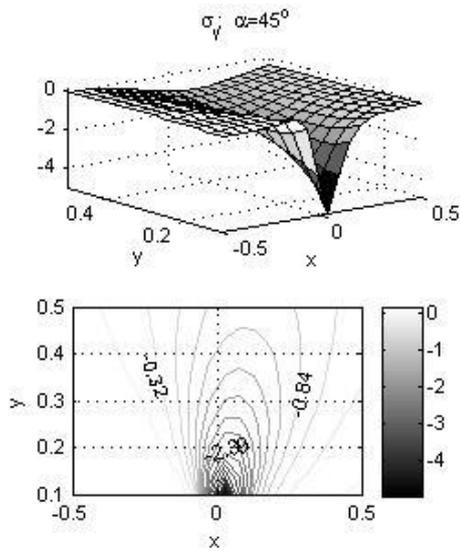


Рис.7 Компонента тензора напряжений

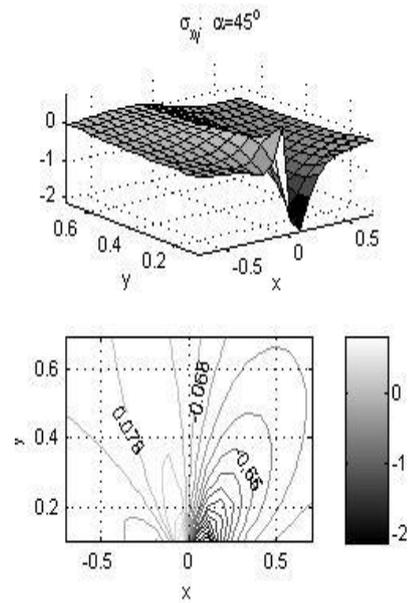


Рис.8 Компонента тензора напряжений

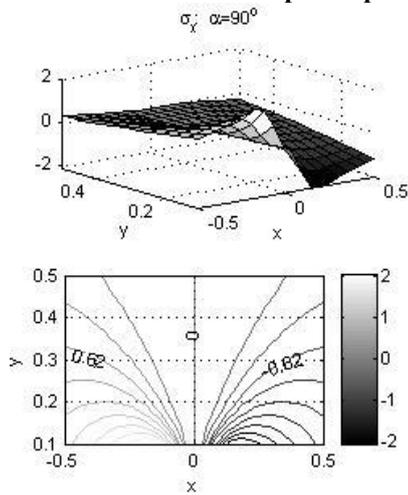


Рис.9 Компонента тензора напряжений

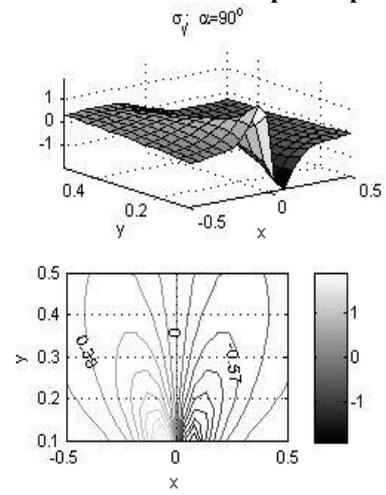


Рис.10 Компонента тензора напряжений

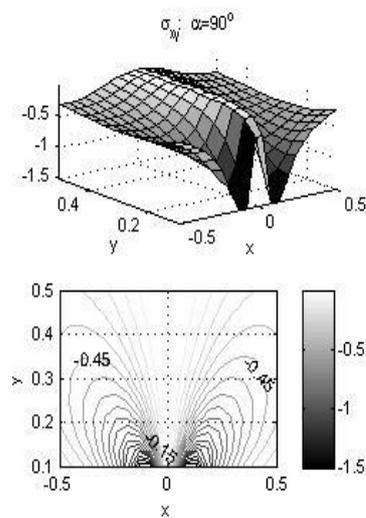


Рис.11 Компонента тензора напряжений

Из графиков видно, что имеет место концентрация напряжений в окрестности точки приложения силы. Рис.3, 6, 9 демонстрируют переход зависимостей от

симметричного относительно оси Oy к несимметричному. На рис.4, 7, 10 изображены нормальные напряжения σ_y . При $\alpha = 0$ эти напряжения являются сжимающими, а при дальнейшем увеличении угла α в теле появляются и растягивающие напряжения. Касательные напряжения σ_{xy} при увеличении угла α переходят к симметричному относительно Oy характеру распределения. На рис.12, 13, 14 изображены графические зависимости $T(x, y)$ и соответствующие графики линий уровня при $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

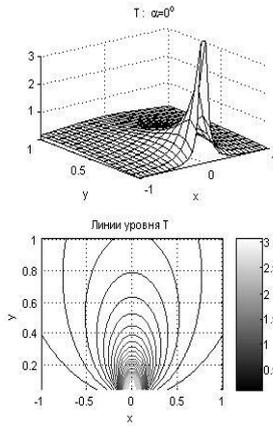


Рис.12 Интенсивность T

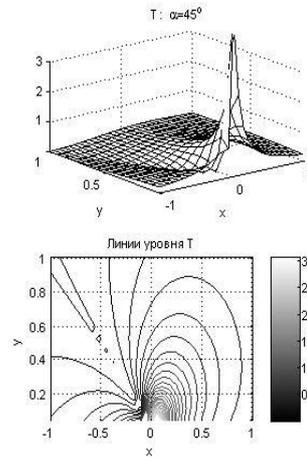


Рис.13 Интенсивность T

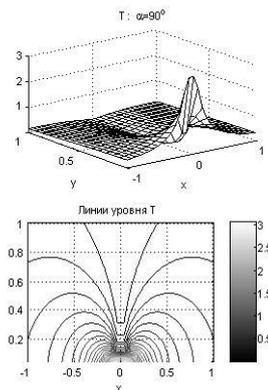


Рис.14 Интенсивность T

Видно, что зона максимальных значений указанной характеристики (они указаны на графиках в виде утолщенных линий) незначительно смещается вдоль оси Ox в положительном направлении и при $\alpha = 90^\circ$ появляются две подобласти, расположенные симметрично относительно Oy (рис.16).

На рис.15, 16, 17 изображены векторные поля перемещений точек тела. Характер этих полей напоминает некоторую комбинацию полей скоростей плоских вихрей [16].

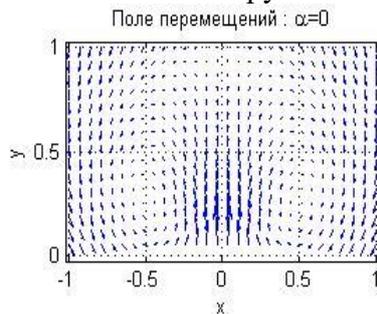


Рис.15. Поле перемещений

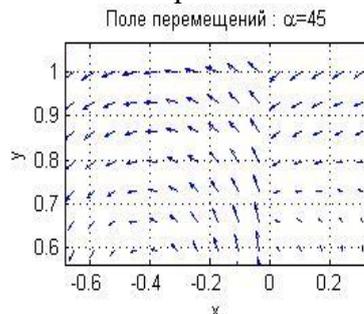


Рис.16 Поле перемещений

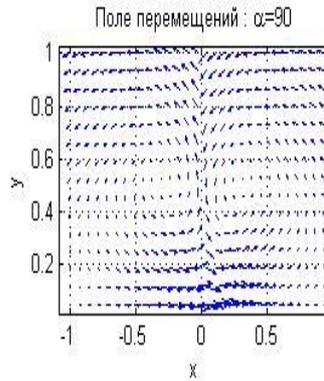


Рис.17 Поле перемещений

График зависимости критерия S от угла α приведен на рис.18. Видно, что зависимость имеет максимальное значение, соответствующее значению $\alpha \approx 25^\circ$.

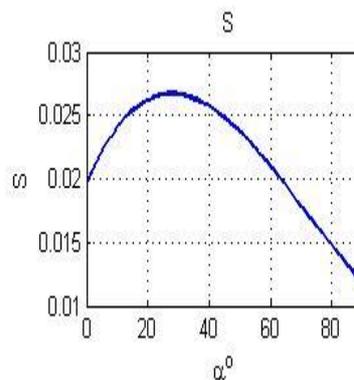


Рис.18 Критерий S

Выводы

1. Принцип Сен-Венана позволяет сказать, что характер напряженно деформированного состояния тела вдали от точки приложения силы \vec{P} будет похожим на соответствующее состояние, возникающее при резании упругого материала ножом [17, 18]. Поэтому рассматриваемую задачу можно рассматривать как некоторую модель истинного процесса резания.

2. Выбранный критерий S позволяет указывать некоторое качество процесса резания - стремление получить максимальную область пластического деформирования при минимальной силе резания.

3. Рассчитанный критерий S говорит о том, что оптимальный угол резания нужно брать примерно равным 25° .

Известны другие способы дробления тел, опирающиеся на явление пластического течения тел [19, 20].

Список использованных источников

1. Подрібнювач зернових кормів: патент на винахід Україна / Нанка О.В., Бойко І.Г., Науменко О.А.; №84938, 2013., В02С, 11.11.2013, Бюл. №21.
2. Спосіб подрібнення фуражного зерна: патент на винахід Україна: МПКА21С 1/06 / Нанка О.В. №95760; заявл. 2013, А21D13/08, 12.01.2015, Бюл. №1.
3. Спосіб підвищення рівномірності подрібнення зерна: патент на винахід Україна / Нанка О.В.; №116240, В02С 9/00, 10.05.2017. Бюл. №9.

4. Подрібнювач фуражного зерна: патент на винахід Україна / Нанка О.В., Бойко І.Г., Бакум М.В., Нагорний С.А.; №116599, 2017, A01F 12/00, A01F 29/00, B02C 18/00; 10.05.2017, Бюл. №9.
5. Nanka A., Boyko I. Analytical researches of methods and constructions of grinders of corn forage [Text] / A. Nanka, I. Boyko // Motrol. Motoryzacija I energetyca rolnictva. – 2013. – Vol. 15, No7. – С. 3–7. – ISSN: 1730-8658.
6. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
7. Либовиц Г. Разрушение. Том 2. М.: Мир, 1975. 766 с.
8. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т.2. М.: Мир, 1969. 863 с.
9. Ильющин А.А. Пластичность. М. Изд-во АН СССР, 1961. 271 с.
10. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
11. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
13. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.: Гостехиздат, 1947. 464 с.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
15. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 727 с.
16. Прагер В. Введение в механику сплошных сред, М.: ИЛ, 1963. 311 с.
17. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч 3: Механика невязкой жидкости, Харьков: Золотые страницы, 2005. 332 с.
18. Джанелидзе Г.Ю. Принцип Сен-Венана. Труды Ленингр. политехнич. ин-та. Динамика и прочность машин, №192, 1958. 12-27 с.
19. Tracy Y/ Thomas/ Plastic flow and fracture in solids. New York-London: Academic Press. – 1961. – 308.
20. Pogrebnyak A.V., Pogrebnyak V.G. Mechanism of the high efficiency of the cutting frozen food products using water-jet with polymer additions. Journal “Food Science and Technology”. 2017; Volume 11 Issue 2: 73-78.

Анотація

ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РІЗАННЯ ПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ ГОСТРИМ ЛЕЗОМ

О.В. Нанка, І.І. Ієвлєв, В.В. Семенцов, Д.І. Бойко, В.І. Семенцов

Розглядається задача, що моделює процес різання пружного тіла гострим ножем. Вплив ножа моделюється дією зосередженої сили. Завдання розглядається в двомірній постановці, коли пружне тіло займає напівплощину, обмежену прямою лінією. Використовується відоме рішення про напружений стан пружної півплощини, навантаженої зосередженою силою, спрямованої під кутом по відношенню до нормалі n до граничної лінії. Вводиться певний «параметр якості» процесу різання, що дозволяє здійснювати оптимізацію процесу різання. Результати наведені у вигляді графіків тензора напружень, інтенсивності дотичних напружень і графічної залежності «параметра якості» від кута нахилу сили до нормалі n .

Ключові слова: різання, лезо, напруги, граничні напруги, інтенсивність дотичних напружень, поле переміщень.

Abstract

TO THE MODELING OF THE CUTTING PROCESS OF ELASTIC MATERIAL WITH A SHARPED BLADE

O.V. Nanka, I.I. Iyevlev, V.V. Sementsov, D.I. Boyko, V.I. Sementsov

A problem is considered that simulates the process of cutting an elastic body with a sharp no-shaft. The action of the knife is modeled by the action of the co-concentrated force. The problem is considered in a two-dimensional formulation, when the elastic body occupies a plane, bounded by a straight line. A well-known solution is used for the stressed state of an elastic half-plane loaded with a concentrated force directed at an angle with respect to the normal n to the boundary line. A certain "quality parameter" of the cutting process is introduced, which makes it possible to optimize the cutting process. The results are shown in the form of graphs of the components of the stress tensor, the intensity of the tangential stresses, and the graphical dependence of the "quality parameter" on the angle of inclination of the force to the normal n .

Keywords: cutting, blade, stresses, limiting stresses, shear stresses intensity, displacement field.