Чеканов Микола Анатолійович, канд. техн. наук, доц., доц. кафедри фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна. Тел.: (057)349-45-86; e-mail: chekanov_n@ukr.net.

Чеканов Николай Анатольевич, канд. техн. наук, доц., доц. кафедры физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (057)349-45-86; e-mail: chekanov_n@ukr.net.

Chekanov Micola, Candidate of Technical Sciences, associate professor, associate professor of department of physical and mathematical and engineering-technical disciplines, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. Tel.: (057)349-45-86; e-mail: chekanov_n@ukr.net.

Рекомендовано до публікації д-ром техн. наук, проф. В.М. Михайловим.
Отримано 15.03.2016. ХДУХТ, Харків.

УДК 536.12

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЛІВ ТЕМПЕРАТУРИ ПІД ЧАС ТЕПЛООБМІНУ ДЛЯ ТІЛ СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ

М.І. Погожих, Л.О. Пархоменко, Є.О. Іштван

Запропоновано математичну модель процесу теплообміну в тілі скінченних розмірів у вигляді нестаціонарного рівняння теплопровідності, початкових умов та основних типів межових умов. Проведено аналіз точного розв'язку рівняння для різних типів межових умов. Розглянуто чисельний приклад реалізації моделі та отримано умови для найкращої апроксимації точного розв'язку, що надається у вигляді ряду, першим членом розвинення, завдяки чому стає можливим визначення теплофізичних характеристик тіла.

Ключові слова: *процес теплообміну, рівняння теплопровідності, теплофізичні характеристики тіла.*

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ТЕПЛООБМЕНЕ ДЛЯ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Н.И. Погожих, Л.А. Пархоменко, Е.А. Иштван

Предложена математическая модель процесса теплообмена в теле конечных размеров в виде нестационарного уравнения теплопроводности, начальных условий и основных типов краевых условий. Проведен анализ *точного решения уравнения для различных типов граничных условий. Рассмотрен численный пример реализации модели и получены условия для наилучшей аппроксимации точного решения, представляемого рядом, первым членом разложения, благодаря чему становится возможным определение теплофизических характеристик тела.*

Ключевые слова: *процесс теплообмена, уравнение теплопроводности, теплофизические характеристики тела.*

PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE FIELDS BY HEAT EXCHANGE FOR THE SOLIDS OF FINITE SIZE

M. Pogozhykh, L. Parkhomenko, Y. Ishtvan

The problems of energy efficiency of heat and mass transfer processes, including drying, can be solved by the analysis of experimental data and by physical and mathematical (theoretical) modeling. The last, anyway, should be compared with the experiment to refine the model and its approach (adaptation) to technical solutions.

In particular, during drying of colloidal capillary-porous bodies, which include the majority of food raw materials, it is necessary to record and analyze temperature distribution, which affects both the drying process and the finished product's quality.

It is necessary to specify the conditions of the experiment and its methods so that the recorded data allow analyzing thermal properties of the dehydrated material and scientifically justify rational modes and methods of drying.

In this paper the mathematical model of heat transfer in the solid of finite size is proposed in a form of non-stationary heat equation, initial conditions and basic types of boundary conditions. The exact solution for any type of boundary conditions is analyzed. Numerical example of the model realization is considered. The best conditions for the approximation of the exact solution, provided as a series, its first expansion member are obtained.

Keywords: *energy efficiency of heat and mass transfer processes, drying of colloidal capillary-porous bodies, heat equation.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. Проблеми енергоефективності тепломасообмінних процесів, у тому числі сушіння, можуть розв'язуватися аналізом експериментальних даних та фізико-математичним (теоретичним) моделюванням. Останнє, так чи інакше, слід порівнювати з експериментом для уточнення моделі та її наближення (адаптації) до технічних рішень. Зокрема, під час сушіння колоїдних капілярно-пористих тіл, до яких належить більшість харчової сировини, виникає необхідність реєструвати та аналізувати розподіл температур, який впливає не тільки на сам процес сушіння, але й на якість готової продукції. При цьому необхідно задати умови та методики проведення експерименту, щоб дані, що реєструються, дозволили проаналізувати теплофізичні властивості матеріалу, що зневоднюється, та науково обґрунтовувати раціональні режими та способи сушіння. У першому наближенні сушіння необхідно розглядати як процес теплообміну з розсіюванням теплоти за рахунок фазового переходу першого роду.

Математична модель процесу теплообміну в тілі скінченних розмірів розглядається у вигляді нестаціонарного рівняння теплопровідності, початкових умов та основних типів межових умов.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Запропонована математична модель процесу у вигляді нестаціонарного рівняння теплопровідності розглядається в [1; 2].

Фундаментальні розробки, з оглядом сучасних підходів до пошуку наближених рішень обернених задач теплообміну, були опубліковані в монографії академіка НАНУ Ю.М. Мацевитого [3; 4]

Мета статті − провести дослідження для встановлення оптимальних умов процесу теплообміну, розглянувши різні типи зовнішніх умов та різні геометричні параметри досліджуваного тіла.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розподіл температури в прямокутному паралелепіпеді $\Omega = \{-l_1 \le x \le l_1, \quad -l_2 \le y \le l_2, -l_3 \le z \le l_3\}$ ($l_1, l_2, l_3 > 0$), всередині якого відсутні джерела теплоти, описується рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \ (x, y, z) \in \Omega \setminus \partial\Omega, \ t > 0, \qquad (1)$$

де $T(t, x, y, z)$ − температура тіла в точці (x, y, z) в момент часу t; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ − оператор Лапласа; $\chi = \frac{\lambda}{\rho c}$, $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ − коефіцієнт температуропровідності, λ, $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ − коефіцієнт теплопровідності; c, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ − питома теплоємність речовини; $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ − густина речовини. Через $\partial\Omega$ позначено межу області Ω.

Розглянемо дві початково-крайові задачі для рівняння (1).

Задача 1. Нехай в початковий момент часу температура тіла є сталою:

$$T(0, x, y, z) = T_0, \ (x, y, z) \in \Omega \setminus \partial\Omega; \qquad (2)$$

нехай протягом деякого часу температура поверхні тіла $\partial\Omega = \{x = \pm l_1, \, y = \pm l_2, \, z = \pm l_3\}$ підтримується сталою T_1:

$$T = T_1\,,\ (x,y,z)\in\partial\Omega\,,\ t>0\,. \tag{3}$$

Задача 2. Нехай в початковий момент часу температура тіла є сталою:

$$T(0,x,y,z) = T_1\,,\ (x,y,z)\in\Omega\setminus\partial\Omega\,; \tag{4}$$

нехай на поверхні тіла $\partial\Omega$ відбувається теплообмін із середовищем температури T_0:

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T - T_0) = 0\,,\ (x,y,z)\in\partial\Omega\,,\ t>0\,, \tag{5}$$

де $\dfrac{\partial}{\partial n}$ − оператор диференціювання за зовнішньою нормаллю до поверхні $\partial\Omega$; α, $\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}}$ − коефіцієнт тепловіддачі.

Розв’язок рівняння (1) з початковою умовою (2) та крайовою умовою (3) записується у вигляді

$$T = T_1 + \frac{64}{\pi^3}(T_0 - T_1)\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+m+n}}{(2l+1)(2m+1)(2n+1)}\times$$
$$\times\cos\frac{(2l+1)\pi x}{2l_1}\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2l_2}\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l_3}e^{-\beta_{l,m,n}t}\,, \tag{6}$$

де $\beta_{l,m,n} = \dfrac{\chi\pi^2}{4}\left[\dfrac{(2l+1)^2}{l_1^2} + \dfrac{(2m+1)^2}{l_2^2} + \dfrac{(2n+1)^2}{l_3^2}\right]$.

Розв’язок рівняння (1) з початковою умовою (4) та крайовою умовою (5) записується у вигляді

$$T = T_0 + 8h^3(T_1 - T_0)\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\gamma_{1,l}x)\cos(\gamma_{2,m}y)\cos(\gamma_{3,n}z)}{\cos(\gamma_{1,l}l_1)\cos(\gamma_{2,m}l_2)\cos(\gamma_{3,n}l_3)}\times$$
$$\times\frac{1}{\left[(h^2+\gamma_{1,l}^2)l_1 + h\right]\left[(h^2+\gamma_{2,m}^2)l_2 + h\right]\left[(h^2+\gamma_{3,n}^2)l_3 + h\right]}e^{-\chi(\gamma_{1,l}^2+\gamma_{2,m}^2+\gamma_{3,n}^2)t}\,. \tag{7}$$

Тут $h=\dfrac{\alpha}{\lambda}$, $\gamma_{i,j}$ – додатні корені рівняння $\gamma \operatorname{tg}(\gamma l_i)=h$ ($i=\overline{1,3}$; $j=\overline{1,\infty}$).

Розглянемо розв'язок (6) рівняння (1), що відповідає початковій умові (2) та крайовій умові (3) в області $\Omega=\{-l_1\le x\le l_1,\ -l_2\le y\le l_2,\ -l_3\le z\le l_3\}$. Для розрахунків покладаємо $\lambda=1\,\dfrac{\text{Âò}}{\text{ì}\cdot\text{Ê}}$, $\tilde{n}=2\cdot10^3\,\dfrac{\text{Äæ}}{\text{êã}\cdot\text{Ê}}$, $\rho=10^3\,\dfrac{\text{êã}}{\text{ì}^{3}}$. Вважаємо функцію температури співвіднесеною до величини T_0 $\left(\dfrac{T}{T_0}\right)$; початкова умова (2) у безрозмірних величинах набуває вигляду

$$T(0,x,y,z)=1,\ (x,y,z)\in\Omega\setminus\partial\Omega;$$

в умові (3) покладаємо $T_1=2T_0$, у безрозмірних величинах маємо

$$T=2,\ (x,y,z)\in\partial\Omega,\ t>0.$$

За основу паралелепіпеда візьмемо прямокутник $\Omega_0=\{-l_1\le x\le l_1,\ -l_2\le y\le l_2\}$ із розмірами $l_1=0.06$ м, $l_2=0.0575$ м.

Позначимо через $T^{(N)}(t)$ апроксимацію ряду (6) сумою N перших доданків, визначену в точці $\left(\dfrac{l_1}{3};\dfrac{l_2}{3};\dfrac{l_3}{3}\right)$, та проведемо дослідження залежності якості апроксимації точного розв'язку першим членом розвинення

$$T^{(1)}(t)=T_1+\frac{24\sqrt{3}}{\pi^3}(T_0-T_1)e^{-\frac{\chi\pi^2}{4}\left[\frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}+\frac{1}{l_3^2}\right]t} \tag{8}$$

від висоти паралелепіпеда $h=2l_3$ для визначеного геометричного розміру основи.

На рис. 1 неперервною лінією зображено точний розв'язок (6) рівняння (1), визначений у точці $\left(\frac{l_1}{3};\frac{l_2}{3};\frac{l_3}{3}\right)$, що відповідає початковій умові (2) та крайовій умові (3), пунктирною – його наближення функцією (8) для паралелепіпеда з основою Ω_0 та різною висотою.

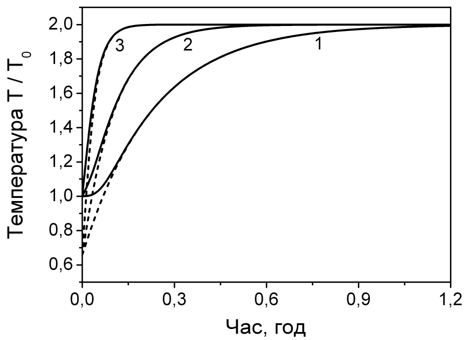

Рис. 1. Розподіл температури в паралелепіпеді з основою Ω_0 залежно від його висоти *h* (задача 1):
1 − *h*=0,100 м; 2 − *h*=0,050 м; 3 − *h*=0,025 м

Розглянемо розв'язок (7) рівняння (1), що відповідає початковій умові (4) та крайовій умові (5) в паралелепіпеді $\Omega = \{-l_1 \le x \le l_1$, $-l_2 \le y \le l_2, -l_3 \le z \le l_3\}$ із основою Ω_0. Функцію температури, як і раніше, вважаємо співвіднесеною до величини T_0; в умові (4) покладемо $T_1 = 2T_0$, умова (5) для безрозмірної функції температури набуває вигляду

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T - 1) = 0 \,,\ (x, y, z) \in \partial\Omega \,,\ t > 0 \,.$$

Покладаємо $\alpha = 20 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$, $\lambda = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$. Функція $T^{(1)}(t)$, визначена в точці $\left(\frac{l_1}{3};\frac{l_2}{3};\frac{l_3}{3}\right)$, в цьому випадку набуває вигляду

$$T^{(1)}(t) = T_0 + 8h^3(T_1 - T_0)\frac{\cos(\gamma_{1,1}x)\cos(\gamma_{2,1}y)\cos(\gamma_{3,1}z)}{\cos(\gamma_{1,l}l_1)\cos(\gamma_{2,m}l_2)\cos(\gamma_{3,n}l_3)}\times$$

$$\times\frac{1}{\left[(h^2+\gamma_{1,1}^2)l_1+h\right]\left[(h^2+\gamma_{2,1}^2)l_2+h\right]\left[(h^2+\gamma_{3,1}^2)l_3+h\right]}e^{-\chi(\gamma_{1,1}^2+\gamma_{2,1}^2+\gamma_{3,1}^2)t}. \qquad (9)$$

На рис. 2 неперервною лінією зображено точний розв’язок (7) рівняння (1), визначений в точці $\left(\frac{l_1}{3};\frac{l_2}{3};\frac{l_3}{3}\right)$, що відповідає початковій умові (4) та крайовій умові (5), пунктирною – його наближення функцією (9) для паралелепіпеда з основою Ω_0 та різною висотою.

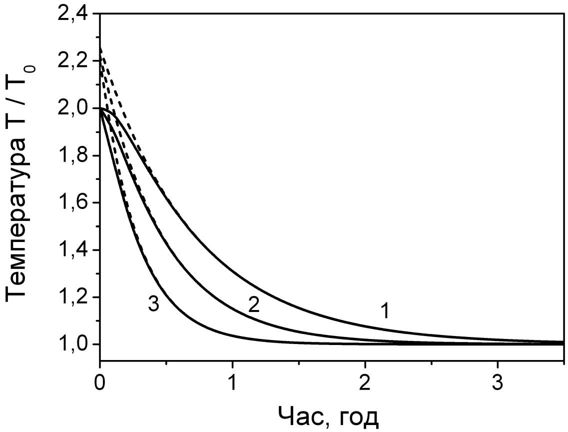

Рис. 2. Розподіл температури в паралелепіпеді з основою Ω_0 залежно від його висоти *h* (задача 2): 1 − *h*=0,100 м; 2 − *h*=0,050 м; 3 − *h*=0,025 м

У таблиці наведено визначені моменти часу t_* (год), за яких ряди (6) та (7) апроксимуються функціями (8) та (9) відповідно з абсолютною похибкою 10^{-3}, та їх відношення до загального часу встановлення температури t_0 (год) для паралелепіпедів із різною висотою h (м).

Таблиця

Результати апроксимації точного розв'язку першим членом розвинення для двох типів початково-крайових задач

h, м	t_*, год		$\frac{t_*}{t_0}$	
	Задача 1	Задача 2	Задача 1	Задача 2
0,100	0,15	0,60	0,10	0,14
0,050	0,12	0,50	0,17	0,16
0,025	0,07	0,35	0,35	0,18

Висновки. Побудовано математичну модель процесу теплообміну в прямокутному паралелепіпеді за різних типів межових умов. Проведено чисельні розрахунки для визначення оптимального розміру паралелепіпеда для найефективнішого наближення точного розв'язку, що представлений у вигляді ряду, першим членом розвинення. Отриманий розв'язок можна використовувати для експериментального визначення теплофізичних властивостей вологих тіл при сушінні.

Список джерел інформації / References

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Гостехиздат, 1952. – 392 с.

Lykov, A.V. (1952), *Theory of heat conduction* [*Teoriya teploprovodnosti*], Moskow, 392 p.

2. Арсенин В. Я. Математическая физика: основные уравнения и специальные функции / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1966. – 368 с.

Arsenin, V.Y. (1966), *Mathematical physics: basic equations and special functions* [*Matematicheskaya fizika: osnovnye uravneniya i spetsyalnye funktsii*], Moskow, 368 p.

3. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности. Т. 1 / Ю. М. Мацевитый. – К. : Наук. думка, 2002. − 405 с.

Matsevity, Y.M. (2002), Inverse heat conduction problem [*Obratnye zadachi teploprovodnosti*, Vol. 1, Kiev, 405 p.

4. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности. Т. 2. / Ю. М. Мацевитый. – К. : Наук. думка, 2003. − 392 с.

Matsevity, Y. M. (2003), Inverse heat conduction problem [*Obratnye zadachi teploprovodnosti*], Vol. 2, Kiev, 392 p.

5. Погожих М. І. Наукові основи теорії й техніки сушіння харчової сировини в масообмінних модулях : дис. … д-ра техн. наук : 04.06.02 / М. І. Погожих. – Х., 2002. – 212 с.

Pogozhikh, M.I. (2002), *Scientific foundations of the theory and technology of drying food materials in mass-transfer modules: dissertation* [*Naukovi osnovy teoriyi i tekhniky sushinnya kharchovoyi syrovyny v masoobminnykh modulyakh*], Kharkiv, 212 p.

6. Scanlin, D. (1997), “The Design, Construction and Use of an Indirect, Through-Pass, Solar Food Dryer”, *Home Power magazine,* Issue 57, pp. 62-72.

Погожих Микола Іванович, д-р техн. наук, проф., кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. E-mail: padnip@gmail.com.

Погожих Николай Иванович, д-р техн. наук, проф., кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. E-mail: padnip@gmail.com.

Pogozhykh Mykola, Doctor of Science, Department of Physical, Mathematical and Engineering Disciplines, Kharkov State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. E-mail: padnip@gmail.com

Пархоменко Лариса Олександрівна, ст. викл., кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. E-mail: larisa_p99@mail.ru.

Пархоменко Лариса Александровна, ст. преп., кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. E-mail: larisa_p99@mail.ru.

Parkhomenko Larysa, Department of Physical, Mathematical and Engineering Disciplines, Kharkov State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. E-mail: larisa_p99@mail.ru.

Іштван Єгор Олексійович, ст. викл., кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. E-mail: egor.ishtvan@gmail.com.

Иштван Егор Алексеевич, ст. преп., кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. E-mail: egor.ishtvan@gmail.com.

Istvan Iegor, Department of Physical, Mathematical and engineering disciplines, Kharkov State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. E-mail: egor.ishtvan@gmail.com.

Рекомендовано до публікації д-ром техн. наук, проф. В.М. Михайловим.
Отримано 15.03.2016. ХДУХТ, Харків.