

## ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ОСЦИЛЯТОРА ЗА НАЯВНОСТІ КВАДРАТИЧНОГО В'ЯЗКОГО ОПОРУ ТА СУХОГО ТЕРТЯ

Ольшанський В.П. д.ф.-м.н., професор, Сліпченко М.В. к.т.н., доцент,  
Спольнік О.І. д.ф.-м.н., професор

*Харківський національний технічний університет сільського  
господарства імені Петра Василенка  
м. Харків, Україна*

В теорії коливань найбільш вивчено рух дисипативних систем при дії окремих сил опору. Значно менше публікацій стосується коливань механічних систем при спільній дії сил опору різної природи. Виходячи з цього, тут розглядаємо вільні коливання лінійно пружного осцилятора при наявності двох дисипативних сил, а саме: сили квадратичного в'язкого опору та сили сухого тертя Кулона. Така коливальна система відноситься до подвійно нелінійних.

Останнім часом для розрахунку амплітуд вільних коливань лінійно пружного осцилятора в умовах квадратичного в'язкого опору була задіяна функція Ламберта [1], що доповнило відомі наближені розв'язки [2-4] цієї класичної задачі. Тут йдеться про її узагальнення, коли крім сили в'язкого опору спільно з ним діє сила сухого тертя. Це принципово змінює процес вільних коливань, де він стає обмеженим у часі, бо складаються з обмеженої кількості циклів. Для побудови точного аналітичного розв'язку цієї узагальненої задачі теж використовуємо функцію Ламберта, таблиці якої надруковано в [5].

Розглянемо переміщення осцилятора, що описується рівнянням:

$$\ddot{x} + \left( \frac{k}{m} \dot{x}^2 + \frac{F_T}{m} \right) \text{sign}(\dot{x}) + \frac{c}{m} x = 0, \quad (1)$$

де  $m$  – маса осцилятора;

$c$  – коефіцієнт жорсткості пружини;

$k$  – коефіцієнт квадратичного опору;

$F_T$  – сила сухого тертя.

Розв'язок рівняння за допомогою використання функції Ламберта отримуємо у вигляді:

$$a_i = \frac{m}{2k} \left[ 1 - \frac{2kF_T}{mc} + W_1(-\exp(-z_i)) \right]. \quad (2)$$

в якому  $W_1(-\zeta)$  – перша гілка двохзначної функції Ламберта від'ємного аргументу.

Порівняння значень отриманих чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері зі значеннями, отриманими за формулою (2) (табл. 1) дають розбіжність менше 3 %, що підтверджує адекватність виведеної формули.

Таблиця 1. Значення розмахів та час їх досягнення

$i$	Форм. (2)	Числ. інт.	$10\sum t_i, \text{с}$
	Значення $100a_i, \text{м}$		
1	3,394	3,395	1,05482
2	2,394	2,395	2,10566
3	1,673	1,675	3,15467
4	1,097	1,102	4,20270
5	0,605	0,609	5,25022
6	0,151	0,155	6,30000

Для обчислення розмахів коливань нелінійного осцилятора можна також застосувати метод енергетичного балансу. З цією метою використовуємо розрахункові залежності, одержані в [6], як з застосуванням рівняння обвідної так і без неї. Метод енергетичного балансу дає можливість після обробки віброграми коливань ідентифікувати значення коефіцієнта в'язкого опору  $k$  і сили тертя  $F_T$ .

Дослідження показало, що розрахунок розмахів затухаючих коливань осцилятора, при наявності квадратичного опору і сухого тертя, за точною формулою пов'язаний з обчисленням значень функції Ламберта від'ємного аргументу. При відсутності таблиць цієї спеціальної функції розмахи з невеликою похибкою можна також визначати методом енергетичного балансу, який не потребує розв'язання диференціального рівняння руху осцилятора. Цей метод дає можливість ідентифікувати, при наявності віброграми коливань, значення коефіцієнта в'язкого опору і сили сухого тертя.

#### Список літератури

1. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Функция Ламберта в задаче колебаний математического маятника. Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, 2014. № 18(1061). С. 116-119.
2. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of exact solution for ordinary differential equation. Boca Raton: CRC press, 2007. 707 p.
3. Rao S. S. Mechanical vibrations. Pearson (6th edition), 2016. 1152 p.
4. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т.2. Москва: Дрофа, 2006. 720 с.
5. Ольшанський В.П., Сліпченко М.В., Спольнік О.І., Бурлака В.В. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів. Харків: КП Міська друкарня, 2020. 268 с.
6. Ольшанський В.П., Бурлака В.В., Сліпченко М.В. Вільні затухаючі коливання осцилятора з комбінованим опором. Вісник ХНТУСГ: Сучасні напрямки технології процесів переробних і харчових виробництв. Харків, 2019. Вип. 207. С. 22-33.